



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

math 358.79

SCIENCE CENTER LIBRARY



○

ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH.
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

I. ABTHEILUNG.

II. THEIL:

HANDBUCH DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN

VON

GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

UCH MATIK

HERAUSGEGEBEN

VON

GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH


UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. REIDT UND PROF. DR. HEGER.

MIT 235 HOLZSCHNITTEN.

ZWEITER BAND.


BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1881.

△

~~VII, 3020~~

Math 358.79

HARVARD COLLEGE LIBRARY

JAN 26 1833

1833

~~08.79~~

Das Recht der Uebersetzung bleibt vorbehalten.

Inhalts-Verzeichniss.

○ Analytische Geometrie,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

I. Theil. Analytische Geometrie der Ebene.

	Seite
§ 1. Coordinaten des Punktes	1
§ 2. Die Gerade	3
§ 3. Ellipse, Hyperbel, Parabel	7
§ 4. Liniencoordinaten	25
§ 5. Die Gleichung ersten Grades in Punkt- und Liniencoordinaten	29
§ 6. Projective Strahlbüschel und Punktreihen	39
§ 7. Die quadratische Punkt- und Strahleninvolution	58
§ 8. Der Kreis	65
§ 9. Transformation der Coordinaten	78
§ 10. Transformation der Gleichungen zweiten Grades in Punkt- und Liniencoordinaten	86
§ 11. Bestimmung einer Curve zweiten Grades durch fünf Punkte und durch fünf Tangenten	99
§ 12. Homogene Coordinaten des Punktes und der Geraden	114
§ 13. Tangente und Tangentialpunkt, Polare und Pol an Curven zweiten Grades	125
§ 14. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar	149
§ 15. Curven dritter Ordnung. Construction derselben aus neun gegebenen Punkten	164
§ 16. Tangente und Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung	176
§ 17. Construction von Curven dritter Ordnung mit Doppel- und Rückkehrpunkt	186
§ 18. Correspondirende Punkte einer Curve dritter Ordnung	191

II. Theil. Analytische Geometrie des Raumes.

§ 1. Coordinaten des Punktes	195
§ 2. Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme	199
§ 3. Die Ebene, die Gerade und der Punkt	202
§ 4. Die Kugel	220
§ 5. Tangentenebene und Tangentialpunkt an Flächen zweiten Grades. Cylinder, Kegel und Grenzfläche zweiten Grades	230
§ 6. Das Ellipsoid, die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloiden	247
§ 7. Symmetrieebenen der Flächen zweiter Ordnung	265
§ 8. Gerade Linien auf Flächen zweiter Ordnung	276
§ 9. Schnittcurve und Schnittpunkte von Flächen zweiter Ordnung. Kreisschnitte	281
§ 10. Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen zweiter Klasse umschrieben ist. Gemeinsame Tangentenebenen dreier Flächen zweiter Klasse. Umschriebene Rotationskegel	293
§ 11. Homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene. Gleichung der Ebene und des Punktes	304
§ 12. Polarebene und Pol für Flächen zweiter Ordnung	316
§ 13. Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten	341
§ 14. Projective Punktebenen, Geraden Ebenen, Ebenenbündel und Strahlbündel	345
§ 15. Raumcurven dritter Ordnung und abwickelbare Flächen dritter Klasse	362

⊙ Differentialrechnung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

	Seite
§ 1. Einleitung	381
§ 2. Differentiation einfacher Functionen	388
§ 3. Differentiation zusammengesetzter und unentwickelter Functionen	393
§ 4. Differential einer Function mehrerer Variabeln	399
§ 5. Tangente, Normale und Tangentialpunkt ebener Curven	409
§ 6. Tangentenebene und Tangentialpunkt von Flächen; Tangente und Normalebene von Raumcurven; Gerade auf abwickelbaren Flächen	430
§ 7. Höhere Differentialquotienten	448
§ 8. Krümmung ebener Curven	459
§ 9. Osculationsebene, Krümmung, Torsion und osculirende Kugel an Raumcurven	466
§ 10. Krümmung von Flächen	475
§ 11. Einhüllende Curven und Flächen	486
§ 12. Bestimmung einiger Grenzwerte $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^\infty, \infty^0\right)$	494
§ 13. Die Taylor'sche Reihe	496
§ 14. Maxima und Minima	504
§ 15. Singuläre Punkte, Tangenten und Tangentenebenen an Curven und Flächen	519
§ 16. Unendliche Reihen	540
§ 17. Unendliche Producte	562
Anhang	568

⊙ Integralrechnung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

I. Theil. Integrale realer Functionen einer realen Variabeln.

§ 1. Grundbegriffe und Grundformeln	569
§ 2. Integral eines Polynoms und eines Products. Einführung einer neuen Variabeln	574
§ 3. Integration rationaler algebraischer Functionen	576
§ 4. Integration irrationaler Functionen	586
§ 5. Integration transcendenten Functionen	592
§ 6. Integration durch unendliche Reihen	599
§ 7. Einfache bestimmte Integrale	602
§ 8. Berechnung von ebenen Flächen, Curvenbogen, Raumtheilen und unebenen Flächen durch einfache bestimmte Integrale	610
§ 9. Bestimmte Doppelintegrale	627
§ 10. Dreifache bestimmte Integrale	643
§ 11. Die periodischen Reihen und die FOURIER'schen Integrale	652

II. Theil. Functionen einer complexen Variabeln.

§ 12. Algebraische Functionen einer complexen Variabeln	678
§ 13. Integrale complexen Functionen	696
§ 14. Logarithmus und Exponentialfunction, Arcustangens und Tangente	710
§ 15. Arcussinus und Sinus, Arcuscosinus und Cosinus	717
§ 16. Definition des elliptischen Integrals, Reduction auf die Normalformen; Vieldeutigkeit elliptischer Integrale	727
§ 17. Das Additionstheorem für elliptische Integrale. Numerische Berechnung von Integralen erster und zweiter Art	746
§ 18. Die elliptischen Functionen. Entwicklung derselben in Potenzreihen und in periodische Reihen	758
§ 19. Die Thetafunctionen	773

	Seite
§ 20. Entwicklung der elliptischen Functionen in unendliche Producte	783
§ 21. Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Art	798
§ 22. Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale	811

III. Theil. Differentialgleichungen.

§ 23. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen	819
§ 24. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen .	829
§ 25. Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Veränderlichen	854
§ 26. Differentialgleichungen zwischen mehr als zwei Variabeln. Bestimmte Systeme .	871
§ 27. Partiale Differentialgleichungen erster Ordnung	885
§ 28. Partiale Differentialgleichungen zweiter Ordnung	898

⊙ Ausgleichungsrechnung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

§ 1. Einleitung	903
§ 2. Beobachtungsfehler	907
§ 3. Ausgleichung direkter Beobachtungen	908
§ 4. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen	912
§ 5. Ausgleichung direkter und vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen	920

① Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung,

bearbeitet von Dr. RICHARD HEGER in Dresden.

§ 1. Lebenswahrscheinlichkeit	929
§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung	933
§ 3. Berechnung der Prämien für Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung . . .	943
Absterbeordnung und Tafel der Lebenserwartung der Bevölkerung des preussischen Staates	957
Druckfehler-Verzeichniss	960
Literatur-Angabe	961

Analytische Geometrie,

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

I. Theil. Analytische Geometrie der Ebene.

§ 1. Coordinaten des Punktes.

1. Die analytische Geometrie stellt sich die Aufgabe, geometrische Sätze aus den Resultaten algebraischer (analytischer) Operationen abzuleiten.

Sie geht dabei von folgender für sie charakteristischen Gedankenreihe aus:

Zwei unbestimmte Zahlen x und y seien durch eine Gleichung mit einander verbunden. Reducirt man diese Gleichung auf Null, so steht rechts die Null und auf der linken Seite steht ein Ausdruck, der ausser x und y noch gegebene Zahlen enthalten kann. Dieser Ausdruck werde abkürzend mit $f(x, y)$ bezeichnet; dann ist die Gleichung

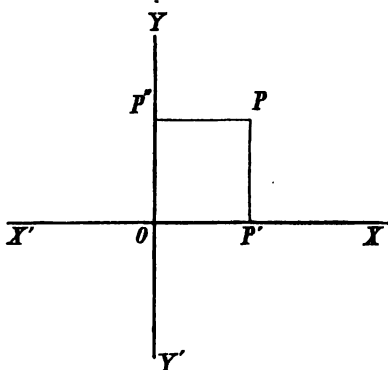
$$f(x, y) = 0.$$

Durch diese Gleichung sind x und y noch nicht bestimmt, aber es ist doch jede der beiden Grössen an die andere gebunden. Denn giebt man der Unbestimmten x einen bestimmten Werth x_0 , so ist nun y nicht mehr unbestimmt, sondern der zu x_0 gehörige Werth (bez. die zugehörigen Werthe) von y ergibt sich durch Auflösung der Gleichung

$$f(x_0, y) = 0$$

rücksichtlich der Unbekannten y . Diese Gleichung kann eine oder mehr als eine reale Wurzel haben; wir wollen jetzt der Einfachheit wegen annehmen, sie habe nur eine reale Wurzel y_0 . Diese beiden zusammengehörigen Werthe x_0, y_0 kann man geometrisch anschaulich machen.

Man nimmt zwei zu einander senkrechte Gerade OX und OY an, deren positive Richtungen OX und OY sein mögen, und trägt auf denselben, indem man eine beliebige Strecke als Maasseinheit zu Grunde legt, zwei Strecken OP' und OP'' auf, die die Längen x_0 und y_0 haben. Der Punkt, der OP' und OP'' zu Normalprojectionen auf OX und OY hat, veranschaulicht die beiden zusammengehörigen Werthe x_0 und y_0 .



(M. 346.)

In der Figur sind P' und P'' positiv angenommen. Ist OP'' positiv und OP' negativ, so liegt P in dem Winkel YOX' ; sind OP' und OP'' beide negativ, so liegt P im Winkel $X'OY'$; ist OP' positiv und OP'' negativ, so liegt P im Winkel $Y'OX$. Durch absoluten Werth und Vorzeichen von x und y ist also die Lage des Punktes P und umgekehrt, durch einen Punkt P der Ebene sind die Grössen $OP' = x$ und $OP'' = y$ eindeutig bestimmt.

Giebt man der Unbestimmten x andere Werthe, und lässt x alle realen Werthe von x_0 wachsend bis $+\infty$ und abnehmend bis $-\infty$ durchlaufen, so gehört zu jedem Werthe der Veränderlichen x gemäss der Gleichung $f(x, y) = 0$ ein bestimmter Werth von y . Diese Werthe von y sind im Allgemeinen von einander verschieden und es erscheint somit auch y als veränderliche Grösse, deren Werthe von den Werthen der Veränderlichen x abhängen.

Construirt man zu jedem Paare zusammengehörender Werthe x und y den zugehörigen Punkt P , so wird, während x die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, vom Punkte P eine bestimmte Linie beschrieben.

Die Abhängigkeit realer Werthe von x und y ist nun auf zweierlei Weise ausgedrückt: arithmetisch durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ und geometrisch durch die von P beschriebene Linie. Alle Sätze, welche durch algebraische Operationen für die Gleichung $f(x, y) = 0$ abgeleitet werden können, erscheinen nun zugleich als geometrische Sätze für die von P beschriebene Linie; und alle Sätze, welche sich durch geometrische Schlüsse für diese Linie ergeben, sind zugleich algebraische Sätze für die Gleichung $f(x, y) = 0$.

Die von P beschriebene Linie heisst die zur Gleichung $f(x, y) = 0$ gehörige Linie; die Strecken $x (= OP')$ und $y (= OP'')$ oder die parallelen und gleichen Strecken $P'P$ und $P''P$ heissen die Coordinaten des Punktes P , OX und OY heissen die Coordinatenachsen; insbesondere nennt man auch OP' die Abscisse, $P'P''$ die Ordinate von P , und demgemäss OX die Abscissenachse, OY die Ordinatenachse.

Alle Punkte, welche die Abscisse OP' haben, liegen auf der durch P' gehenden Parallelen zu OY ; alle Punkte, welche die Ordinaten OP'' haben, liegen auf der durch P'' gehenden Parallelen zu OX . Für alle Punkte der Ordinatenachse ist die Abscisse gleich Null; für alle Punkte der Abscissenachse ist die Ordinate gleich Null.

Der Schnittpunkt O der beiden Achsen heisst Coordinatenanfangspunkt oder Nullpunkt. Für den Nullpunkt ist $x = 0$ und $y = 0$.

2. Der methodische Gang in der analytischen Geometrie ist der, dass zunächst die Linien untersucht werden, in deren Gleichung $f(x, y) = 0$ die linke Seite eine algebraische rationale ganze Function ersten Grades für x und y ist; hierauf folgen die Curven, für welche $f(x, y)$ vom zweiten, dritten und vierten Grade ist. Für diese Linien ersten, zweiten, dritten und zum Theil auch für die des vierten Grades ist eine grosse Fülle ins Einzelne gehender Sätze durch algebraische Operationen aufgefunden worden; für die Curven des fünften Grades und höherer Grade giebt es eine Reihe wichtiger allgemeiner Sätze; die Untersuchung der Eigenschaften, welche Curven eines bestimmten Grades vor denen anderer Grade auszeichnen, wird mit dem wachsenden Grad der Gleichung schwieriger.

Für solche Curven, bei denen die Function $f(x, y)$ nicht mehr algebraisch für x und y , sondern transcendent ist, lehren die Differentialrechnung und

Integralrechnung eine Reihe von Eigenschaften analytisch abzuleiten. Diese Curven werden daher im gegenwärtigen Lehrgange unberücksichtigt bleiben und in besonderen Abschnitten der Differential- und der Integralrechnung behandelt werden.

Vor der Discussion der Curven ersten, zweiten etc. Grades erscheint es zweckmässig, die Grundbegriffe dadurch einzuüben, dass wir zu geometrisch definirten Curven die Gleichung aufsuchen und durch einfachste Operationen an diesen Gleichungen nahe liegende Eigenschaften der Curven ableiten; wir wählen dabei solche Beispiele, welche bereits aus der darstellenden Geometrie bekannt sind. An diese Entwicklungen wird sich dann zunächst eine sehr wichtige Erweiterung der Grundbegriffe anschliessen.

§ 2. Die Gerade.

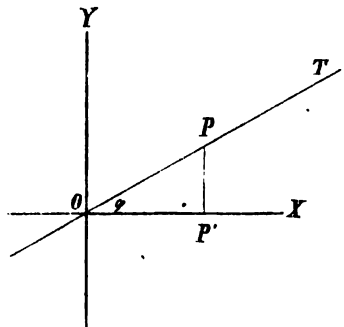
1. Für die Punkte, deren Abstände von der Abscissen- und der Ordinatenachse ein gegebenes Verhältniss m haben, gilt die Gleichung $P'P : OP' = m$, d. i.

$$y = mx, \text{ oder } mx - y = 0,$$

diese Punkte liegen auf einer Geraden T , die durch den Nullpunkt O geht, und für welche $\tan XOT = m$.

Die Gleichung $mx - y = 0$ ist daher die Gleichung einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden.

Ist m positiv, so haben $P'P$ und OP' dasselbe Zeichen, die Gerade geht daher durch den Winkel XOY und seinen Scheitelwinkel; ist m negativ, so haben $P'P$ und OP' ungleiche Zeichen, und die Gerade geht durch die beiden andern von den Achsen begrenzten Winkel.



(M. 347.)

2. Für die beiden Geraden T_1 und T_2 , deren Gleichungen sind

$$y = mx \text{ und } y = -mx$$

ist $\tan XOT_1 = m = -\tan XOT_2$, folglich $XOT_1 = 180^\circ - XOT_2$. Diese beiden Geraden liegen daher symmetrisch zu den Achsen.

Bilden zwei durch O gehende Gerade T_1 und T_2 rechte Winkel, so ist $XOT_2 = XOT_1 + 90^\circ$, mithin

$$\tan XOT_2 = -\cot XOT_1 = -1 : \tan XOT_1.$$

Ist $y = mx$ die Gleichung von T_1 , so ist daher die von T_2

$$y = -\frac{1}{m}x.$$

Die beiden durch den Nullpunkt gehenden Geraden

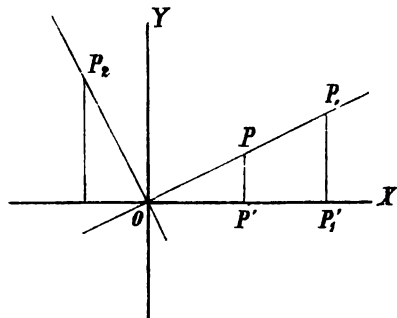
$$y = mx, \quad y = nx$$

stehen also auf einander senkrecht, wenn $mn = -1$.

Für jeden Punkt der Geraden, welche O mit dem Punkte P_1 verbindet, ist $OP' : P'P = OP'_1 : P'_1P_1$, oder, wenn x_1, y_1 die Coordinaten von P_1 sind,

$$x : y = x_1 : y_1; \text{ also ist}$$

$$y_1x - x_1y = 0$$



(M. 348.)

die Gleichung der Geraden T_1 , welche durch den Nullpunkt und den Punkt P_1 geht.

Die Gerade T_2 , welche durch O und den Punkt P_2 geht, dessen Coordinaten x_2 und y_2 sind, hat die Gleichung

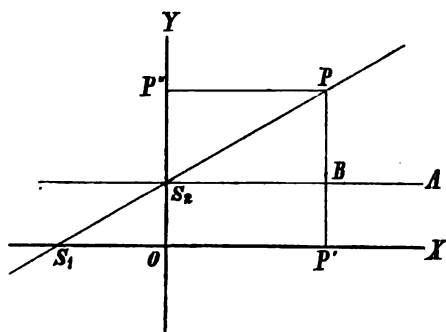
$$y_2 x - x_2 y = 0.$$

Schreibt man beide Gleichungen in der Form

$$y = \frac{y_1}{x_1} x, \quad y = \frac{y_2}{x_2} x,$$

so sieht man: Die Geraden, welche die Punkte P_1 und P_2 mit O verbinden, stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1, \text{ d. i.: wenn } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$



(M. 849.)

3. Für die Punkte, deren Abstand von einer Parallelen $S_2 A$ zur X -Achse zum Abstande von der Y -Achse ein gegebenes Verhältniss m hat, ist $BP : S_2 B = m$. Nun ist aber $BP = P'P - P'B = P'P - OS_2 = y - b$, wenn die Strecke OS_2 mit b bezeichnet wird; ferner ist $S_2 B = OP' = x$; also hat man die Gleichung

$$(y - b) : x = m, \text{ d. i.}$$

$$y = mx + b, \text{ oder } mx - y + b = 0.$$

Die Punkte P der bezeichneten Art liegen aber auf einer Geraden, die durch S_2 geht und mit der X -Achse einen Winkel einschliesst, dessen trigonometrische Tangente gleich dem Verhältniss $BP : S_2 B$, also gleich m ist. Wir haben daher:

Die Geraden T , welche von der Ordinatenachse das Stück $OS_2 = b$ abschneiden und für welche $\tan g(X, T) = m$ ist, hat die Gleichung:

$$y = mx + b, \text{ oder } mx - y + b = 0.$$

Die Strecke OS_1 ist die Abscisse desjenigen Punktes der Geraden, dessen Ordinate $= 0$ ist; die Werthe $x = OS_1$ und $y = 0$ genügen also der Gleichung der Geraden; man hat daher

$$0 = m \cdot OS_1 + b, \text{ also: } OS_1 = -b : m.$$

Bezeichnet man OS_1 mit a , so folgt $m = -b : a$, und daher die Gleichung der Geraden T :

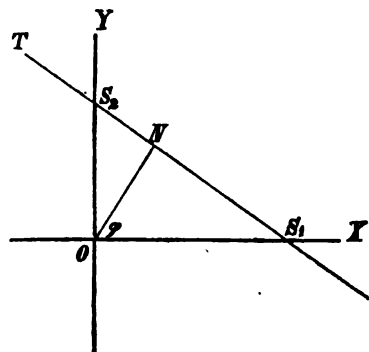
$$-\frac{b}{a} x - y + b = 0,$$

oder nach Division aller Glieder durch $(-b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung der Geraden, welche von den Achsen die Strecken $OS_1 = a$ und $OS_2 = b$ abschneidet.

4. Wir legen durch O eine Gerade v normal zu T und verfügen über den positiven Sinn von T und v so, dass $Tv = 90^\circ$. Ist N der Schnittpunkt von T und v , so haben wir



(M. 850.)

$$OS_1 = ON : \sin TX, \quad OS_2 = ON : \sin TY.$$

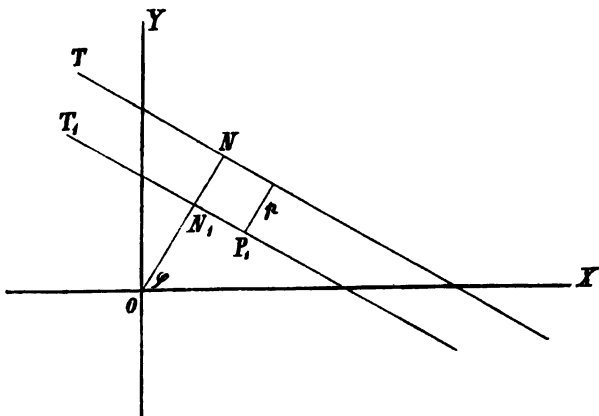
Nun ist $TX = T_v - X_v$, $TY = T_v - Y_v$, mithin $\sin TX = \cos X_v$, $\sin TY = \cos v Y = \cos (XY - X_v) = \sin X_v$. Bezeichnen wir ON , den Abstand der Geraden vom Ursprunge, mit d , und X_v mit φ , so ist $OS_1 = a = d : \cos \varphi$, $OS_2 = b = d : \sin \varphi$.

Setzt man dies in die Gleichung der Geraden ein, und multiplicirt alle Glieder mit d , so erhält die Gleichung der Geraden die Form

$$\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y - d = 0.$$

Man nennt dies die Normalform der Gleichung der Geraden.

5. Um den Abstand p eines Punktes P_1 von einer Geraden T aus den Coordinaten x_1, y_1 des Punktes und der Gleichung $\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y - d = 0$ der Geraden zu erhalten, legen wir durch P_1 eine Gerade T_1 parallel zu T . Der Abstand der Geraden T_1 und T ist dem absoluten Werthe nach dem Abstände p gleich. Um rücksichtlich der Vorzeichen alle Zweideutigkeiten zu vermeiden, wollen wir festsetzen, dass bei parallelen Geraden die positiven Richtungen stets übereinstimmend (nicht entgegengesetzt) sein sollen. Ist ferner N_1 der



(M. 351.)

Fusspunkt des von O auf T_1 gefällten Lothes, und $ON_1 = d_1$, so ist die Gleichung der Geraden T_1 :

$$\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y - d_1 = 0.$$

Da nun die Gerade T_1 durch P_1 geht, so genügen die Coordinaten von P_1 der Gleichung von T_1 , es ist also $\cos \varphi \cdot x_1 + \sin \varphi \cdot y_1 - d_1 = 0$, woraus folgt:

$$d_1 = \cos \varphi \cdot x_1 + \sin \varphi \cdot y_1.$$

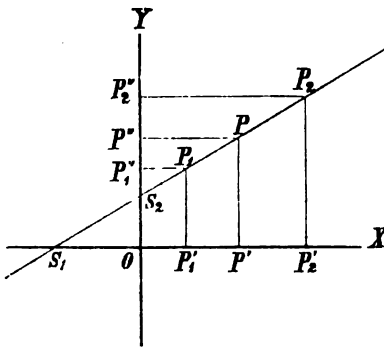
Ist A der Fusspunkt des von P_1 auf T gefällten Lothes, und definiren wir den Abstand p_1 des Punktes P_1 von der Geraden T als die Strecke P_1A (nicht als AP_1), so haben wir

$$p_1 = P_1A = N_1N = ON - ON_1, \text{ folglich} \\ -p_1 = \cos \varphi \cdot x_1 + \sin \varphi \cdot y_1 - d.$$

Hieraus ergibt sich: Ist φ der Winkel, den die X -Achse mit der Normalen einer Geraden T bildet, und d der Abstand dieser Geraden vom Nullpunkte, sind ferner x, y die Coordinaten eines Punktes P , so ist das Trinom $\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y - d$ dem Abstände des Punktes P von der Geraden T entgegengesetzt gleich; das Verschwinden des Trinoms, d. i. die Gleichung

$$\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y - d = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass P von T einen verschwindenden Abstand hat, d. i. dass P auf T liegt.



(M. 352.)

6. Aus den Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 zweier Punkte P_1 und P_2 lassen sich die Coordinaten jedes Punktes P der Geraden P_1P_2 bestimmen. Ist nämlich $n_2:n_1$ das Verhältniss, in welchem die Strecke P_1P_2 durch den Punkt P getheilt wird, ist also $P_1P:PP_2 = n_2:n_1$ (wobei ein positives Theilverhältniss den Punkten zwischen P_1 und P_2 , ein negatives den übrigen Punkten der Geraden P_1P_2 zukommt), so hat man

$$S_1P_1':S_1P':S_1P_2' = S_1P_1:S_1P:S_1P_2,$$

folglich

$$S_1P' - S_1P_1':S_1P_2' - S_1P' = S_1P - S_1P_1:S_1P_2 - S_1P.$$

Nun ist aber $S_1P' - S_1P_1' = P_1'P' = OP' - OP_1' = x - x_1,$

$$S_1P_2' - S_1P' = P'P_2' = OP_2' - OP' = x_2 - x,$$

$$S_1P - S_1P_1:S_1P_2 - S_1P = P_1P:PP_2 = n_2:n_1,$$

folglich: $(x - x_1):(x_2 - x) = n_2:n_1,$

woraus folgt

$$x = \frac{n_1x_1 + n_2x_2}{n_1 + n_2}.$$

In gleicher Weise findet sich durch Benutzung der Vertikalspur S_2 :

$$y = \frac{n_1y_1 + n_2y_2}{n_1 + n_2}.$$

Für den Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 ist $n_1 = n_2$; die Coordinaten des Mittelpunktes von P_1P_2 sind also

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

7. Die Entfernung d zweier Punkte P und Π lässt sich aus den Coordinaten xy und $\xi\eta$ derselben berechnen. Ist φ der Winkel der X -Achse mit der Geraden $P\Pi$, so ist

$$P'\Pi'^2 = P\Pi^2 \cos^2 \varphi, \quad P''\Pi''^2 = P\Pi^2 \sin^2 \varphi,$$

mithin durch Addition $P'\Pi'^2 + P''\Pi''^2 = P\Pi^2$.

Nun ist $P'\Pi' = \xi - x, \quad P''\Pi'' = \eta - y, \quad P\Pi = d,$
also ist $d^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$.

8. Als eine Anwendung der gewonnenen Anschauungen suchen wir den Ort der Punkte auf, die von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gleiche Abstände haben.

Die Quadrate der Abstände eines Punktes P von P_1 und P_2 sind

$$d_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2, \quad d_2^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2.$$

Nun soll $d_1^2 = d_2^2$ sein; also hat man für x und y die Gleichung

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2, \text{ oder entwickelt}$$

$$x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2 = x_2^2 - 2x_2x + x^2 + y_2^2 - 2y_2y + y^2,$$

woraus sich ergibt

$$1. \quad 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y - (x_2^2 - x_1^2) - (y_2^2 - y_1^2) = 0.$$

Dividirt man alle Glieder durch $(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2)$, und setzt

$$(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2):2(x_2 - x_1) = a$$

und

$$(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2):2(y_2 - y_1) = b.$$

so ergibt sich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$$

der gesuchte Ort ist daher eine Gerade, welche von den Achsen die Strecken a und b abschneidet.

Die Gleichung 1. wird identisch, wenn man für x und y die Werthe $(x_1 + x_2) : 2$ und $(y_1 + y_2) : 2$ setzt; der Punkt, der diese Werthe zu Coordinaten hat, der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 , liegt also auf der Geraden.

§ 3. Ellipse, Hyperbel, Parabel.

1. Wir suchen die Gleichung des Ortes der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine constante Summe $2a$ haben.

Nehmen wir die Gerade, auf der die gegebenen Punkte F_1 und F_2 liegen, zur X -Achse, und den Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 zum Nullpunkt und setzen $F_2F_1 = 2c$, so ist

$$F_1P' = OP' - OF_1 = x - c,$$

$$F_2P' = F_2O + OP' = c + x,$$

$$\text{mithin } F_1P^2 = (x - c)^2 - y^2,$$

$$F_2P^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Da nun $F_1P + F_2P = 2a$ sein soll, so folgt die Gleichung:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Quadriren wir, nachdem $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ auf die rechte Seite gestellt worden ist, so folgt

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

Hieraus folgt, indem man $x^2 + c^2 + y^2$ von beiden Seiten subtrahirt und den Rest durch 4 theilt:

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Quadrirt man nochmals, so entsteht:

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

woraus hervorgeht:

$$1. \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Die Curve führt den Namen Ellipse. Die Punkte A , in welchen die Ellipse die X -Achse schneidet, haben $x = OA$, $y = 0$. Setzt man dies in 1. ein, so folgt

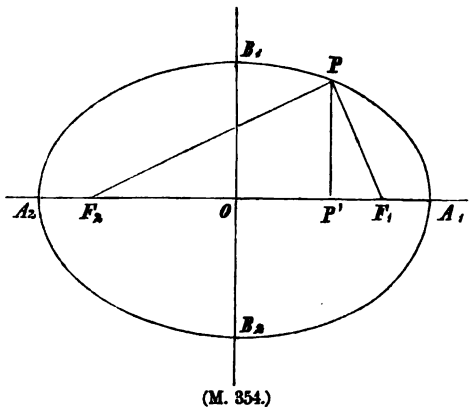
$$(a^2 - c^2)OA^2 = a^2(a^2 - c^2), \quad OA^2 = a^2, \quad OA = \pm a.$$

Die Ellipse schneidet also die Abscissenachse in zwei Punkten A_1 und A_2 , welche symmetrisch zum Nullpunkte liegen und von einander den Abstand $2a$ haben.

Um den Schnitt B der Ellipse mit der Ordinatenachse zu erhalten, setzen wir $x = 0$, $y = OB$ in die Gleichung 1. und erhalten

$$a^2 \cdot OB^2 = a^2(a^2 - c^2), \quad OB^2 = a^2 - c^2.$$

Die Ellipse schneidet somit die Ordinatenachse in zwei symmetrisch zum Nullpunkte gelegenen Punkten B_1 und B_2 , deren Abstände vom Nullpunkte gleich $\sqrt{a^2 - c^2}$ sind.



Bezeichnet man die positive Wurzel aus $a^2 - c^2$ mit b , so kann man nach Division durch $a^2 b^2$ aus 1. die Gleichung der Ellipse in der Gestalt erhalten

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Man sieht leicht, dass dieser Gleichung durch reale Werthe von x und y nur genügt werden kann, wenn $y^2 \leq b^2$, und $x^2 \leq a^2$. Die Ellipse ist also zwischen den beiden Parallelen zur Y -Achse enthalten, die von ihr die Abstände $\pm a$ haben und zwischen den Parallelen zur Y -Achse, die von ihr um $\pm b$ entfernt sind.

Die Punkte F_1 und F_2 heissen die Brennpunkte, die Strecke c die Excentricität, die Strecken $2a$ und $2b$ die grosse und die kleine Achse der Ellipse.

Der Werth von y , der zu einem gegebenen Werthe von x gehört, folgt aus der Gleichung 2. zu

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

diese Formel giebt zwei entgegengesetzt gleiche Werthe für y . Der Werth von x , der zu einem gegebenen Werthe von y gehört, ergibt sich zu

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2};$$

diese Formel liefert zwei entgegen gesetzt gleiche Werthe für x .

Aus diesen beiden Bemerkungen folgt: Die Ellipse ist doppelt symmetrisch; die grosse und die kleine Achse sind Symmetrieachsen.

2. Ist P ein Punkt der Ellipse, so kann man immer $x = a \cos \varphi$ setzen, da für alle Ellipsenpunkte $x < a$ ist. Setzt man dies in die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ein, so folgt $y = b \sin \varphi$.

Hieraus ergibt sich folgende einfache Construction der Ellipse: Man construirt um

O Kreise mit den Radien a und b , zieht durch O eine Gerade OR , und macht $QP \parallel OA_1$, $RP \parallel OB_1$. Dann ist $OP' = a \cos \varphi$ und $P'P = Q'Q = b \sin \varphi$, mithin P ein Punkt der Ellipse, welche OA_1 und OB_1 zu Halbachsen hat.

3. Bewegt sich eine Strecke AB von unveränderlicher Länge so, dass ihre Enden auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten, so beschreibt jeder Punkt P der Strecke eine Curve, deren Gleichung sich leicht ergibt.

Setzt man $AP = b$, $PB = a$, so hat man zunächst

$$1. \quad AO^2 + OB^2 = AB^2.$$

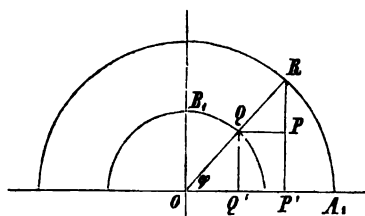
$$\text{Nun ist} \quad AO : OP' = AB : BP,$$

$$OB : OP'' = AB : AP.$$

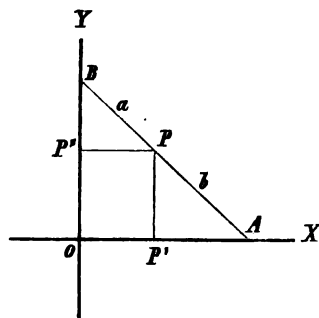
Ersetzt man hier AP , PB , OP' , OP'' durch b , a , x , y , so erhält man

$$AO^2 = AB^2 \cdot \frac{x^2}{a^2}, \quad OB^2 = AB^2 \cdot \frac{y^2}{b^2},$$

und dies in 1. eingesetzt führt zu



(M. 355.)



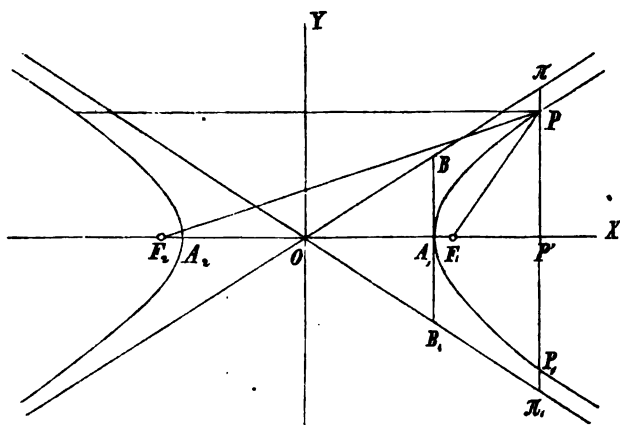
(M. 356.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Der Punkt P beschreibt also eine Ellipse mit den Halbachsen a und b .

Man erhält hieraus folgende mechanische Construction der Ellipse: Auf ein Stück durchsichtiges (Oel-) Papier trage man auf einer Geraden die Strecken AP gleich der halben kleinen und PB gleich der halben grossen Achse einer zu entwerfenden Ellipse ab; die Enden A und B markirt man am besten durch kurze scharfe quer durch AB geführte Striche. Hierauf legt man A und B auf die Schenkel eines gezeichneten rechten Winkels und sticht mit einer Copirnadell den Punkt P durch. Durch geeignete Wiederholung findet man soviel Punkte der Ellipse, als man nöthig hat.

4. Um die Gleichung des Orts der Punkte zu finden, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 , eine gegebene Differenz $2a$ haben, nehmen wir die Gerade F_1F_2 zur Abscissenachse, die Senkrechthalbirende derselben zur Ordinatenachse; bleibt die Bezeichnung so wie im vorigen Abschnitte, so hat man die Gleichung



(M. 357.)

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a.$$

Hieraus folgt

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x-c^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$,
und nach Subtraction von $x^2 + c^2 + y^2$ und nachheriger Division durch $4a$:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

und hieraus: $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$;
woraus hervorgeht:

$$1. \quad (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0.$$

Es ergibt sich ganz wie im vorigen Abschnitte, dass die Curve von der Abscissenachse Strecken OA_1 und OA_2 abschneidet, die gleich $\pm a$ sind.

Setzt man zur Abkürzung b für die positive Wurzel aus $c^2 - a^2$, und dividirt man die Gleichung 1. durch a^2b^2 , so erhält man

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Diese Curve heisst Hyperbel. Die Gleichung 2. lehrt, dass reale Werthe von y nur dann der Gleichung entsprechen, wenn $x^2 \geq a^2$; zwischen den beiden Geraden, welche im Abstände $\pm a$ parallel zur Ordinatenachse gezogen sind, liegt also kein Punkt der Hyperbel. Ist $x = \pm a$, so folgt $y = 0$. Wächst x , so wächst auch der zugehörige Werth von y , und wird x unendlich gross, so wird auch y unendlich gross.

Berechnet man aus 2. x und y , so folgen die Formeln

$$3. \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}.$$

Zu jedem gegebenen Werthe von x , bez. y , ergeben sich also zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von y , bez. von x . Hieraus folgt, dass die Hyperbel doppelt symmetrisch ist.

Die Punkte F_1, F_2 und die Strecke OF_1 heissen wie bei der Ellipse die Brennpunkte und die Excentricität; die Strecke A_2A_1 heisst die Hauptachse, die Gerade OY heisst Nebenachse. Die Haupt- und die Nebenachse der Hyperbel sind also Symmetrieachsen derselben.

5. Das Verhältniss der Ordinate eines Hyperbelpunktes zur Abscisse ist nach 3.

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Wird nun x unendlich gross, so erreicht das Verhältniss die beiden Grenzwerte $\pm(b:a)$; sie entsprechen den beiden zu derselben Abscisse gehörigen Hyperbelpunkten.

Zieht man im Scheitel A_1 der Hyperbel eine Parallele zur Nebenachse und macht auf derselben $B_1A_1 = A_1B = b$, und sind η und η_1 die Ordinaten der Punkte Π und Π_1 der Geraden OB , bez. OB_1 , welche zur Abscisse x gehören, so ist $\eta = \frac{b}{a}x$, $\eta_1 = -\frac{b}{a}x$. Sind P und P_1 die zu x gehörigen Hyperbelpunkte, so ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad y_1 = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird. Mithin hat man

$$P\Pi = P'\Pi - P'P = \frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

und $\Pi_1P_1 = \Pi_1P' - P_1P' = -P'\Pi_1 + P'P_1 = -\eta_1 + y_1 = \eta - y = P\Pi$.

Wird in der Gleichung

$$P\Pi = P_1\Pi_1 = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a}$$

sowol der Zähler als der Nenner des rechts stehenden Bruches mit $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ multiplicirt, so entsteht

$$P\Pi = P_1\Pi_1 = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}};$$

bei unendlich wachsenden x wird der Nenner unendlich gross, während der Zähler constant bleibt, mithin nähert sich der Quotient und ebenso $P\Pi = P_1\Pi_1$ der Grenze Null, also fallen die zu einer unendlich grossen Abscisse gehörigen Hyperbelpunkte P und P_1 mit den zugehörigen Punkten Π und Π_1 zusammen. Jede der Geraden OB und OB_1 trifft somit die Hyperbel in zwei (in entgegengesetzten Richtungen liegenden) unendlich fernen Punkten.

Aus diesem Grunde nennt man die Geraden OB und OB_1 Asymptoten der Hyperbel. Die Asymptoten der Hyperbel sind also die beiden durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, deren mit der Hauptachse gebildete Winkel die trigonometrische Tangente $\pm b:a$ haben.

6. Die Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kann man auch schreiben:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1, \text{ woraus folgt}$$

$$1. \quad \left(\frac{b}{a}x - y\right) \left(\frac{b}{a}x + y\right) = b^2.$$

Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{b}{a}x - y = \eta - y = P\Pi;$$

und ferner $\frac{b}{a}x + y = \eta + y = -\eta_1 + y = \Pi_1 P' + P'P = \Pi_1 P.$

Dies in 1. eingeführt ergibt

$$\Pi_1 P \cdot P\Pi = \Pi_1 P_1 \cdot P_1 \Pi = b^2.$$

Daher der Satz: Jede zur Hauptachse der Hyperbel normale zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke wird von der Hyperbel so getheilt, dass das Produkt der Theile constant ist.

Auf gleiche Weise findet man: Jede zur Hauptachse der Hyperbel parallele zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke wird von der Hyperbel aussen so getheilt, dass das Produkt der Theile constant gleich dem Quadrate der halben Hauptachse ist.

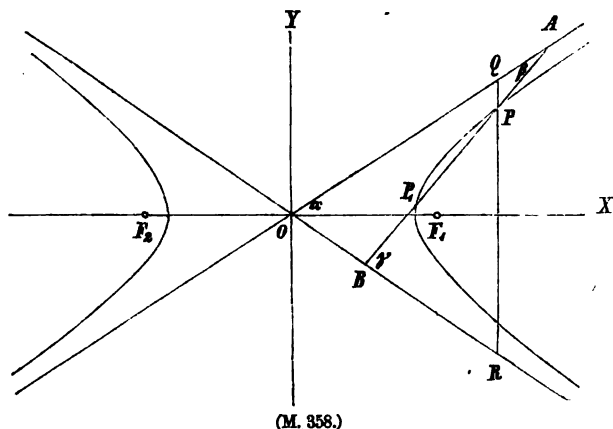
Zieht man zwischen den Asymptoten durch den Hyperbelpunkt P die Gerade AB in gegebener Richtung, so ist

$$QP : PA = \sin \beta : \cos \alpha$$

$$RP : PB = \sin \gamma : \cos \alpha,$$

$$\text{also } RP \cdot PQ : BP \cdot PA = \sin \beta \sin \gamma : \cos^2 \alpha.$$

Da nun $RP \cdot PQ = b^2$, so folgt:



(M. 358.)

$$BP \cdot PA = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \cdot b^2.$$

Das Produkt $RP \cdot PQ$ hängt also nur von der Richtung der Geraden AB ab; der obige Satz gilt daher nicht bloss von den zu einer Achse parallelen, sondern von parallelen zwischen den Asymptoten enthaltenen Strecken überhaupt, wobei für jede anders gerichtete Schaar von Parallelen das Produkt $AP \cdot PB$ im Allgemeinen einen andern Werth hat.

Sind P und P_1 die Punkte, in denen eine zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke von der Hyperbel geschnitten wird, so ist $BP \cdot PA = BP_1 \cdot P_1 A$. Hieraus folgt $BP_1 = PA$, und $P_1 A = BP$. Jede zwischen den Asymptoten enthaltene Strecke wird also von der Hyperbel in drei Theile zerlegt, von denen die an den Asymptoten anliegenden einander gleich sind.

Dieser Satz lehrt eine leichte Construction von Hyperbelpunkten, wenn die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel bekannt sind.

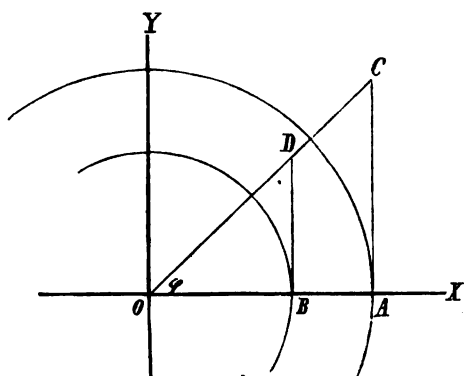
7. Wie bei der Ellipse, so können auch die Coordinaten jedes Hyperbelpunktes mit Hülfe der Strecken a und b und von Functionen eines Hülfswinkels φ ausgedrückt werden. Denn setzt man

$$x = a \sec \varphi, \quad y = b \tan \varphi,$$

so genügen x und y der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

sind also die Coordinaten eines Punktes dieser Hyperbel.



(M. 359.)

Hieraus folgt eine einfache Construction der Coordinaten von Hyperbelpunkten mit Hülfe zweier Kreise, die um O mit den Radien a und b construirt werden. Zieht man an diese Kreise Tangenten normal zur Hauptachse, legt durch O einen Strahl, der mit der Hauptachse den Winkel φ bildet, und sind C und D die Schnittpunkte dieses Strahles mit den beiden Tangenten, sowie A und B die Schnittpunkte der letzteren mit der Hauptachse, so ist

$$OC = a \sec \varphi, \quad BD = b \tan \varphi,$$

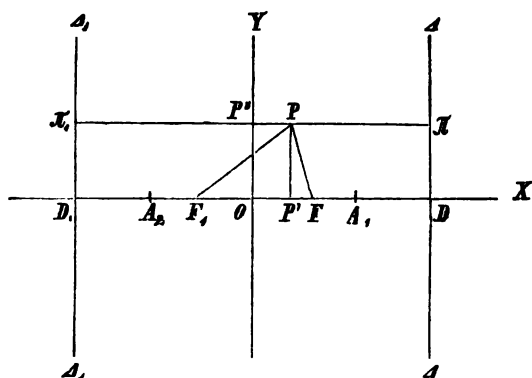
also sind OC und BD Abscisse und Ordinate eines Hyperbelpunktes.

8. Wir suchen nun die Gleichung des Ortes der Punkte auf, deren Abstand von einem festen Punkte zum Abstände von einer festen Geraden ein gegebenes Verhältniss ε hat; wir setzen dies Verhältniss zuerst kleiner, dann grösser und schliesslich gleich der Einheit voraus.

Zunächst ist ersichtlich, dass die Curve in allen drei Fällen gegen die Gerade symmetrisch ist, die normal zu der gegebenen Geraden durch den gegebenen Punkt geht.

Wir wählen daher diese Gerade zur Abscissenachse.

Der gegebene Punkt F wird Brennpunkt, die gegebene Gerade $\Delta\Delta$ Directrix genannt. FD sei normal zur Directrix.



(M. 360.)

Ist P ein Punkt unserer Curve, Π seine Normalprojection auf die Directrix, so ist also $FP : P\Pi = \varepsilon$. Zwei Punkte der Curve liegen auf der Symmetrieachse; ist $\varepsilon < 1$, so liegt innerhalb DF , der andere A_2 in dem an F liegenden unbegrenzten Theile der Achse, und es ist

$$FA_1 : A_1D = A_2F : A_2D = \varepsilon,$$

mithin

$$A_1D = \frac{1}{1 + \varepsilon} d, \quad A_2D = \frac{1}{1 - \varepsilon} \cdot d.$$

Um für den Fall vorgesehen zu sein, dass die Curve noch eine zweite Symmetrieachse normal zur ersten besitzt, wählen wir den Mittelpunkt O der Strecke A_1A_2 zum Nullpunkt und haben daher:

$$OD = \frac{1}{2}(A_1D + A_2D) = \frac{1}{1-\varepsilon^2}d,$$

$$OA_1 = A_2O = \frac{1}{2}(A_2D - A_1D) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}d;$$

ferner ist

$$FA_1 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}d, \quad A_2F = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}d,$$

$$OF = OD - FD = \left(\frac{1}{1-\varepsilon^2} - 1\right)d = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}d,$$

und

$$P\Pi = OD - OP' = \frac{1}{1-\varepsilon^2}d - x,$$

$$FP^2 = PF^2 + P'P^2 = (OF - OP')^2 + P'P^2 = \left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}d - x\right)^2 + y^2;$$

setzen wir diese Werthe in $FP:P\Pi = \varepsilon$ ein, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}d - x\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{1-\varepsilon^2}d - x\right)^2,$$

$$\text{oder: } \frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}d^2 - \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}dx + x^2 + y^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}d^2 - \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}dx + \varepsilon^2x^2;$$

$$\text{hieraus folgt: } (1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}d^2 = 0.$$

Durch Division mit $\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}d^2$ bringt man diese Gleichung auf die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

wobei a und b die Werthe haben

$$a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}d = OA_1; \quad b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}d = \sqrt{a^2 - OF^2}.$$

Unsere Curve ist daher eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ; der Punkt F ist ein Brennpunkt derselben.

Aus den bekannten Symmetrieverhältnissen der Ellipse folgt, dass es noch eine zweite Directrix giebt, die parallel zu OY im Abstände $D_1O = OD$ liegt. Ist F_1 der zweite Brennpunkt der Ellipse, und Π_1 die Normalprojection von P auf die zweite Directrix, so ist auch $F_1P:\Pi_1P = \varepsilon$.

Die Abstände OD , FD , A_1D , A_2D lassen sich durch die Strecken a , b , $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ausdrücken; denn da

$$a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}d, \quad b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}d, \quad c = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}d,$$

$$\text{so hat man} \quad OD = \frac{1}{1-\varepsilon^2}d = \frac{a^2}{c}; \quad FD = d = \frac{b^2}{c};$$

$$A_1D = OD - OA_1 = \frac{a(a-c)}{c}; \quad A_2D = A_2O + OD = \frac{a(a+c)}{c}.$$

Aus $FP = \varepsilon \cdot \Pi_1P$ und $F_1P = \varepsilon \cdot P\Pi$ folgt durch Addition $FP + F_1P = \varepsilon \cdot (\Pi_1P + P\Pi) = \varepsilon \cdot \Pi_1\Pi = 2\varepsilon \cdot OD = 2a$, also die Eigenschaft der Ellipse, durch welche wir sie in No. 1 charakterisirt haben.

9. Der Ort der Punkte, für welche $FP:\Pi P = \varepsilon$, $\varepsilon > 1$, hat mit der Geraden DF zwei Punkte A_1 , A_2 gemein, für welche

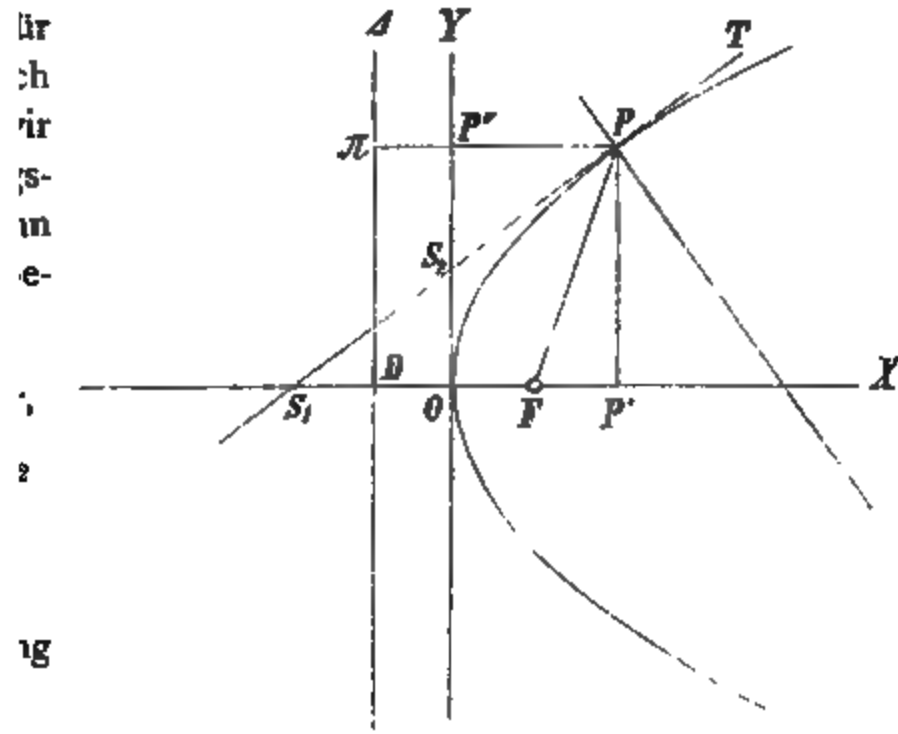
$$A_1F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}d, \quad A_2F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}d.$$

Daher ist

$$OF = \frac{1}{2}(A_2F + A_1F) = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}d,$$

$$= a - \frac{a^2}{c} = \frac{a(a-c)}{c}, \quad D_1 A_1 = \frac{a(a+c)}{c},$$

für
ch
ir
s-
in
e-



(M. 962.)

$$z + x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2.$$

$\frac{2}{1} + x^2$ auf beiden Seiten folgt:

$$y^2 = 2px.$$

el genannt; die Strecke ρ heisst der Parameter.
ymmetrieachse, die X -Achse unseres Koordinaten-

ich fernen Punkt der X -Achse, so ist für denselben aber sagen, dass die Parabel mit der Symmetrie-
e der Parabel« bezeichnet wird) ausser dem Scheitel
Punkt gemein hat.

len Figuren 9 und 12 statt der Strecken OP' die man sich also die Ordinatenachse durch A_1 statt in den Gleichungen der Ellipse und Hyperbel

$$-OP^2, \text{ bez. } y = \frac{b}{a} \sqrt{OP^2 - a^2}$$

$$OP^i = a + x,$$

$$\overline{ax - x^2} \text{ bez. } y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax + x^2}.$$

Es hier die Ordinatenachse durch einen Scheitel
zeichnen wir diese Gleichungen als die Scheitel-
Hyperbel.

Brennpunktes vom Scheitel gleich einer gegebenen
 Ellipse $a - c = q$, $c = a - q$, also $b = \sqrt{a^2 - c^2}$
 Hyperbel $c - a = q$, $c = q + a$, also $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
 diese Werthe für b in die Scheitelgleichungen ein,

$$= \sqrt{2q - \frac{q^2}{a}} \cdot \sqrt{2x - \frac{x^2}{a}}$$

für die Hyperbel: $y = \sqrt{2q + \frac{q^2}{a}} \cdot \sqrt{2x + \frac{x^2}{a}}.$

Wächst nun a über alle Grenzen, so nähern sich die Brüche $q^2 : a$ und $x^2 : a$ der Grenze Null, und die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel gehen über in die Gleichung $y = \sqrt{4qx}$, oder $y^2 = 4qx$.

Dies ist aber die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $p = 2q$. Hieraus gewinnen wir die werthvolle Anschauung:

Die Parabel kann als eine Ellipse oder als eine Hyperbel angesehen werden, deren Hauptachse unendlich gross wird, während der Abstand des Scheitels vom nächst gelegenen Brennpunkte einen gegebenen Werth q behält.

13. Wir untersuchen nun die Lage einer Geraden gegen eine Parabel, Ellipse und Hyperbel.

Bezeichnen wir die Reciproken der Achsenabschnitte einer Geraden T mit u und v , setzen also

$$\frac{1}{a} = u, \quad \frac{1}{b} = v,$$

so ist die Gleichung der Geraden T

$$ux + vy - 1 = 0.$$

Die Werthe von x und y , welche den Gleichungen

$$1. \quad ux + vy - 1 = 0,$$

$$2. \quad y^2 = 2px$$

zugleich genügen, sind Coordinaten von Punkten, welche sowol auf der Geraden T als auf der Parabel $y^2 = 2px$ liegen, sind also die Coordinaten des Schnittpunktes bez. der Schnittpunkte der Geraden und der Parabel.

Um dieselben zu erhalten, substituiren wir den aus 1. folgenden Werth $ux = 1 - vy$ in die Gleichung 2. und erhalten:

$$y^2 = 2\frac{p}{u} - 2\frac{pv}{u} \cdot y,$$

$$3. \quad y^2 + 2\frac{pv}{u}y - 2\frac{p}{u} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Wurzeln:

$$y' = \frac{1}{u}(-pv + \sqrt{2pu + p^2v^2}),$$

$$4. \quad y'' = \frac{1}{u}(-pv - \sqrt{2pu + p^2v^2}),$$

die Wurzel positiv gerechnet.

Die zugehörigen Werthe von x folgen aus 1. zu

$$x' = \frac{1}{u^2}(u + pv^2 - v\sqrt{2pu + p^2v^2}),$$

$$5. \quad x'' = \frac{1}{u^2}(u + pv^2 + v\sqrt{2pu + p^2v^2}).$$

Eine Gerade hat daher mit der Parabel zwei, einen oder keinen (realen) Punkt gemein, je nachdem

$$2u + pv^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0.$$

14. Aus der Gleichung 3. oder aus den Lösungen 4. folgt

$$6. \quad \frac{1}{2}(y' + y'') = -p \cdot \frac{v}{u}.$$

Die Strecke $\frac{1}{2}(y' + y'')$ ist die Ordinate der Mitte der Strecke zwischen den Punkten P' und P'' , in denen die Gerade die Parabel schneidet. Nach der Formel 6. ist diese Strecke nur abhängig von dem Verhältniss $v:u$, ist also unveränderlich für alle Gerade, welche dasselbe Verhältniss $v:u$ haben; da dieses Verhältniss gleich dem Verhältniss der Achsenabschnitte $a:b$ ist, so folgt, dass diese Geraden parallel sind. Für parallele Sehnen liegt also die Mitte in gleichem Abstände von der Abscissenachse, oder:

Die Mitten paralleler Parabelsehnen liegen auf einer zur Achse parallelen Geraden.

14. Ist $2u + pv^2$ positiv, so schneidet die Gerade die Parabel in zwei Punkten P' und P'' . Ändert man nun die Lage der Geraden so, dass $2pu + p^2v^2$ kleiner wird, so nehmen die absoluten Werthe der Unterschiede der Abscissen $x' - x''$ und der Ordinaten $y' - y''$ ab, es nimmt also auch der Abstand $P'P''$ ab, da $P'P'' = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$, die Punkte P' und P'' rücken also näher an einander.

Wenn $2pu + p^2v^2$ verschwindet, so wird auch der Abstand $P'P''$ verschwindend klein, und die Gerade schneidet die Parabel in zwei unendlich nahe benachbarten Punkten.

Eine Gerade, die eine Curve in zwei unendlich nahen Punkten schneidet, heisst Tangente der Curve. Die Bedingung dafür, dass die Gerade T die Parabel berührt, ist also

$$1. \quad 2u + pv^2 = 0.$$

Die Coordinaten des Berührungspunktes ergeben sich nun aus den Formeln No. 13, 4. und 5. zu

$$2. \quad x' = \frac{u + pv^2}{u^2}, \quad y' = -\frac{pv}{u}.$$

Aus diesen Formeln kann man u und v berechnen, und findet zunächst

$$x' = \frac{1}{u} + \frac{pv^2}{u^2} = \frac{1}{u} + \frac{y'^2}{p}.$$

Da nun P' auf der Parabel liegt, so ist $y'^2 = 2px'$, mithin

$$3. \quad x' = \frac{1}{u} + 2x', \quad \frac{1}{u} = -x'.$$

Da $1:u$ der Abschnitt der Tangente auf der X -Achse ist, so folgt: Jede Parabeltangente schneidet von der X -Achse eine Strecke ab, die der Abscisse ihres Berührungspunktes entgegengesetzt gleich ist.

Ferner folgt $y' = -pv:u = pvx'$, oder da $px' = \frac{1}{2}y'^2$:

$$4. \quad \frac{1}{v} = \frac{y'}{2}.$$

Die Strecke, welche eine Parabeltangente auf der Ordinatenachse abschneidet, ist gleich der halben Ordinate des Berührungspunktes.

Um im Punkte P (Fig. 362) eine Tangente an die Parabel zu construiren, mache man also $S_1O = OP'$, dann ist S_1P die gesuchte Tangente.

Da $DO = OF$ und $OS_2 = S_2P''$, so schneiden sich ΠF und S_1P in S_2 , und es ist $FS_2 = S_2\Pi$. Da nun $FP\Pi$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist, so folgt der Satz:

Tangente und Normale der Parabel halbiren die Winkel des Radius vector und einer Parallelen zur Parabelachse — wenn wir als Normale die Gerade bezeichnen, die normal zur Tangente durch den Be-

rührungspunkt gezogen wird, und mit Radius vector die Strecke, die den Brennpunkt mit einem Parabel- (bez. Ellipsen-, Hyperbel-)punkte verbindet.

Die Gleichung der Parabeltangente im Punkte P' erhält man, wenn man die gefundenen Werthe für u und v in die Gleichung der Geraden $ux + vy - 1 = 0$ einführt, zunächst in der Form

$$-\frac{x}{x'} + \frac{2y}{y'} - 1 = 0.$$

Hierfür kann man setzen

$$-\frac{2px}{y'^2} + \frac{2y}{y'} - \frac{2px'}{y'^2} = 0;$$

nach Multiplication mit $\frac{1}{2}y'^2$ ergibt sich die Gleichung der Tangente zu:

$$p(x + x') - y'y = 0.$$

15. Die Coordinaten der Punkte, welche eine Gerade T und eine Ellipse gemein haben, sind die Werthe von x und y , welche die Gleichungen

1. der Geraden: $ux + vy - 1 = 0$

2. und der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

zugleich befriedigen. Aus der Gleichung 1. folgt

3. $y = \frac{1}{v} - \frac{u}{v}x.$

Dies in 2. eingesetzt, ergibt

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{b^2v^2}\right)x^2 - \frac{2u}{b^2v^2}x + \frac{1}{b^2v^2} - 1 = 0,$$

und nach Multiplication mit $a^2b^2v^2 : (a^2u^2 + b^2v^2)$

4. $x^2 - 2\frac{a^2u}{a^2u^2 + b^2v^2}x + \frac{a^2(1 - b^2v^2)}{a^2u^2 + b^2v^2} = 0.$

In gleicher Weise ergibt sich für y die quadratische Gleichung

5. $y^2 - 2\frac{b^2v}{a^2u^2 + b^2v^2}y + \frac{b^2(1 - a^2u^2)}{a^2u^2 + b^2v^2} = 0.$

Sind x', x'' die Wurzeln von 4., sowie y', y'' die von 5., so gehört nach Gleichung 1. zu jeder der beiden Wurzeln x', x'' eine bestimmte Wurzel von 5.; die zusammengehörigen Werthe mögen x' und y' , x'' und y'' sein.

Die Gleichungen 4. und 5. lehren: Eine Gerade hat mit einer Ellipse nicht mehr als zwei Punkte gemein.

Sind P' und P'' die zu den Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$ gehörenden Punkte, so ist nach 4. und 5.

$$\frac{1}{2}(x' + x'') = \frac{a^2u}{a^2u^2 + b^2v^2}, \quad \frac{1}{2}(y' + y'') = \frac{b^2v}{a^2u^2 + b^2v^2}.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind die Coordinaten ξ, η der Mitte von $P'P''$; man hat also

$$\xi = \frac{a^2u}{a^2u^2 + b^2v^2}, \quad \eta = \frac{b^2v}{a^2u^2 + b^2v^2},$$

woraus folgt:

6. $\frac{\eta}{\xi} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{v}{u}.$

Für alle Ellipsensehnen, welche dasselbe Verhältniss $v:u$ haben, haben also auch die Coordinaten der Sehnenmitte ein constantes Verhältniss, d. i.:

Die Mitten paralleler Sehnen einer Ellipse liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt O der Symmetrieachsen geht.

Hieraus folgt noch, dass alle Ellipsensehnen, die durch O gehen, in O

halbirt werden. Man bezeichnet daher O als das Centrum der Ellipse, und die durch O gehenden Sehnen als Diameter.

Ist Δ der zur Geraden T parallele Diameter, und ist für T das Verhältniss $v : u$ gleich dem gegebenen Werthe γ , so ist für jeden Punkt von Δ

$$P'P : OP' = OS_2 : S_1O =$$

$$\frac{1}{v} : -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\gamma}.$$

Die Gleichung von Δ ist daher

$$y : x = -1 : \gamma, \text{ oder}$$

$$7. \quad x + \gamma y = 0.$$

Die Gleichung des Diameter Δ' , auf dem die Mitten der zu T parallelen Sehnen liegen, ist nach 6. $y : x = b^2 \gamma : a^2$, oder

$$8. \quad x - \frac{a^2}{b^2 \gamma} \cdot y = 0.$$

Für die Ellipsensehnen, welche parallel dem Diameter Δ' sind, liegen daher die Mitten auf dem Diameter

$$x - \frac{a^2}{b^2 \left(-\frac{a^2}{b^2 \gamma} \right)} \cdot y = 0, \text{ d. i. } x + \gamma y = 0,$$

mithin auf dem Diameter Δ .

Enthält also Δ' die Mitten der Sehnen, welche parallel Δ sind, so enthält Δ die Mitten der zu Δ' parallelen Sehnen. Die Beziehung der beiden Diameter Δ und Δ' ist daher reciprok. Zwei solche Diameter heissen conjugirte Diameter der Ellipse.

Setzt man $\gamma = 0$, so wird die Gleichung des Diameter Δ zu $x = 0$, Δ fällt also jetzt mit der Y -Achse zusammen.

Die Gleichung des conjugirten Diameter

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2}{b^2 \gamma}$$

wird jetzt zu $x : y = \infty$, also zu $y = 0$, Δ' wird identisch mit der X -Achse. Die Achsen der Ellipse sind daher conjugirte Diameter.

16. Die Coordinaten der Endpunkte eines Diameter, der die Gleichung $x - \gamma y = 0$ hat, bestimmen sich aus dieser Gleichung und aus der Ellipsengleichung. Man erhält

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 \gamma^2}{a^2 + b^2 \gamma^2}; \quad y^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 \gamma^2}.$$

Das Quadrat der Länge des halben Diameter folgt hieraus zu

$$1. \quad r^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \gamma^2)}{a^2 + b^2 \gamma^2}.$$

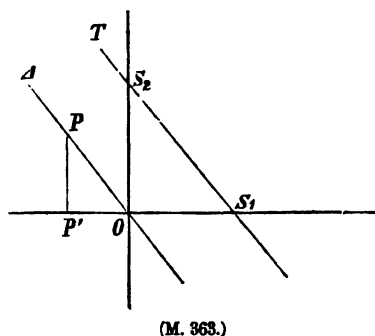
Der conjugirte Diameter habe die Gleichung $x - \gamma' y = 0$. Dann gilt für ihn

$$r'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \gamma'^2)}{a^2 + b^2 \gamma'^2}.$$

Nun ist aber $\gamma' = -a^2 : b^2 \gamma$, mithin

$$1 + \gamma'^2 = \frac{b^4 \gamma^2 + a^4}{b^4 \gamma^2}, \quad a^2 + b^2 \gamma'^2 = \frac{a^2}{b^2 \gamma^2} (a^2 + b^2 \gamma^2); \text{ daher ist}$$

$$2. \quad r'^2 = \frac{a^4 + b^4 \gamma^2}{a^2 + b^2 \gamma^2}.$$



(M. 363.)

Durch Addition der Formeln 1. und 2. folgt

$$r^2 + r'^2 = \frac{1}{a^2 + b^2 \gamma^2} (a^2 b^2 + a^2 b^2 \gamma^2 + a^4 + b^4 \gamma^2) = a^2 + b^2.$$

Also: Die Summe der Quadrate zweier conjugirten Radien der Ellipse ist constant.

Sind φ und φ_1 die Winkel der X -Achse mit Δ und Δ_1 , so ist

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= -\gamma, & \tan \varphi' &= \frac{a^2}{b^2 \gamma}, \text{ mithin} \\ \sin \varphi &= \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, & \cos \varphi &= -\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \\ \sin \varphi' &= \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4 \gamma^2}}, & \cos \varphi' &= \frac{b^2 \gamma}{\sqrt{a^4 + b^4 \gamma^2}}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Winkel der beiden conjugirten Diameter Δ und Δ' mit ω , so ist $\omega = \varphi' - \varphi$, mithin

$$3. \quad \sin \omega = \frac{b^2 \gamma^2 + a^2}{\sqrt{1 + \gamma^2} \cdot \sqrt{a^4 + b^4 \gamma^2}}.$$

Nun ist nach 1. und 2.

$$4. \quad r r' = \frac{a b \sqrt{1 + \gamma^2} \cdot \sqrt{a^4 + b^4 \gamma^2}}{a^2 + b^2 \gamma^2}.$$

Folglich, nach Multiplication von 3. und 4.

$$5. \quad r r' \sin \omega = a b.$$

Die beiden Ellipsentangenten an den Endpunkten eines Diameter können (in Uebereinstimmung mit den Formeln des nächsten Abschnittes), als verschwindend kleine vom Diameter halbirte Sehnen betrachtet werden, sind also dem conjugirten Diameter parallel. Die vier Tangenten, welche in den Endpunkten zweier conjugirter Diameter Δ und Δ' construirt sind, bilden daher ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm, dessen Seiten paarweis den conjugirten Diametern parallel und gleich sind.

Wir haben nun nach 5. den Satz:

Die einer Ellipse in den Enden je zweier conjugirten Diameter umschriebenen Parallelogramme haben constante Fläche, sind nämlich gleich dem Rechteck der beiden Achsen der Ellipse.

17. Wir lösen nun die quadratischen Gleichungen No. 15, 4. und 5. auf und erhalten für die Coordinaten der Schnittpunkte P' und P'' nach einfachen Reductionen:

$$\begin{aligned} x' \text{ und } x'' &= \frac{1}{a^2 u^2 + b^2 v^2} (a^2 u \pm a b v \sqrt{a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1}) \\ y' \text{ und } y'' &= \frac{1}{a^2 u^2 + b^2 v^2} (b^2 v \mp a b u \sqrt{a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1}) \end{aligned}$$

wobei die oberen und die unteren Zeichen in beiden Zeilen zusammengehören.

Diese Formeln lehren: Eine Gerade hat mit der Ellipse zwei getrennte reale Punkte, oder nur einen Punkt, oder keinen realen Punkt gemein, je nachdem $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1$ positiv, gleich Null, oder negativ ist.

18. Aendert man die Lage einer Geraden T , welche die Ellipse schneidet, so, dass $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 \equiv R$ immer kleiner wird und dem Grenzwerthe Null sich nähert, so nähern sich auch die Differenzen

$$x' - x'' = \frac{2 a b v}{a^2 u^2 + b^2 v^2} \sqrt{R}, \quad y' - y'' = -\frac{2 a b u}{a^2 u^2 + b^2 v^2} \sqrt{R}$$

$$\overline{-x'^2 + (y'' - y')^2} \text{ der Grenze Null. Ist}$$

gente der Ellipse. Die Coordinaten des Be-
der Gleichung 1. aus den Formeln von No. 17:

$$\frac{1}{b^2 v^2}, \quad y' = \frac{b^2 v}{a^2 u^2 + b^2 v^2}.$$

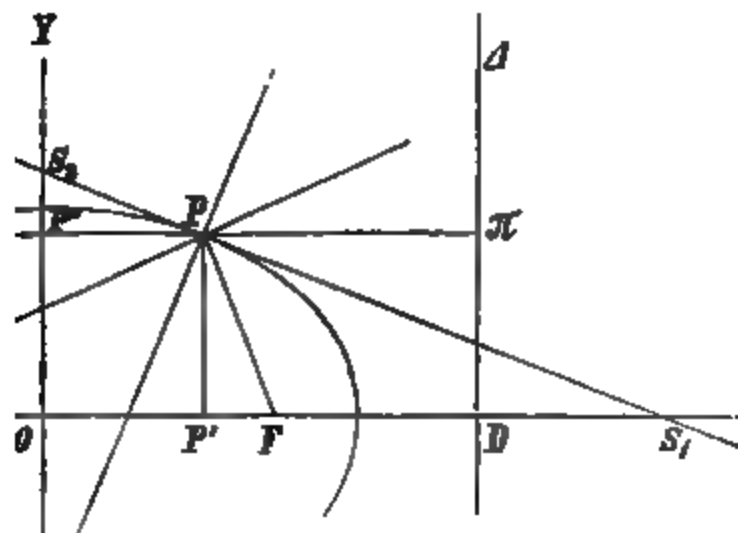
nfacher

$$x' = a^2 u, \quad y' = b^2 v.$$

$$u = \frac{x'}{a^2}, \quad v = \frac{y'}{b^2};$$

$l=0$ ergibt sich die Gleichung der Geraden P' berührt:

$$+\frac{y'y}{\delta^2}-1=0.$$



(ML 364.)

tangente auf den Achsen, so ist $OS_1 = 1 : u$

$$\frac{x'}{x'}, \quad F_1 S_1 = F_1 O + OS_1 = \frac{a_2 + ex'}{x'}.$$

Directricen sind:

$$-OP' = z \left(\frac{a^2}{c} - x' \right) = \frac{z(a^2 - cx')}{c}$$

$$+ OP') = e \left(\frac{a^2}{c} + x' \right) = \frac{e(a^2 + cx')}{c}.$$

$$F_1 S_1 = FP : F_1 P.$$

e Spitze eines Dreiecks (F_1PF) geht und die ss der an der Spitze liegenden Seiten theilt, Spitze. Berücksichtigen wir dazu noch, dass zwei Geraden gebildeten Winkel normal sind,

...e, die zu einer Ellipse in einem Punkte
...lbiren die Winkel der Geraden, welche
...sten verbinden.

ittpunkte einer Geraden T mit einer Hyperbel

$$n \quad ux + vy - 1 = 0,$$

2. und der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Substituirt man den für y bez. x aus 1. folgenden Werth in 2., so erhält man für die Coordinaten der Schnittpunkte die quadratischen Gleichungen:

$$3. \quad x^2 - 2 \cdot \frac{a^2 u}{a^2 u^2 - b^2 v^2} x + \frac{a^2 (1 + b^2 v^2)}{a^2 u^2 - b^2 v^2} = 0,$$

$$4. \quad y^2 + 2 \cdot \frac{b^2 v}{a^2 u^2 - b^2 v^2} y - \frac{b^2 (1 - a^2 u^2)}{a^2 u^2 - b^2 v^2} = 0.$$

Zu jeder der beider Wurzeln x' und x'' der 3. Gleichung gehört gemäss der Gleichung 1. eine bestimmte Wurzel y' bez. y'' der Gleichung 4. Man sieht daher: Eine Gerade und eine Hyperbel haben nicht mehr als zwei Punkte gemein.

Die Coordinaten ξ, η der Mitte der auf T liegenden Hyperbelsehne sind

$$\xi = \frac{1}{2}(x' + x'') \quad \eta = \frac{1}{2}(y' + y''),$$

mithin nach 3. und 4.

$$5. \quad \xi = \frac{a^2 u}{a^2 u^2 - b^2 v^2}, \quad \eta = -\frac{b^2 v}{a^2 u^2 - b^2 v^2}; \text{ daher ist}$$

$$6. \quad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{v}{u}.$$

Parallele Hyperbelsehnen haben dasselbe Verhältniss $v : u$, also ihre Mitten dasselbe Verhältniss $\eta : \xi$. Daher der Satz:

Die Mitten paralleler Hyperbelsehnen liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der Symmetrieachsen geht.

Hieraus folgt weiter, dass jede durch den Punkt O gehende Hyperbelsehne in O halbt wird. Man bezeichnet daher O als Centrum, und jede durch O gehende Gerade als Diameter der Hyperbel.

Ist für eine Schaar paralleler Hyperbelsehnen $v : u = \gamma$, so ist die Gleichung des zur Schaar gehörenden (mit den Sehnen der Schaar parallelen) Diameter Δ nach No. 15, 7.

$$7. \quad x + \gamma y = 0.$$

Die Gleichung des Diameter Δ_1 , der die Mitten der Sehnen dieser Schaar enthält, ist nach 6.

$$8. \quad x + \frac{a^2}{b^2 \gamma} y = 0.$$

Der Diameter, auf dem die Mitten der zu Δ_1 parallelen Sehnen liegen, ist nach 7. und 8.

$$x + \frac{a^2}{b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2 \gamma}} \cdot y = 0, \text{ d. i. } x + \gamma y = 0,$$

es ist dies der Diameter Δ .

Enthält also ein Diameter Δ' die Mitten der zum Diameter Δ parallelen Sehnen, so enthält auch Δ die Mitten der zu Δ' parallelen Sehnen. Die Beziehung zweier solcher Diameter ist daher reciprok. Man bezeichnet zwei solche Diameter, deren jeder die Mitten der zum andern parallelen Sehnen enthält, als conjugirte Diameter der Hyperbel.

Lässt man Δ der Reihe nach mit den X -Achsen und den beiden Asymptoten zusammenfallen, so erhält γ die Werthe $0, a : b, -a : b$, also wird die Gleichung des conjugirten Diameter

$$y = 0 \text{ bez. } x + \frac{a}{b} y = 0, \text{ bez. } x - \frac{a}{b} y = 0,$$

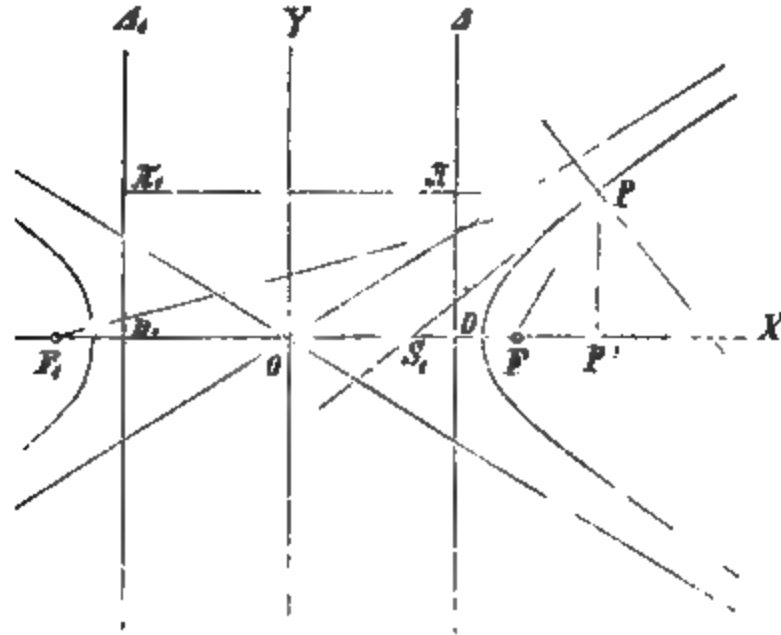
und man sieht daher:

Hyperbel sind conjugirt; jede Asymptoten 3. und 4. des vorigen Abschnittes

$$(a^2u \pm abv\sqrt{1-a^2u^2+b^2v^2})$$

$$(-b^2v \mp abu\sqrt{1-a^2u^2+b^2v^2}).$$

t einer Hyperbel zwei reale Punkte, gleichen Punkt gemein, je nachdem Null, oder positiv ist.



(M. 365.)

dem gegebenen Punkte P berührt, ergibt enden Werthe von u und v in die Gleichung

$$\frac{y'y}{b^2} - 1 = 0.$$

im Punkte P , so ist

$$1 = \frac{1}{u} = \frac{a^2}{x'}.$$

$$OS_1 = c + \frac{a^2}{x'} = \frac{cx' + a^2}{x'}.$$

$$OS_1 = c - \frac{a^2}{x'} = \frac{cx' - a^2}{x'}.$$

$$OP' = e \left(\frac{a^2}{c} + x' \right) = e \cdot \frac{cx' + a^2}{c}$$

$$OD = e \left(x' - \frac{a^2}{c} \right) = e \cdot \frac{cx' - a^2}{c}.$$

$S_1 : S_1F$; dies lehrt den Satz: Die Tangente an eine Hyperbel in einem Punkte derselben ist die Mittellinie zwischen dem Punkte und dem Brennpunkte.

die, bei welcher $b = a$ ist, mit einem

besonderen Namen ausgezeichnet; sie heisst gleichseitig. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf die Symmetrieachsen ist:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel bilden mit der Hauptachse Winkel, deren trigonometrische Tangente gleich der Einheit ist; hieraus folgt, dass sie miteinander rechte Winkel bilden.

Die Gleichung des zu der Geraden $\Delta = x + \gamma y = 0$ conjugirten Durchmessers ist (No. 19) bei der gleichseitigen Hyperbel

$$\Delta' = -\gamma x + y = 0.$$

Hieraus sieht man, dass der Winkel der Geraden Δ mit der X -Achse gleich dem Winkel der Geraden Δ' mit der Y -Achse ist, und daher folgt weiter: Die vier Winkel je zweier conjugirten Diameter einer gleichseitigen Hyperbel werden von den Asymptoten halbirt.

23. Polarcoordinaten. Die Lage eines Punktes in der Ebene kann man statt durch seine Projectionen auf die Coordinatenachsen auch durch die Strecke OP (Fig. 347) und durch den Winkel bestimmen, den die Gerade OX mit der Geraden OP einschliesst. Die Strecke OP wird in diesem Sinne als Radius vector, r , der Winkel als Anomalie, φ , des Punktes P bezeichnet.

Man hat den Begriff »Coordinaten eines Punktes« dahin ausgedehnt, dass man darunter überhaupt solche Data versteht, welche die Lage eines Punktes, zunächst in der Ebene, bestimmen.

Die bisher gebrauchten Coordinaten OP' und OP'' nennt man dann insbesondere Orthogonal-Coordinaten, oder nach dem Erfinder der Coordinaten-Geometrie DES CARTES (1596—1650) Cartesische Coordinaten.

Die Coordinaten r und φ führen den Namen Polarcoordinaten. Aus den Formeln $OP' = OP \cos \varphi$, $OP'' = OP \sin \varphi$ folgen für den Zusammenhang von orthogonalen und Polarcoordinaten die Formeln

$$1. \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$2. \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}.$$

Den Punkt O bezeichnet man als Pol der Polarcoordinaten, die Gerade OX , von welcher aus die Anomalien gezählt werden, als Nulllinie (der Anomalien).

Die Formeln 1. und 2. lehren also die Beziehungen der orthogonalen und Polarcoordinaten für den Fall, dass der Pol und die Nulllinie mit dem Ursprung und der Abscissenachse der orthogonalen Coordinaten zusammenfallen.

24. Aus der Gleichung einer Curve in Orthogonalcoordinaten erhält man die Gleichung in Polarcoordinaten, welche den Nullpunkt zum Pol und die X -Achse zur Nulllinie haben, indem man in der Gleichung der Curve die Coordinaten x und y durch die Werthe $r \cos \varphi$, $r \sin \varphi$ ersetzt.

Man erhält so die Polargleichung der Ellipse und Hyperbel für das Centrum als Pol und die Hauptachse als Nulllinie:

$$1. \quad \text{Ellipsengleichung:} \quad r^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) - 1 = 0,$$

$$2. \quad \text{Hyperbelgleichung:} \quad r^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) - 1 = 0.$$

Hieraus folgt

$$= \frac{-a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

$$= \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}.$$

n Pol und die Hauptachse zur Nulllinie
ichst gelegenen Scheitel der Ellipse bez.
e Ellipse (Fig. 364):

$$r - FP' = e \left(\frac{b^2}{c} - r \cos \varphi \right).$$

er Ellipse für dieses System:

$$\frac{e b^2}{-e \cos \varphi}.$$

Fig. 365:

$$r - FP' = e \left(\frac{b^2}{c} - r \cos \varphi \right)$$

Hyperbel:

$$\frac{e b^2}{-e \cos \varphi}.$$

s 3. und 4. $r = e b^2 : c$. Diese Strecke,
 e , nennt man den Parameter derselben

eiben

$$\frac{p}{+e \cos \varphi}.$$

g. 362:

$$-FP' = p - r \cos \varphi, \text{ also}$$

$$\frac{p}{- \cos \varphi}.$$

$$\frac{p}{+e \cos \varphi}$$

se, Hyperbel oder Parabel, je nach-
ich der Einheit ist; der Pol des
punkt der Curve und die Nulllinie
der positiven Seite dem nächsten
der Parabel noch den unendlich fernen
sen kann).

ncoordinaten.

Veränderlichen haben wir dadurch eine
dass wir die beiden Veränderlichen als
1 und die Gesamtheit aller der Punkte
eichung genügen.

zwischen zwei Veränderlichen auch auf
bedeutsam machen.

e Gerade durch zwei Data bestimmt.
ihre Abschnitte OS_1 und OS_2 auf den
isammenhänge mit den gegebenen Ent-

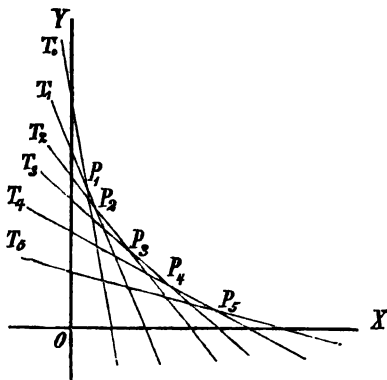
wicklungen durch die mit u und v bezeichneten reciproken Werthe der Längenzahlen dieser Strecken bestimmt, so kann man zwei durch eine Gleichung verbundene Veränderliche auch als diese Bestimmungsstücke einer Geraden denken.

So wie man die Bestimmungsstücke eines Punktes als die Coordinaten des Punktes bezeichnet, so nennt man die Grössen u und v Coordinaten der Geraden, oder kurzweg Liniencoordinaten.

Liegt nun eine Gleichung

$$f(u, v) = 0$$

vor und giebt man darin der Veränderlichen u eine Reihe auf einander folgender Werthe $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$, und bestimmt die gemäss der Gleichung $f(u, v) = 0$



(M. 366.)

zugehörigen Werthe $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$, so bilden die Geraden $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$, welche $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, \dots$ zu Coordinaten haben, in dieser Aufeinanderfolge einen gewissen polygonalen Zug $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$, dessen Eckpunkte die Schnittpunkte zweier auf einander folgenden Geraden der Reihe $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ sind.

Denkt man sich nun die Unterschiede $u_1 - u_0, u_2 - u_1, u_3 - u_2, \dots$ immer kleiner, so werden auch die zugehörigen v_0, v_1, v_2, \dots immer dichter auf einander folgen, und die Anzahl der Geraden T , die

auf ein gewisses Intervall der Coordinaten kommen, wird immer grösser. Geht man zur Grenze über und lässt u stetig wachsen, so ändert sich (im Allgemeinen) auch v stetig, die Gerade T ändert ihre Lage stetig; die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ haben verschwindend kleine Abstände von einander und bilden daher eine Curve, während die Geraden T , deren jede zwei auf einander folgende Punkte der Curve verbindet, Tangenten dieser Curve werden.

Die Geraden, deren Coordinaten u, v einer Gleichung $f(u, v) = 0$ genügen, umhüllen (d. i. berühren) eine Curve.

Die Gleichung $f(u, v) = 0$ bezeichnet man als die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten.

Die Gerade, deren Coordinaten $u = 0$ und $v = 0$, ist unendlich fern; für die Abscissenachse ist $v = \infty$; für die Ordinatenachse $u = \infty$; für alle übrigen durch den Ursprung gehenden Geraden ist $u = \infty, v = \infty$, doch kann man diese Geraden noch insofern von einander durch ihre Coordinaten unterscheiden, als das Verhältniss $v : u$ eine für jede dieser Geraden eindeutig bestimmte Zahl ist.

2. Die Gleichung $ux + vy - 1 = 0$ sagt aus, dass der Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, auf der Geraden liegt, die die Coordinaten u, v hat. Diese Gleichung enthält vier unbestimmte Grössen u, v, x, y . Bisher dachten wir uns die beiden Grössen u, v gegeben; dann blieben x und y als Unbestimmte übrig und die Gleichung war die Bedingung dafür, dass der veränderliche Punkt (x, y) auf der Geraden (u, v) liegt, d. i. die Formel $ux + vy - 1 = 0$, war die Gleichung der Geraden (u, v) . Denken wir uns jetzt für x und y gegebene Werthe ξ und η , dagegen u und v als unbestimmt, und schreiben die Gleichung

$$\xi u + \eta v - 1 = 0,$$

so erscheint sie als die Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten der unend-

lich vielen Geraden T erfüllen müssen, die durch den gegebenen Punkt gehen. Die Gleichung $\xi u + \eta v - 1 = 0$ ist daher die Gleichung des Punktes ξ, η in Liniencoordinaten.

Die Gleichung $\alpha u - 1 = 0$ wird von allen Geraden erfüllt, für $u = 1 : \alpha$, während v , das in der Gleichung nicht vorkommt, unbestimmt bleibt; sie ist also die Gleichung des Punktes S_1 der Abscissenachse, für welchen $OS_1 = \alpha$; ebenso ist ersichtlich, dass $\beta v - 1 = 0$ die Gleichung eines Punktes der Ordinatenachse ist, und zwar des Punktes S_2 , für welchen $OS_2 = \beta$.

Die Gleichung $\alpha u + \beta v = 0$ sagt aus, dass das Verhältniss $v : u$ den gegebenen Werth $-\alpha : \beta$ hat. Alle Geraden, deren Coordinaten ein gegebenes Verhältniss haben, sind parallel. Man kann von ihnen sagen, dass sie durch einen und denselben unendlich fernen Punkt gehen, der durch die Richtung einer Geraden bestimmt ist, auf der er liegt.

Die Gleichung $\alpha u + \beta v = 0$ ist also die Gleichung eines in bestimmter Richtung liegenden unendlich fernen Punktes.

3. In § 3, No. 18 und 21 haben wir die Gleichungen $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$, und $a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0$ als Bedingungen für die Coordinaten einer Geraden gefunden, welche eine Ellipse, bez. Hyperbel berührt. Wir können dies nun so ausdrücken:

Die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel in Liniencoordinaten, bezogen auf die Symmetrieachsen als Coordinatenachsen, sind:

1. für die Ellipse: $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$,
2. für die Hyperbel: $a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0$.

Ebenso folgt aus § 3, 14 die Gleichung der Parabel in Liniencoordinaten, bezogen auf die Symmetrieachse und die Scheiteltangente als Coordinatenachsen:

3. $2u + pv^2 = 0$.

4. Wir haben aus der Gleichung einer Geraden T und aus der Gleichung einer Ellipse in Punktkoordinaten die Coordinaten der Punkte bestimmt, welche die Gerade und die Ellipse gemein haben. Für Untersuchungen in Liniencoordinaten haben wir die analoge Aufgabe: Aus der Gleichung eines Punktes P

1. $\xi u + \eta v - 1 = 0$

und der Gleichung einer Ellipse in Liniencoordinaten

2. $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$

die Coordinaten der Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt P gehen und die Ellipse berühren.

Diese Coordinaten genügen den Gleichungen 1. und 2., sind also die Wurzeln dieser beiden Gleichungen.

Aus der ersten entnehmen wir $v = (1 - \xi u) : \eta$, $u = (1 - \eta v) : \xi$, substituieren dies in 2. und erhalten nach einfachen Reductionen quadratische Gleichungen für u und v :

$$u^2 - 2 \frac{b^2 \xi}{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} \cdot u - \frac{\eta^2 - b^2}{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} = 0,$$

$$v^2 - 2 \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} \cdot v - \frac{\xi^2 - a^2}{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} = 0.$$

Die Gleichungen ergeben die Lösungen

3. $u' \text{ und } u'' = \frac{1}{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} \left(b^2 \xi \pm ab \eta \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1} \right)$

nebst den der Reihe nach zugehörigen

$$4. \quad v' \text{ und } v'' = \frac{1}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2} \left(a^2\eta \mp ab\xi \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1} \right).$$

Durch einen Punkt P gehen also zwei, eine oder keine (reale) Tangente an eine Ellipse, je nachdem

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \gtrless 0.$$

Die Bedingung $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$ sagt aus, dass der Punkt P auf der Ellipse liegt und bestätigt so den Satz, dass sich durch einen auf der Ellipse liegenden Punkt nur eine Tangente an die Ellipse legen lässt.

Mit Rücksicht auf $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$, oder $b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2$ ergeben sich aus 3. und 4. die Coordinaten der im Punkte P die Ellipse berührenden Tangente zu

$$u' = \xi : a^2, \quad v' = \eta : b^2.$$

Die Coordinaten des Punktes, in welchem die Gerade $u' v'$ die Ellipse berührt, sind daher $\xi = a^2 u'$, $\eta = b^2 v'$ in Uebereinstimmung mit § 3, 18.

Die Gleichung des Ellipsenpunktes, der auf der Tangente $u' v'$ liegt, ergibt sich durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Punktes $\xi u + \eta v - 1 = 0$ zu

$$a^2 u' u + b^2 v' v - 1 = 0.$$

5. Die Coordinaten der Tangenten, die sich von einem Punkte, dessen Gleichung

$$1. \quad \xi u + \eta v - 1 = 0$$

ist, an die Hyperbel legen lassen, die in Liniencoordinaten die Gleichung hat:

$$2. \quad a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0$$

sind die Wurzeln der Gleichungen 1. und 2., bestimmen sich daher aus den Gleichungen, die sich durch Elimination von v und u aus 1. und 2. ergeben:

$$3. \quad u^2 - 2 \frac{b^2 \xi}{b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2} u + \frac{\eta^2 + b^2}{b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2} = 0$$

$$4. \quad v^2 + 2 \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2} v + \frac{\xi^2 - a^2}{b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2} = 0$$

zu:

$$5. \quad u' \text{ und } u'' = \frac{1}{b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2} \left(b^2 \xi \pm ab \eta \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{a^2}} \right)$$

nebst den dazu gehörigen Werthen

$$6. \quad v' \text{ und } v'' = \frac{1}{b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2} \left(-a^2 \eta \mp ab \xi \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{a^2}} \right).$$

Durch einen Punkt lassen sich also zwei, oder eine, oder keine reale Tangente an eine Hyperbel legen, je nachdem

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \gtrless 0.$$

Ist $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$, so liegt der Punkt (ξ, η) auf der Hyperbel; durch einen Hyperbelpunkt lässt sich also nur eine Tangente an die Hyperbel legen.

Die Coordinaten dieser Tangente folgen aus 5. und 6. zu

$$u' = \xi : a^2, \quad v' = -\eta : b^2;$$

die Coordinaten des auf der Tangente $u' v'$ liegenden Hyperbelpunktes sind daher

$$\xi = a^2 u', \quad \eta = -b^2 v'.$$

ung des auf der Tangente $u' v'$ liegenden

$$u'u - b^2 v'v - 1 = 0.$$

ne, deren Coordinaten der Gleichung genügen in den quadratischen Gleichungen, in welche 3. t $b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2$ übergehen, das quadratische Glied; hung, deren quadratisches Glied verschwindend n Glieder ist, wird die eine Wurzel unendlich gross, bleibt und sich als Wurzel der Gleichung ersten egefall des quadratischen Gliedes noch übrig bleibt. $b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2 = 0$, haben das Coordinatenverhältniss 3, 5) auf den Asymptoten. Von einem Punkte t sich daher (ausser der Asymptote, deren haben) nur eine Tangente an die Hyperbel

angenten, welche sich von dem Punkte

$$\xi u + \eta v - 1 = 0$$

eren Gleichung in Liniencoordinaten ist

$$2. \quad 2u + p v^2 = 0,$$

ergeben sich als Wurzeln von 1. und 2., also aus den Gleichungen

$$3. \quad v^2 - 2 \frac{\eta}{p\xi} v + \frac{2}{p\xi} = 0,$$

$$4. \quad u^2 + 2 \frac{\eta^2 - p\xi}{p\xi^2} u + \frac{1}{\xi^2} = 0$$

zu:

$$5. \quad u' \text{ und } u'' = \frac{1}{p\xi^2} (-\eta^2 + p\xi \pm \eta \sqrt{\eta^2 - 2p\xi})$$

$$6. \quad v' \text{ und } v'' = \frac{1}{p\xi} (\eta^2 \mp \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}).$$

Von einem Punkte aus lassen sich also zwei, eine oder keine reale Tangente an die Parabel legen, je nachdem $\eta^2 - 2p\xi$ positiv, gleich Null, oder negativ ist.

Ist $\eta^2 - 2p\xi = 0$, so liegt der Punkt auf der Parabel. Die durch ihn gehende Tangente hat die Coordinaten

$$u' = \frac{p\xi - \eta^2}{p\xi^2} = -\frac{1}{\xi}, \quad v' = \frac{\eta}{p\xi} = \frac{2}{\eta} \quad (\S 3, 14).$$

Die Gleichung des auf der Tangente $u' v'$ liegenden Parabelpunktes ergibt sich hieraus zu

$$\frac{u}{u'} - \frac{2v}{v'} + 1 = 0.$$

§ 5. Die Gleichung ersten Grades in Punkt- und Liniencoordinaten.

1. Jede Gleichung ersten Grades in Punktcoordinaten ist die Gleichung einer Geraden.

Die allgemeine Gleichung ersten Grades ist

$$1. \quad Ax + By + C = 0.$$

Ist $C = 0$, so lautet die Gleichung

$$2. \quad Ax + By = 0,$$

sie sagt aus, dass $y:x = -A:B$, ist also die Gleichung einer durch den

Nullpunkt gehenden Geraden, deren Winkel mit der Abscissenachse sich aus der Gleichung bestimmt

$$\tan \varphi = -A:B.$$

Ist $A=0$ oder $B=0$, so geht die allgemeine Gleichung über in

$$3. \quad By + C = 0, \quad \text{bez.} \quad 4. \quad Ax + C = 0,$$

woraus folgt $y = -C:B, \quad x = -C:A.$

Die Gleichungen $By + C = 0$ bez. $Ax + C = 0$ sind also die Gleichungen einer Parallelen zur X -Achse, bez. zur Y -Achse, die von der Y -Achse, bez. der X -Achse, die Strecke $-C:B$, bez. $-C:A$ abschneidet.

Ist keiner der Coefficienten A, B, C gleich Null, so kann man die Gleichung durch $(-C)$ dividiren und erhält

$$5. \quad -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0.$$

Der Vergleich mit der Gleichung der Geraden, die die Achsenabschnitte a und b hat

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

lehrt, dass 5. die Gleichung einer Geraden ist, welche von den Achsen die Strecken abschneidet

$$a = -C:A, \quad b = -C:B.$$

2. Ist n der Coefficient, mit dem man die Gleichung einer Geraden T $Ax + By + C = 0$ multipliciren muss, um die Normalform (§ 2, 4) zu erhalten, so ist identisch

$$nAx + nBy + nC \equiv \cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y - d. \quad \text{?}$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$nA = \cos \varphi, \quad nB = \sin \varphi, \quad nC = -d,$$

aus welchen sich ergibt, indem man die ersten beiden Gleichungen quadriert und addirt:

$$n = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad d = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Für die Wurzel ist dabei das Vorzeichen so zu wählen, dass der Abstand d das richtige, dem positiven Sinne der Normalen zu T entsprechende Vorzeichen erhält.

Der Abstand p eines Punktes P , dessen Coordinaten xy sind, von der Geraden T ist daher (§ 2, 5)

$$p = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} (Ax + By - C).$$

3. Soll die Gerade T durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 gehen, so muss die Gleichung $Ax + By + C = 0$ von den Coordinaten $x_1y_1, \quad x_2y_2$ der Punkte P_1 und P_2 erfüllt werden; es gelten also die drei Gleichungen

$$1. \quad \begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + C &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0. \end{aligned}$$

Man kann die Coefficienten A, B, C darin als Unbekannte ansehen; das Bestehen dieser Gleichungen für Werthe von A, B, C , die nicht sämmtlich Null sind, fordert dann das Verschwinden der Determinante

$$2. \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingung, welche x und y erfüllen müssen, damit die Gleichungen 1. zusammen bestehen können, — also die Gleichung dafür, dass P auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt, also die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$.

Subtrahirt man von der zweiten und dritten Zeile in 2. die erste, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \end{vmatrix} = (x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y).$$

Die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$ nimmt daher auch die Gestalt an:

$$3. \quad \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x - x_2}{y - y_2}.$$

Durch direkte Entwicklung der Determinante 2. oder aus 3. erhält man die Gleichung in der Form:

$$4. \quad (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

Um die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$ in Normalform zu erhalten, hat man sie nach 2. durch $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ zu dividiren. Der absolute Werth dieser Wurzel stimmt mit dem absoluten Werthe der Strecke $P_1 P_2$ überein; bezeichnet man dieselbe mit g_{12} , und ist ε die positive oder negative Einheit, so ist also die Normalform der Gleichung der Geraden $P_1 P_2$

$$5. \quad \frac{\varepsilon}{g_{12}} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei ist ε so zu wählen, dass

$$\frac{\varepsilon(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{g_{12}}$$

auch im Vorzeichen mit dem Abstände der Geraden $P_1 P_2$ vom Ursprunge (§ 2, 4) übereinstimmt.

4. Der Abstand eines Punktes P_0 von der Geraden $P_1 P_2$ ist (nach § 2, 5) dem Werthe entgegengesetzt gleich, den die linke Seite der Gleichung der Geraden x in Normalform annimmt, wenn man darin die Coordinaten x, y durch die Coordinaten x_0, y_0 des Punktes P_0 ersetzt.

Ist also h_0 der Abstand der Geraden $P_1 P_2$ von P_0 , so ist

$$h_0 = \frac{\varepsilon}{g_{12}} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Folglich ist

$$h_0 g_{12} = \varepsilon \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Der absolute Werth des Produkts $h_0 g_{12}$ ist die doppelte Flächenzahl des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$. Wir finden daher: Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

stimmt dem absoluten Werthe nach mit der doppelten Fläche der Dreiecks $P_0 P_1 P_2$ überein.

5. Um auch dem Vorzeichen der Determinante Δ eine geometrische Bedeutung abzugewinnen, fügen wir einige Bemerkungen über die Unterscheidung des Vorzeichens für ebene Flächen, zunächst für Dreiecke, ein.

Durchläuft man den Perimeter eines Dreiecks ABC so, dass man von A über B nach C geht, so hat man die Fläche des Dreiecks entweder zur Linken oder zur Rechten. Im ersten Falle soll die Fläche des Dreiecks ABC als positiv, im letzten als negativ gerechnet werden.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Flächen $ABC = BCA = CAB$; sowie dass $BAC = ACB = CBA$; und dass $ABC = -BAC$.

Sind AB, CD, EF, \dots Strecken auf derselben Geraden, und ist h der Abstand dieser Geraden von einem Punkte O , so haben die Produkte $AB \cdot h, CD \cdot h; EF \cdot h, \dots$ gleiche oder ungleiche Zeichen, je nachdem $AB, CD, EF \dots$ gleiche Zeichen haben oder nicht; unter derselben Bedingung haben aber auch die Dreiecksflächen OAB, OCD, OEF, \dots , die mit den halben Produkten $AB \cdot h, CD \cdot h, EF \cdot h \dots$ rücksichtlich des absoluten Werthes übereinstimmen, gleiche Zeichen oder nicht. Wir sehen daher: Die Hälften der Produkte $AB \cdot h, CD \cdot h, EF \cdot h \dots$ sind der Reihe nach alle gleich oder alle entgegengesetzt gleich den Dreiecken OAB, OCD, OEF u. s. w.

Für Punkte einer Geraden gilt die Beziehung

$$AB + BC + CA = 0.$$

Multiplicirt man links mit dem Abstände h eines Punktes O von der Geraden AB , so entsteht

$$AB \cdot h + BC \cdot h + CA \cdot h = 0.$$

Mit Rücksicht auf das so eben Entwickelte folgt hieraus:

$$1. \quad OAB + OBC + OCA = 0,$$

woraus die weiteren Beziehungen hervorgehen:

$$2. \quad OAB + OBC = OAC$$

$$3. \quad OBC = OAC - OAB.$$

6. Setzt man, wie es in den Figuren bisher immer geschehen ist, voraus, dass der positive Drehungssinn für Winkel mit dem Drehungssinn übereinstimmt, in dem man sich dreht, wenn man den Perimeter ABC einer positiven Fläche (immer in der Ordnung A, B, C , in welcher die Eckpunkte bei der Bezeichnung des Dreiecks sich folgen) durchläuft, und ist S_1 ein Punkt der Abscissenachse, P ein beliebiger Punkt der Ebene, so überzeugt man sich leicht, dass das Dreieck OS_1P positiv oder negativ ist, je nachdem die Strecken OS_1 und $P'P$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Daher ist auch rücksichtlich des Vorzeichens:

$$1. \quad 2 \cdot OS_1P = OS_1 \cdot P'P.$$

Nun ist nach No. 5, 3, wenn S_1 die Spur von P_1P_2 ist,

$$OP_1P_2 = OS_1P_2 - OS_1P_1,$$

also nach 1.

$$2. \quad 2 \cdot OP_1P_2 = OS_1 \cdot P_2'P_2 - OS_1 \cdot P_1'P_1 = OS_1(y_2 - y_1),$$

wenn man die Coordinaten von P_1 und P_2 wie immer mit x_1, y_1, x_2, y_2 bezeichnet.

Ferner ist für jede Lage der Punkte P_1 und P_2

$$P_1'S_1 : P_2'S_1 = P_1'P_1 : P_2'P_2;$$

oder, da

$$P_1'S_1 = OS_1 - OP_1' = OS_1 - x_1,$$

$$P_2'S_1 = OS_1 - OP_2' = OS_1 - x_2,$$

$$P_1'P_1 = y_1, \quad P_2'P_2 = y_2, \quad \text{so folgt:}$$

$$(OS_1 - x_1) : (OS_1 - x_2) = y_1 : y_2$$

Daher 3.

$$OS_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1},$$

Führt man dies in 2. ein, so folgt:

$$4. \quad 2 \cdot OP_1P_2 = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

hat für die Coordinaten eines jeden Punktes P der Ebene einen bestimmten, für zwei verschiedene Punkte im Allgemeinen verschiedene Werthe; den Werth Null hat er nur für die Punkte der Geraden P_1P_2 .

Geht man von einem Punkte der Ebene geradlinig zu einem andern Punkte, so kann der Ausdruck D bei diesem Uebergange sein Zeichen nur dann ändern, wenn er für wenigstens einen Punkt des Weges den Werth Null hat, also nur dann, wenn der geradlinig zurückgelegte Weg die Gerade P_1P_2 schneidet. Wir schliessen daher:

Der Ausdruck D hat für alle Punkte, die auf derselben Seite P_1P_2 liegen, dasselbe Zeichen, für Punkte auf verschiedenen Seiten entgegengesetzte Zeichen.

Nun sind aber auch die Dreiecke $P_0P_1P_2$ für zwei Punkte P_0 von gleichen oder ungleichen Zeichen, je nachdem die beiden Punkte P_0 auf derselben Seite von P_1P_2 liegen oder nicht. Nehmen wir hinzu, dass der Ausdruck D für die Coordinaten des Ursprungs den Werth

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

annimmt, also auch rücksichtlich des Zeichens mit der doppelten Fläche des Dreiecks OP_1P_2 übereinstimmt, so finden wir: Durch die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

ist die doppelte Fläche des Dreiecks $P_0P_1P_2$ auch rücksichtlich des Vorzeichens ausgedrückt.

8. Den Winkel δ zweier Geraden T_1, T_2 , der gleich dem Winkel ihrer Normalen N_1, N_2 ist, kann man aus den Coefficienten ihrer Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

finden. Denn man hat

$$\delta = N_1N_2 = XN_2 - XN_1 = \varphi_2 - \varphi_1,$$

und nach No. 2:

$$\cos \varphi_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

mithin

$$1. \quad \cos \delta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad \sin \delta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

9. Sind die Geraden parallel, so ist $\sin \delta = 0$, sind sie normal, so ist $\cos \delta = 0$.

Die Bedingungen für parallele und normale Lage der beiden Geraden

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ und } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

sind daher

parallele Lage $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, oder $A_1 : B_1 = A_2 : B_2$,

normale Lage: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, oder $A_2 : B_2 = -B_1 : A_1$.

Gleichung jeder zu $Ax + By + C = 0$ parallelen, bez. normalen hat somit bei willkürlichen m, n und C_1 die Form:

parallele: $mAx + mBy + C_1 = 0$, oder 3. $Ax + By + c = 0$,

normale: $nBx - nAy + C_1 = 0$, oder 4. $Bx - Ay + \gamma = 0$,

und c und γ willkürliche Constanten sind.

der Gleichung einer Geraden wird also die Gleichung einer Parallelen indem man das von Coordinaten freie dritte Glied durch eine willkürliche ersetzt; die Gleichung einer Normalen wird erhalten, indem man A durch B und B durch $-A$, und C durch eine willkürliche Constante ersetzt.

Die Parallele und Normale durch einen gegebenen Punkt x_1, y_1 gehen, wenn 3. und 4. von den Coordinaten x_1, y_1 erfüllt werden; man hat daher

$$Ax_1 + By_1 + c = 0, \text{ bez. } Bx_1 - Ay_1 + \gamma = 0,$$

folgt:

$$c = -Ax_1 - By_1, \quad \gamma = -Bx_1 + Ay_1.$$

man diese Werthe in 3. und 4. ein, so folgen die Gleichungen

der Parallelen: 5. $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$,

der Normalen: 6. $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$.

Die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden T_1, T_2 sind die, welche den Gleichungen der beiden Geraden zugleich genügen. Setzt man die beiden Gleichungen

$$A_1x + B_1y = -C_1$$

$$A_2x + B_2y = -C_2$$

zunächst erst mit B_2 und $-B_1$; dann mit $-A_2$ und A_1 ; und addirt, so erhält man die Coordinaten des Schnittpunktes zu

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Die Coordinaten werden unendlich gross, wenn $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, d. i. wenn die Geraden parallel sind (No. 9).

Wenn zugleich die Zähler verschwinden $B_1C_2 - B_2C_1 = A_2C_1 - A_1C_2 = 0$, so sind die Coordinaten des Schnittpunktes unbestimmt; das Verschwinden der Zähler und des gemeinsamen Nenners der Lösungen x und y ist aber, wie man sieht, gleichbedeutend mit der Proportion $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$; erfüllt, so sind die Geraden T_1 und T_2 identisch.

Drei Gerade T_1, T_2, T_3 gehen durch einen Punkt, wenn es ein x, y giebt, durch welches den drei Gleichungen der Geraden:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

genügt wird. Sollen diese Gleichungen bestehen, so muss ihre Determinante verschwinden:

$$R = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann dieser Bedingung aber noch eine andere bemerkenswerthe Form geben. Das Verschwinden der Determinante R zeigt, dass drei Zahlen m_1, m_2, m_3 existiren, für welche die drei Gleichungen bestehen:

$$A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0$$

$$B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 = 0$$

$$C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 = 0.$$

te mit einer willkürlichen Zahl x , die zweite mit y , und die drei Gleichungen, so erhält man

$$m_2(A_2x + B_2y + C_2) + m_3(A_3x + B_3y + C_3) = 0.$$

identische, sie gilt für alle möglichen Werthe der x und y .
umgekehrt: wenn es drei Zahlen m_1, m_2, m_3 giebt, 4. identisch erfüllt wird, so gelten die Gleichungen 1. 2. 3. identisch, und die drei Geraden T_1, T_2, T_3 gehen

durch einen Punkt, so muss es drei Zahlen m_1, m_2, m_3 geben, welche die Gleichung 4. zu einer identischen machen. Sei $Ax + By + C$ die Gleichung einer Geraden, deren Coordinaten eines Punktes $Ax + By + C$ wollen wir dem Buchstaben T bezeichnen, setzen also (unter der Bedingung $T=0$)

$$T = Ax + By + C.$$

Die Gleichung $T=0$ ist, soll im Texte als die Gerade T bezeichnet werden, und in der Figur als die Gerade T bezeichnet werden. Die Functionen der Coordinaten (also auch verschiedene Functionen) durch untere oder obere Indices an den Coefficienten A, B, C und dem Zeichen T denselben Index, setzen also

$$T' = A'x + B'y + C' \text{ u. s. w.}$$

Die entwickelte Bedingung 4. in folgender Weise ausgedrückt: $T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 = 0$ durch einen Punkt, d. h. es giebt Zahlen m_1, m_2, m_3 für welche identisch

$$T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 = 0;$$

es giebt drei Zahlen m giebt, durch welche die Identität

$$T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 = 0,$$

erfüllt ist, d. h. T_1, T_2, T_3 durch einen Punkt.

Die Anwendungen des soeben gewonnenen Satzes

die Gleichung (No. 3)

$$-(x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Wenn P_0 normal zu P_1P_2 gelegt wird, hat also (No. 9, 6)

$$x_2(x - x_0) + (y_1 - y_2)(y - y_0) = 0.$$

0 1 2 der Reihe nach durch 1 2 0 und durch 2 0 1, d. h. die Geraden T_1 und T_2 , die durch die Punkte P_2P_0 bez. P_0P_1 gelegt sind, nämlich

$$x_0(x - x_1) + (y_2 - y_0)(y - y_1) = 0$$

$$x_1(x - x_2) + (y_0 - y_1)(y - y_2) = 0.$$

Die Gleichungen der Höhen des Dreiecks $P_0P_1P_2$. Man bemerkt, dass $T_0 + T_1 + T_2$ identisch verschwindet und hat die folgende Herleitung des Satzes: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Die Höhen eines Dreiecks $P_0P_1P_2$ der Reihe nach durch T_0, T_1, T_2 bezeichnen, so erhält man in den Verhältnissen

$$P_0 \Pi_2 : \Pi_2 P_1 = m_0 : m_1$$

$$P_1 \Pi_0 : \Pi_0 P_2 = m_1 : m_2$$

$$P_2 \Pi_1 : \Pi_1 P_0 = m_2 : m_0,$$

so sind (§ 2, No. 6) die Coordinaten der Theilpunkte:

$$1. \quad \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{m_1 x_0 + m_0 x_1}{m_1 + m_0}, & \xi_0 &= \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_2 + m_1}, & \xi_1 &= \frac{m_0 x_2 + m_2 x_0}{m_0 + m_2}, \\ \eta_2 &= \frac{m_1 y_0 + m_0 y_1}{m_1 + m_0}, & \eta_0 &= \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_2 + m_1}, & \eta_1 &= \frac{m_1 y_2 + m_2 y_0}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Die Geraden T_0, T_1, T_2 , welche die Ecken P_0, P_1, P_2 des Dreiecks mit den Theilpunkten Π_0, Π_1, Π_2 der Gegenseiten verbinden, haben die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \xi_0 & \eta_0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die Werthe der Coordinaten der Punkte Π_0, Π_1, Π_2 aus 1. ein, und multiplicirt die Determinanten der Reihe nach mit $(m_1 + m_0)$, $(m_2 + m_1)$, $(m_1 + m_0)$, indem man die Glieder der letzten Zeile jeder Determinante mit diesem Faktor multiplicirt, so zerfällt dann jede Determinante in die Summe zweier Determinanten, in deren jeder die Glieder der letzten Zeile eine der Zahlen m_0, m_1, m_2 als gemeinsamen Faktor haben. Setzt man nun abkürzend

$$S_0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_1 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix},$$

so ergeben sich die Gleichungen der Geraden T_0, T_1, T_2 schliesslich in der Form:

$$\begin{aligned} T_0 &\equiv m_2 S_2 - m_1 S_1 = 0, \\ T_1 &\equiv m_0 S_0 - m_2 S_2 = 0, \\ T_2 &\equiv m_1 S_1 - m_0 S_0 = 0. \end{aligned}$$

Die Summe $T_0 + T_1 + T_2$ verschwindet identisch. Wir erhalten daher

Theilt man die Seiten eines Dreiecks $P_0 P_1, P_1 P_2, P_2 P_0$ der Reihe nach in den Verhältnissen $m_0 : m_1, m_1 : m_2, m_2 : m_0$, so gehen die Verbindungslinien der Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken durch einen Punkt.

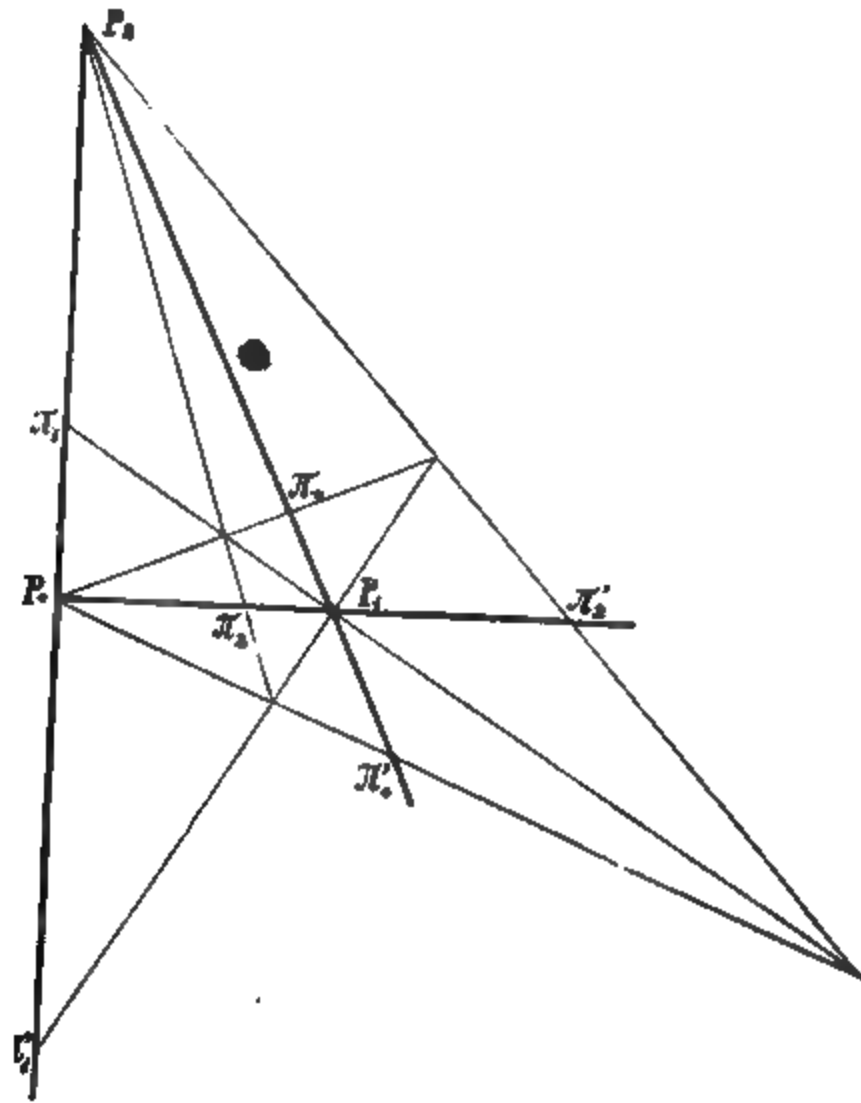
Sind n_0, n_1, n_2 drei positive reale Zahlen, und theilt man durch die Punkte Π_0 und Π_0' die Strecke $P_1 P_2$ in den Verhältnissen $n_1 : n_2$ und $-n_1 : n_2$
 Π_1 „ Π_1' „ „ „ „ „ „ „ „ $n_2 : n_0$ „ „ $-n_2 : n_0$
 Π_2 „ Π_2' „ „ „ „ „ „ „ „ $n_0 : n_1$ „ „ $-n_0 : n_1$
und verbindet jedes auf einer Seite des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$ liegende Paar Theilpunkte mit der gegenüberliegenden Ecke, so erhält man sechs Gerade. Von diesen gehen nach dem vorigen Satze zunächst die drei nach den innern Theilpunkten gehenden $P_0 \Pi_0, P_1 \Pi_1, P_2 \Pi_2$ durch einen Punkt.

Für die Punkte $\Pi_0 \Pi_1' \Pi_2'$ gelten die Theilverhältnisse

$$n_1 : n_2, \quad n_2 : (-n_0), \quad (-n_0) : n_1,$$

also gilt ebenfalls der obige Satz; ebenso für die Punkte $\Pi_0' \Pi_1' \Pi_2'$, welche die Theilverhältnisse $(-n_1) : n_2, n_2 : n_0, n_2 : (-n_1)$; und für $\Pi_0' \Pi_1' \Pi_2'$, welche die Theilverhältnisse $n_1 : (-n_2), (-n_2) : n_0, n_0 : n_1$ haben. Man kann also den Satz folgendermaassen vervollständigen.

Theilt man die Seiten $P_0 P_1, P_1 P_2, P_2 P_0$ eines Dreiecks innen und aussen in Verhältnissen, die die numerischen Beträge $n_1 : n_2, n_2 : n_0, n_0 : n_1$ haben und verbindet die drei Paare Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken, so gehen diese sechs Transversalen vier-



(M. 367.)

$$Mu + Nv + Q = 0.$$

gleichung über in

$$v = 0, \text{ oder } u : v = -N : M,$$

unendlich fernen Punktes.

3 wird aus 1.

bez. 4. $Mu = Q = 0$, woraus folgt

$$\text{bez. } u = -Q : M.$$

$Q = 0$ und $Nv + Q = 0$ sind also Gleichungen
e auf der X -Achse bez. der Y -Achse liegen,

$$r : Q, \text{ bez. } OP_3 = -N : Q.$$

N, Q gleich Null, so kann man 1. durch $(-Q)$

$$\frac{r}{Q}u + \frac{N}{-Q}v - 1 = 0.$$

4, 2, so sieht man:

$v + Q = 0$ ist die Gleichung eines Punktes,
: Q und $(-N) : Q$ sind.

ordinaten u', v' sind, hat die Gleichung $u'x + v'y$
essen Coordinaten ξ, η sind, hat also diese Gerade

$$\frac{1}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} (\xi u' + \eta v' - 1).$$

ktes $Mu + Nv + Q = 0$, so sind die Coordinaten
 $N : Q$. Der Abstand der Geraden u', v' von dem
gibt sich also zu

$$p = \frac{1}{Q\sqrt{u'^2 + v'^2}} (Mu' + Nv' + Q).$$

Die Gleichung des Schnittpunktes zweier Geraden sei

$$Mu + Nv + Q = 0.$$

u_1, v_1, u_2, v_2 die Coordinaten der gegebenen Geraden T_1 und T_2 , so sei die Gleichung 1.; man hat also

$$Mu_1 + Nv_1 + Q = 0,$$

$$Mu_2 + Nv_2 + Q = 0.$$

Für nicht verschwindende Werthe von M, N, Q diese drei Gleichungen bestehen, so müssen die Unbestimmten u, v so gewählt sein, dass die dritte verschwindet:

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist daher die Gleichung des Schnittpunktes von T_1 und T_2 . Die Coordinaten der Geraden, welche durch die Punkte P_1, P_2 gehen, sind

$$M_1u + N_1v + Q_1 = 0$$

$$M_2u + N_2v + Q_2 = 0,$$

aus diesen beiden Gleichungen und ergeben sich durch Auflösung derselben zu

$$u = \frac{N_1Q_2 - N_2Q_1}{M_1N_2 - M_2N_1}, \quad v = \frac{M_2Q_1 - M_1Q_2}{M_1N_2 - M_2N_1}.$$

Die lineare Function der Liniencoordinaten $Mu + Nv + Q$ soll künftig durch den Buchstaben P (oder gelegentlich durch Π, \mathfrak{P} etc.) abkürzungsweise bezeichnet werden. Verschiedene Functionen sollen durch Indices an M, N, Q und P unterschieden werden. Der Punkt, dessen Gleichung $P=0$ ist, soll als der Punkt Π schlechthin als der Punkt P bezeichnet werden.

Drei Punkte

$$P_0 = M_0u + N_0v + Q_0 = 0$$

$$P_1 = M_1u + N_1v + Q_1 = 0$$

$$P_2 = M_2u + N_2v + Q_2 = 0$$

liegen, so müssen die Coordinaten dieser Geraden den drei Bedingungen genügen, also verschwindet deren Determinante

$$R = \begin{vmatrix} M_0 & N_0 & Q_0 \\ M_1 & N_1 & Q_1 \\ M_2 & N_2 & Q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden dieser Determinante ist aber gleichbedeutend mit dem Bestehen der Gleichungen (vergl. No. 11)

$$\mu_0 M_0 + \mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 = 0$$

$$\mu_0 N_0 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = 0$$

$$\mu_0 Q_0 + \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 = 0.$$

Wählt man die erste mit einer willkürlichen Zahl μ , die zweite mit einer willkürlichen Zahl ν und addirt, so erhält man

$$\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 = 0;$$

Diese Gleichung ist identisch. Liegen also drei Punkte $P_0 = 0, P_1 = 0, P_2 = 0$ auf einer Geraden, so giebt es drei Zahlen μ_0, μ_1, μ_2 , für welche die Summe $\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$ identisch verschwindet.

Man überzeugt sich leicht, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. Die Coordinaten des Punktes Π_0 , welcher die Strecke der Punkte

$$= x_1 u + y_1 v - 1 = 0$$

$$= x_2 u + y_2 v - 1 = 0$$

hat die Coordinaten

$$\frac{-\mu_2 x_2}{+\mu_2}, \quad \eta_0 = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

in die Gleichung des Punktes Π_0

$$\xi_0 u + \eta_0 v - 1 = 0$$

μ_2 , so erhält man als Gleichung des Punktes Π_0 ,

$$= \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 = 0,$$

vorige Nummer.

Punkte Π_0, Π_1, Π_2 , welche die Seiten $P_1 P_2, P_2 P_0,$

der Reihe nach in den Verhältnissen $n_1 : n_2, n_2 : n_0,$

dem Vorhergehenden

$$= \frac{1}{n_1} P_1 + \frac{1}{n_2} P_2 = 0$$

$$= \frac{1}{n_2} P_2 + \frac{1}{n_0} P_0 = 0$$

$$= -\frac{1}{n_0} P_0 + \frac{1}{n_1} P_1 = 0.$$

Π_2 verschwindet, wie man sieht, identisch. Also

Π_1, Π_2 auf einer Geraden.

ale Zahlen und construirt man die drei Punktepaare

die Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_0$ der Reihe nach

ssen theilen, die numerisch gleich $n_1 : n_2, n_2 : n_0,$

P_2 in den Verhältnissen $n_1 : n_2$ und $(-n_1) : n_2$

P_0 " " " " " " $n_2 : n_0$ " " $(-n_2) : n_0$

P_1 " " " " " " $n_0 : n_1$ " " $(-n_0) : n_1$.

Punkten liegen daher viermal je drei auf einer Ge-

1', Π_2 ; 3. Π_0', Π_1, Π_2 ; 4. Π_0', Π_1', Π_2' .

der in No. 13 gegebene, einer Umkehrung fähig.

e Strahlbüschel und Punktreihen.

durch den Schnittpunkt der Geraden T_1 und T_2

leichung von der Form

$$= n_1 T_1 + n_2 T_2 = 0;$$

$T_2 = 0$ leitet man ab $-m_3 T_3 = m_1 T_1 + m_2 T_2$

2,

$m_2 : m_3$ durch n_1 und n_2 bezeichnet.

T_3 und $T_3 T_2$ ergeben sich zu

$$\frac{1}{+B_3^2}$$

$$\frac{+B_3^2}{+B_3^2} (A_1 (n_1 B_1 + n_2 B_2) - (n_1 A_1 + n_2 A_2) B_1)$$

$$\frac{B_1)}{+B_3^2}.$$

Ebenso findet sich $\sin T_3 T_2 = \frac{n_1(A_1 B_2 - A_2 B_1)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$.

Hieraus folgt

$$\sin T_1 T_3 : \sin T_3 T_2 = \frac{1}{n_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} : \frac{1}{n_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Das Verhältniss $\sin T_1 T_3 : \sin T_3 T_2$ nennen wir das Sinusverhältniss, in welchem der Winkel $T_1 T_2$ von der Geraden T_3 getheilt wird; wir haben daher den Satz: Die Gerade $T_3 \equiv n_1 T_1 + n_2 T_2 = 0$ theilt den Winkel $T_1 T_2$ im Sinusverhältniss $n_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2} : n_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$.

2. Gehen durch den Schnittpunkt von T_1 und T_2 die beiden Geraden T_3 und T_4 , und hat man $T_3 \equiv n_{13} T_1 + n_{23} T_2$, $T_4 \equiv n_{14} T_1 + n_{24} T_2$,

so ist $\frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{\sin T_1 T_4}{\sin T_4 T_2} = \frac{n_{23} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}{n_{13} \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} : \frac{n_{24} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}{n_{14} \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{n_{23}}{n_{13}} : \frac{n_{24}}{n_{14}}$.

Das Verhältniss

$$\frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{\sin T_1 T_4}{\sin T_4 T_2}$$

heisst das Doppelverhältniss der vier Geraden $T_1 T_2 T_3 T_4$ und wird abkürzungsweise durch das Symbol $(T_1 T_2 T_3 T_4)$ bezeichnet.

Das Doppelverhältniss von vier Strahlen eines Büschels ist also von den Coefficienten der Gleichungen der Strahlen unabhängig; es hängt nur von den Zahlen ab, durch welche die linken Seiten der Gleichungen zweier dieser Geraden aus den linken Seiten der Gleichungen der beiden andern abgeleitet werden können.

3. Die Coordinaten der Strahlen T_1, T_2, T_3, T_4 sind

$$u_1 = -\frac{A_1}{C_1}, \quad v_1 = -\frac{B_1}{C_1}, \quad u_2 = -\frac{A_2}{C_2}, \quad v_2 = -\frac{B_2}{C_2};$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{n_{13} A_1 + n_{23} A_2}{n_{13} C_1 + n_{23} C_2} = \frac{n_{13} C_1 u_1 + n_{23} C_2 u_2}{n_{13} C_1 + n_{23} C_2} \\ v_3 &= -\frac{n_{13} B_1 + n_{23} B_2}{n_{13} C_1 + n_{23} C_2} = \frac{n_{13} C_1 v_1 + n_{23} C_2 v_2}{n_{13} C_1 + n_{23} C_2}; \\ u_4 &= -\frac{n_{14} A_1 + n_{24} A_2}{n_{14} C_1 + n_{24} C_2} = \frac{n_{14} C_1 u_1 + n_{24} C_2 u_2}{n_{14} C_1 + n_{24} C_2} \\ v_4 &= -\frac{n_{14} B_1 + n_{24} B_2}{n_{14} C_1 + n_{24} C_2} = \frac{n_{14} C_1 v_1 + n_{24} C_2 v_2}{n_{14} C_1 + n_{24} C_2}. \end{aligned}$$

Denkt man sich die Werthe u_1, v_1, u_2, v_2 gegeben, so erhält man zunächst:

Die Coordinaten jeder Geraden, die durch den Schnittpunkt der Geraden T_1 und T_2 geht, werden nach den Formeln berechnet:

$$2. \quad u = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Denkt man sich ferner die Gleichungen von T_1 und T_2 in der Form

$$T_1 \equiv u_1 x + v_1 y - 1 = 0, \quad T_2 \equiv u_2 x + v_2 y - 1 = 0,$$

und hat man für zwei Gerade des Büschels T_1, T_2 die Coordinaten nach den Formeln abgeleitet

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{m_{13} u_1 + m_{23} u_2}{m_{13} + m_{23}}, \quad v_3 = \frac{m_{13} v_1 + m_{23} v_2}{m_{13} + m_{23}} \\ u_4 &= \frac{m_{14} u_1 + m_{24} u_2}{m_{14} + m_{24}}, \quad v_4 = \frac{m_{14} v_1 + m_{24} v_2}{m_{14} + m_{24}}, \end{aligned}$$

so ist nach No. 3 und 2 das Doppelverhältniss der Geraden $T_1 T_2 T_3 T_4$:

$$(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{m_{23}}{m_{13}} : \frac{m_{24}}{m_{14}},$$

ann man mit Hülfe von u_3, v_3, u_4, v_4 die Gleichungen

$$T_3 = u_3x + v_3y - 1 = 0,$$

$$T_4 = u_4x + v_4y - 1 = 0.$$

ltniss von vier Geraden $T_1 T_2 T_3 T_4$ gleich der nega-

$$\frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} = - \frac{\sin T_1 T_4}{\sin T_4 T_2},$$

nn den Winkel $T_1 T_2$ und den Nebenwinkel in dem-
Geraden $T_1 T_2 T_3 T_4$ heissen dann harmonisch.

0, $T_3 = n_1 T_1 + n_2 T_2 = 0$ die Gleichungen oder
 $\frac{u_1 - m_2 u_2}{m_1 - m_2}, v_3 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ die Coordinaten dreier

: Gleichung, bez. die Coordinaten der vierten harmo-
n

$$T_4 = n_1 T_1 - n_2 T_2 = 0, \text{ bez.}$$

$$\frac{u_1 - m_2 u_2}{m_1 - m_2}, v_4 = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_2}{m_1 - m_2}.$$

$$(T_3 T_4) = \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{\sin T_1 T_4}{\sin T_4 T_2} = 1,$$

uch

$$(T_4 T_3) = \frac{\sin T_1 T_4}{\sin T_4 T_2} : \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} = -1$$

$$(T_3 T_4) = \frac{\sin T_2 T_3}{\sin T_3 T_1} : \frac{\sin T_2 T_4}{\sin T_4 T_1} = -1$$

$$(T_1 T_2) = \frac{\sin T_3 T_1}{\sin T_1 T_4} : \frac{\sin T_3 T_2}{\sin T_2 T_4} = -1.$$

eln folgt, dass man bei der Angabe, vier Strahlen
onisch, nicht auf die Anordnung der vier Strahlen,
theilung in zwei Paare $T_1 T_2$ und $T_3 T_4$ zu achten
ckmässiger: Die Strahlenpaare $T_1 T_2$ und $T_3 T_4$
ei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man
and wie man die Strahlen jedes Paares anordnet.

lverhältniss von vier Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4$ einer
zeichnet durch $(P_1 P_2 P_3 P_4)$, versteht man den

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2}.$$

$$= \frac{m_{13}x_1 + m_{23}x_2}{m_{13} + m_{23}}, y_3 = \frac{m_{13}y_1 + m_{23}y_2}{m_{13} + m_{23}};$$

$$= \frac{m_{14}x_1 + m_{24}x_2}{m_{14} + m_{24}}, y_4 = \frac{m_{14}y_1 + m_{24}y_2}{m_{14} + m_{24}}$$

unkte, so ist ihr Doppelverhältniss

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{m_{23}}{m_{13}} : \frac{m_{24}}{m_{14}}.$$

Nach § 5, 18 besteht, wenn $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P = 0$ Gleichungen dreier Punkte einer Geraden sind, zwischen den Polynomen P_1 , P_2 , P eine Identität von der Form $\mu P + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 = 0$. Es ist also $\mu P = -\mu_1 P_1 - \mu_2 P_2$, oder die Gleichung von P :

$$P = v_1 P_1 + v_2 P_2 = 0,$$

wenn man $-\mu_1 : \mu$ und $-\mu_2 : \mu$ durch v_1 und v_2 bezeichnet.

Ist nun $P_1 = M_1 u + N_1 v + Q_1$, $P_2 = M_2 u + N_2 v + Q_2$,
so ist $P = (v_1 M_1 + v_2 M_2) u + (v_1 N_1 + v_2 N_2) v + (v_1 Q_1 + v_2 Q_2)$.

Die Coordinaten der Punkte P_1 , P_2 und P sind daher

$$x_1 = -\frac{M_1}{Q_1}, \quad y_1 = -\frac{N_1}{Q_1}; \quad x_2 = -\frac{M_2}{Q_2}, \quad y_2 = -\frac{N_2}{Q_2},$$

und

$$x = -\frac{v_1 M_1 + v_2 M_2}{v_1 Q_1 + v_2 Q_2} = \frac{v_1 Q_1 x_1 + v_2 Q_2 x_2}{v_1 Q_1 + v_2 Q_2}$$

$$y = -\frac{v_1 N_1 + v_2 N_2}{v_1 Q_1 + v_2 Q_2} = \frac{v_1 Q_1 y_1 + v_2 Q_2 y_2}{v_1 Q_1 + v_2 Q_2}.$$

Das Theilverhältniss $P_1 P : P P_2$ ist somit:

$$2. \quad \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{n_2 Q_2}{n_1 Q_1}.$$

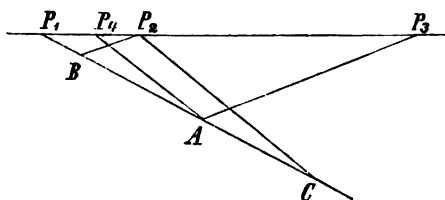
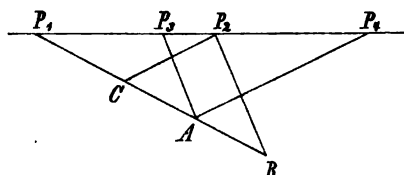
Hat man nun die Gleichungen der Punkte P_3 , P_4 aus den Gleichungen der Punkte P_1 , P_2 nach den Formeln abgeleitet

$$P_3 = n_{13} P_1 + n_{23} P_2 = 0, \quad P_4 = n_{14} P_1 + n_{24} P_2 = 0,$$

so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte nach 1. und 2.

$$3. \quad (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{n_{23}}{n_{13}} : \frac{n_{24}}{n_{14}}.$$

Die beiden Punktpaare $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ heissen harmonisch, wenn das Doppelverhältniss $(P_1 P_2 P_3 P_4) = -1$; es ist dann, wie man sofort durch Bildung der Doppelverhältnisse sich überzeugt, auch



(M. 368.)

$$\begin{aligned} (P_1 P_2 P_4 P_3) &= (P_3 P_1 P_3 P_4) \\ &= (P_2 P_1 P_4 P_3) = (P_3 P_4 P_1 P_2) \\ &= (P_3 P_4 P_3 P_1) = (P_4 P_3 P_1 P_2) \\ &= (P_4 P_3 P_2 P_1) = -1. \end{aligned}$$

Sind die Gleichungen eines Punktpaares $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, und die Gleichungen eines anderen $P_3 = n_1 P_1 + n_2 P_2 = 0$, $P_4 = n_1 P_1 - n_2 P_2 = 0$, so sind die Paare harmonisch.

Sind zwei Punktpaare harmonisch, so theilt jedes Paar die Strecke des andern innen und aussen in numerisch gleichem Verhältnisse, denn aus

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2} = -1$$

folgt:

$$P_1 P_3 : P_3 P_2 = -(P_1 P_4 : P_4 P_2).$$

Zu drei Punkten P_1 , P_2 , P_3 einer Geraden kann man den vierten harmonischen finden, indem man durch P_3 und P_2 zwei Parallele $P_3 A$ und $P_2 B$ zieht, $CA = AB$ macht, und hierauf durch A eine Parallele zu CP_2 zieht; diese schneidet $P_1 P_2$ in dem gesuchten Punkte P_4 . Denn man hat

$$P_1 P_3 : P_3 P_2 = P_1 A : AB = P_1 A : CA = -P_1 A : AC = -P_1 P_4 : P_4 P_2.$$

Verbindet man P_1, P_2, P_3, P_4 (No. 5) mit einem Punkte P_0 , der nicht auf derselben Geraden liegt, so sind die Gleichungen der Geraden $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$

$$T_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad T_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen der Geraden $P_0 P_3$ und $P_0 P_4$ ergeben sich zunächst zu

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier die Werthe von x_3, y_3, x_4, y_4 ein und multiplicirt dann die letzte Zeile jeder Determinante mit $m_{13} + m_{23}$, bez. $m_{14} + m_{24}$, so lassen sich diese beiden Gleichungen in der Form schreiben:

$$T_3 \equiv m_{13} T_1 + m_{23} T_2 = 0, \quad T_4 \equiv m_{14} T_1 + m_{24} T_2 = 0.$$

Das Doppelverhältniss der vier Geraden ist also

$$(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{m_{23}}{m_{13}} : \frac{m_{24}}{m_{14}},$$

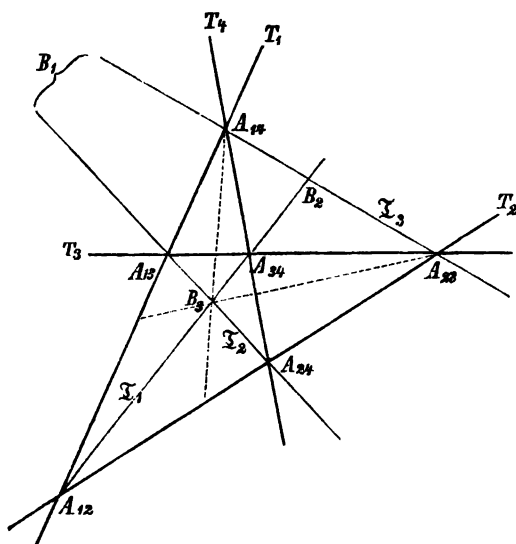
gleich dem der Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$. Wir haben folglich somit: Werden vier Strahlen eines Büschels von einer Geraden geschnitten, so ist das Doppelverhältniss der vier Strahlen gleich dem Doppelverhältniss der vier auf ihnen liegenden Schnittpunkte.

Insbesondere werden also vier harmonische Strahlen von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten, und vier harmonische Punkte von jedem Punkte aus durch vier harmonische Strahlen projectirt.

7. Das vollständige Vierseit. Unter einem vollständigen Vierseit versteht man die Figur, welche von vier Geraden einer Ebene gebildet wird, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen. Diese vier Geraden $T_1 T_2 T_3 T_4$ heissen die Seiten des Vierseits; sie schneiden sich in sechs Punkten, den Ecken des Vierseits.

Der Schnittpunkt von T_i und T_k wird passend mit A_{ik} bezeichnet, so dass die Ecken des Vierecks sind $A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}$.

Je drei Ecken haben einen Index gemein; diese liegen auf der Seite, die denselben Index hat. Aus den sechs Ecken lassen sich drei Paare bilden, so dass die Punkte eines Paares keinen gemeinsamen Index haben, nämlich die Paare A_{12} und A_{34} ; A_{13} und A_{24} ; A_{14} und A_{23} ; die drei Verbindungsgeraden der Punkte jedes Paares sind von den Seiten des Vierseits verschieden und heissen die Diagonalen des Vierseits. Die vier Seiten und die drei Diagonalen bilden das vollständige System der Geraden, welche je zwei Ecken des Vierseits verbinden.



Wir wollen die Diagonale $A_{12} A_{34}$ mit \mathfrak{I}_1 , $A_{13} A_{24}$ mit \mathfrak{I}_2 , $A_{14} A_{23}$ mit \mathfrak{I}_3 bezeichnen.

Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$, $\mathfrak{I}_1 = 0$, $\mathfrak{I}_2 = 0$, $\mathfrak{I}_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten und Diagonalen des vollständigen Vierseits, so lässt sich \mathfrak{I}_1 , da diese Gerade durch A_{12} geht, in der Form darstellen

$$1. \quad \mathfrak{I}_1 = a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0.$$

Da ferner \mathfrak{I}_1 durch A_{34} geht, so lässt sich \mathfrak{I}_1 auch in der Form darstellen:

$$2. \quad \mathfrak{I}_1 = a_3 T_3 + a_4 T_4 = 0.$$

Aus 1. und 2. folgt die Identität

$$a_1 T_1 + a_2 T_2 = a_3 T_3 + a_4 T_4,$$

woraus sich weiter ergibt

$$3. \quad a_1 T_1 - a_3 T_3 = a_4 T_4 - a_2 T_2.$$

Die Gleichung $a_1 T_1 - a_3 T_3 = 0$ ist die Gleichung einer Geraden, die durch A_{13} geht; $a_4 T_4 - a_2 T_2 = 0$ ist die Gleichung einer Geraden, die durch A_{24} geht; nach 3. sind diese Geraden identisch, also ist

$$a_1 T_1 - a_3 T_3 = a_4 T_4 - a_2 T_2 = 0$$

die Gleichung der Geraden $A_{13} A_{24}$, d. i. der Diagonale \mathfrak{I}_2 ; es ist also

$$4. \quad \mathfrak{I}_2 = a_1 T_1 - a_3 T_3 = a_4 T_4 - a_2 T_2.$$

Aus der Identität 3. folgt ferner

$$5. \quad a_1 T_1 - a_4 T_4 = a_3 T_3 - a_2 T_2.$$

Nun sind $a_1 T_1 - a_4 T_4 = 0$ bez. $a_3 T_3 - a_2 T_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, deren erste durch A_{14} , die andere durch A_{23} geht; da nach 5. diese Geraden identisch sind, so fallen sie mit der Geraden $A_{14} A_{23}$ zusammen; also ist die Gleichung dieser Diagonale

$$6. \quad \mathfrak{I}_3 = a_1 T_1 - a_4 T_4 = a_3 T_3 - a_2 T_2 = 0.$$

Aus 1., 4. und 6. folgt:

$$\begin{array}{ll} 7. & \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 = a_2 T_2 + a_3 T_3; & 8. & \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = a_1 T_1 + a_4 T_4 \\ 9. & \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_3 = a_2 T_2 + a_4 T_4; & 10. & \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_3 = a_1 T_1 + a_3 T_3 \\ 11. & \mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_3 = a_4 T_4 - a_3 T_3; & 12. & \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 = a_1 T_1 - a_2 T_2. \end{array}$$

Die Identität 7. lehrt, dass $\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 = 0$ (der $a_2 T_2 - a_3 T_3 = 0$) die Gleichung der Geraden ist, welche den Schnittpunkt B_3 der Diagonalen \mathfrak{I}_1 , \mathfrak{I}_2 mit dem Punkte A_{23} verbindet; ferner folgt aus 8., dass $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = 0$ die Gleichung der Geraden $B_3 A_{14}$ ist. Ebenso ergibt sich weiter, dass $\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_3 = 0$ und $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_3 = 0$ die Gleichungen der Geraden $B_2 A_{24}$ und bez. $B_2 A_{13}$, sowie dass $\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_3 = 0$ und $\mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 = 0$ die Gleichungen von $B_1 A_{34}$ und $B_1 A_{12}$ sind.

Nach No. 4 sind die Geraden

$$\begin{array}{ll} \alpha) & \mathfrak{I}_1 = 0, \quad \mathfrak{I}_2 = 0, \quad \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = 0, \quad \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 = 0; \\ \beta) & \mathfrak{I}_1 = 0, \quad \mathfrak{I}_3 = 0, \quad \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_3 = 0, \quad \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_3 = 0; \\ \gamma) & \mathfrak{I}_2 = 0, \quad \mathfrak{I}_3 = 0, \quad \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 = 0, \quad \mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_3 = 0; \end{array}$$

harmonisch. Wir haben daher: Im vollständigen Vierseit bilden je zwei Diagonalen mit den Geraden, welche vom Schnittpunkte dieser Diagonalen nach den beiden Ecken des Vierseit gehen, die nicht auf den Diagonalen liegen, zwei harmonische Strahlenpaare.

Da harmonische Strahlenpaare von jeder Geraden in harmonischen Punktpaaren geschnitten werden, so folgt weiter: Die auf jeder Diagonale liegenden Ecken des vollständigen Vierseits bilden mit den Schnittpunkten dieser Diagonale mit den beiden anderen zwei harmonische Punktpaare.

Die Ecken $A_{12} A_{24}$ bilden mit der Ecke A_{23} und dem Punkte, in welchem

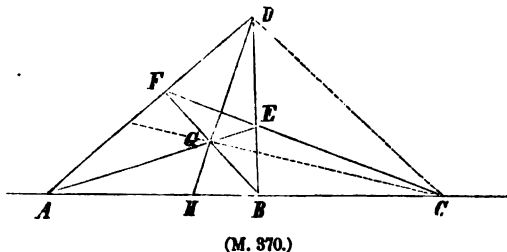
die Seite von der Geraden $A_{14}B_3$ geschnitten wird, zwei harmonische Paare; oder allgemein, wenn i, k, l, m eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4 bedeutet:

Auf jeder Seite des vollständigen Vierseits bilden die Ecken A_{ik} und A_{il} mit der Ecke A_{im} und mit dem Schnitt der Seite mit der Geraden, welche die A_{im} gegenüberliegende Ecke A_{kl} mit dem Schnittpunkte der beiden durch A_{ik} und A_{il} gehenden Diagonalen verbindet, zwei harmonische Punktpaare.

Aus diesen Sätzen ergibt sich folgende, ausschliesslich durch das Ziehen gerader Linien erfolgende Construction des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen.

Um die vierten harmonischen Punkte zu A, B, C zu finden, ziehe man AD, BD, CE, FB und DG ; dann ist H der gesuchte Punkt.

Um zu drei Strahlen DA, DB, DC eines Büschels den vierten harmonischen zu finden, schneide man die drei Strahlen durch eine Gerade in A, B und C und ziehe durch C eine zweite Gerade, die die Strahlen DA und DB in F und E schneidet; zieht man nun AE und FB , so ist DG der gesuchte Strahl.



8. Das vollständige Viereck. Unter einem vollständigen Viereck versteht man die Figur, welche aus vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und den sechs Geraden $G_{12}, G_{13}, G_{14}, G_{23}, G_{24}, G_{34}$ besteht, die je zwei von den vier Punkten verbinden. Die vier Punkte P heissen die Ecken, die sechs Geraden G die Seiten des vollständigen Vierecks. Je drei von den sechs Seiten haben einen Index gemein (z. B. G_{12}, G_{13}, G_{14}); diese gehen durch den Eckpunkt, der den gemeinsamen Index hat. Die Seiten lassen sich zu drei Paaren so ordnen, dass die Seiten jedes Paares keinen Index gemein haben; diese drei Paare sind G_{12} und G_{34} ; G_{13} und G_{24} ; G_{14} und G_{23} ; je zwei solcher Seiten heissen gegenüberliegende Seiten des Vierecks. Die drei Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten, die der Reihe nach mit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ bezeichnet werden sollen, fallen mit Ecken des Vierecks nicht zusammen; man bezeichnet sie als die Diagonalpunkte des Vierecks.

Die vier Eckpunkte und die drei Diagonalpunkte bilden das vollständige System der Schnittpunkte der sechs Seiten des Vierecks.

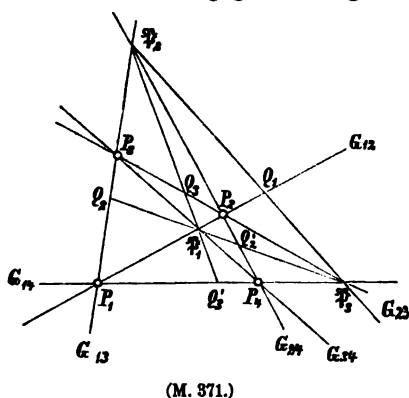
Da \mathfrak{P}_1 sowol auf P_1P_2 als auf P_3P_4 liegt, so lässt sich in der Gleichung dieses Punktes $\mathfrak{P}_1 = 0$ das Trinom \mathfrak{P}_1 sowol aus den Trinomen P_1 und P_2 , als aus P_3 und P_4 linear ableiten, und man hat

$$\mathfrak{P}_1 \equiv a_1P_1 + a_2P_2 \equiv a_3P_3 + a_4P_4 = 0.$$

Aus dieser Identität folgt die weitere

$$a_1P_1 - a_3P_3 \equiv a_4P_4 - a_2P_2.$$

Die beiden Gleichungen $a_1P_1 - a_3P_3 = 0$ und $a_4P_4 - a_2P_2 = 0$ bedeuten also dasselbe; da nun die erste die Gleichung eines Punktes auf P_1P_3 , die



zweite die eines Punktes auf P_2P_4 ist, so sind also die Gleichungen zwei verschiedene Formen der Gleichung des auf den Geraden G_{13} und G_{24} gelegenen Diagonalpunktes \mathfrak{P}_2 , und man hat

$$2. \quad \mathfrak{P}_2 \equiv a_1P_1 - a_3P_3 \equiv a_4P_4 - a_2P_2 = 0.$$

Aus 1. folgt weiter die Identität

$$a_1P_1 - a_4P_4 \equiv a_3P_3 - a_2P_2.$$

Die Gleichung

$$3. \quad \mathfrak{P}_3 \equiv a_1P_1 - a_4P_4 \equiv a_3P_3 - a_2P_2 = 0$$

ist also die Gleichung des auf P_1P_4 und P_3P_2 gelegenen Diagonalpunktes \mathfrak{P}_3 .

Aus 1., 2. und 3. ergeben sich weiter die Identitäten

$$4. \quad \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 \equiv a_1P_1 + a_4P_4; \quad 5. \quad \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 \equiv a_2P_2 + a_3P_3;$$

$$6. \quad \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_3 \equiv a_1P_1 + a_3P_3; \quad 7. \quad \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3 \equiv a_2P_2 + a_4P_4;$$

$$8. \quad \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \equiv a_1P_1 - a_2P_2; \quad 9. \quad \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3 \equiv a_4P_4 - a_3P_3.$$

Nach No. 5. sind die dreimal vier Punkte

$$\alpha) \quad \mathfrak{P}_1 = 0, \quad \mathfrak{P}_2 = 0, \quad \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = 0, \quad \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 = 0;$$

$$\beta) \quad \mathfrak{P}_1 = 0, \quad \mathfrak{P}_3 = 0, \quad \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_3 = 0, \quad \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3 = 0;$$

$$\gamma) \quad \mathfrak{P}_2 = 0, \quad \mathfrak{P}_3 = 0, \quad \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = 0, \quad \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3 = 0$$

harmonisch. Da nun z. B. aus den Identitäten 4. und 5. folgt, dass $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = 0$ und $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 = 0$ die Gleichungen der Punkte der Geraden $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ sind, in welchen dieselbe von den einander gegenüberliegenden Seiten G_{14} und G_{23} geschnitten wird, so ergibt sich: Zwei Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks und die beiden Punkte, in welchen ihre Verbindungsgerade von den beiden gegenüberliegenden Vierecksseiten geschnitten wird, die nicht durch die beiden Diagonalpunkte gehen, sind harmonisch.

Der wesentliche Inhalt dieses Satzes ist von den Schlusssätzen in No. 7 nicht verschieden. Die Bemerkungen über das vollständige Viereck sind aber deswegen noch selbstständig mitgeteilt worden, um das über Punktgleichungen Erörterte in einem einfachen Beispiele anzuwenden.

Sind T_1, T_2, T_3 drei Strahlen eines Büschels, T'_1, T'_2, T'_3 drei Strahlen eines andern Büschels, P_1, P_2, P_3 drei Punkte einer Geraden, P'_1, P'_2, P'_3 drei Punkte einer andern Geraden, und ordnet man in den Büscheln und Geraden die Strahlen und Punkte T_1T'', P_1P' einander zu, für welche die Doppelverhältnisse gleich sind

$$(T_1 T_2 T_3 T) = (T'_1 T'_2 T'_3 T') = (P_1 P_2 P_3 P) = (P'_1 P'_2 P'_3 P'),$$

so nennt man die Büschel und Punktreihen projectiv (oder projectivisch, collinear, homographisch). Die zugeordneten Strahlen und Punkte werden auch entsprechende, insbesondere projectiv entsprechende Elemente der Gebilde genannt, und die projective Verwandtschaft der Strahlenbüschel und Punktreihen, sowie das Entsprechen der einzelnen Strahlen und Punkte durch das Zeichen \asymp ausgedrückt. Man schreibt also

$$T_1 T_2 T_3 T \dots \asymp T'_1 T'_2 T'_3 T' \dots \asymp P_1 P_2 P_3 P \dots \asymp P'_1 P'_2 P'_3 P',$$

sowie

$$T \asymp T' \asymp P \asymp P'.$$

Aus der Definition folgt ohne Weiteres die Bemerkung: Sind zwei Strahlenbüschel oder Punktreihen mit demselben Strahlbüschel oder derselben Punktreihe projectiv, so sind sie unter einander projectiv.

In Rücksicht auf No. 6 folgt ferner: Ein Strahlbüschel $T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 \dots$ und ein geradliniger Querschnitt desselben $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 \dots$ sind projectiv,

und zwar entspricht jedem Strahl des Büschels der auf ihm liegende Punkt des Büschelquerschnitts, $T_4 \asymp P_4$, $T_5 \asymp P_5$, $T_6 \asymp P_6 \dots$

Denn wenn T irgend einen Strahl des Büschels und den darauf liegenden Punkt des Querschnitts bezeichnen, so ist

$$(T_1 T_2 T_3 T) = (P_1 P_2 P_3 P).$$

Ferner folgt: Zwei Querschnitte desselben Büschels sind projectiv und zwar entsprechen sich je zwei Punkte, die auf demselben Strahle liegen, $P_4 \asymp P'_4$, $P'_5 \asymp P_5$, $P_6 \asymp P'_6, \dots$

Zwei Büschel sind projectiv, derer sprechende Strahlen sich in Punkten Geraden schneiden; $T_4 \asymp T'_4$, $T_5 \asymp T'_5$,

Ferner folgt aus der Definition, dass $T_1 T'_1 P_1 P_1$; $T_2 T'_2 P_2 P_2$; $T_3 T'_3 P_3 P_3$ als entsprechende Elemente zu bezeichnen sind. Denn es ist sich aus der Definition des Doppelverhältniss Strahlen und Punktreihen ergibt

$$(T_1 T_2 T_3 T_1) = (T'_1 T'_2 T'_3 T'_1) = (P_1 P_2 P_3 P_1) = (P'_1 P'_2 P'_3 P'_1) = \infty,$$

man hat nämlich z. B.

$$(T_1 T_2 T_3 T_1) = \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} : \frac{\sin T_1 T_1}{\sin T_1 T_2} =$$

Ferner findet sich

$$(T_1 T_2 T'_3 T_2) = (T'_1 T'_2 T'_3 T'_2) = (P_1 P_2 P'_3 P_2)$$

$$(T_1 T_2 T_3 T'_3) = (T'_1 T'_2 T_3 T'_3) = (P_1 P_2 P_3 P'_3)$$

10. Sind $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ die Gleichung oder zweier Punkte einer Geraden, so ist desselben Büschels bez. eines dritten Punktes R_3 die Gleichung $+ a_2 R_2 = 0$, und die Gleichung jedes weiteren Punktes R der Geraden ist

$$R = n_1 a_1 R_1 + n_2 a_2 R_2$$

Das Doppelverhältniss der vier Elemente

$$(R_1 R_2 R_3 R) = \frac{a_2}{a_1} :$$

Sind nun $R'_1 = 0$, $R'_2 = 0$, $R'_3 = b_1 R_3$ entsprechenden Strahlen oder Punkte eines projectiven Punktreihe, so entspricht dem Element R der Geraden die Gleichung ist

$$R' = n_1 b_1 R'_1 + n_2 b_2 R'_2$$

denn es ist $(R'_1 R'_2 R'_3 R') = \frac{b_2}{b_1} : \frac{n_2 b_2}{n_1 b_1}$

11. Sind $R_5 R_6 R_7 R_8$ vier Strahlen des Büschels bez. der Geraden $R_1 R_2 R_3$, und $R'_5 R'_6 R'_7 R'_8$ vier Strahlen des Büschels bez. der Geraden $R'_1 R'_2 R'_3$, und h

1. $R_5 \equiv n_{15}a_1R_1 + n_{25}a_2R_2$
2. $R_6 \equiv n_{16}a_1R_1 + n_{26}a_2R_2$
3. $R_7 \equiv n_{17}a_1R_1 + n_{27}a_2R_2$
4. $R_8 \equiv n_{18}a_1R_1 + n_{28}a_2R_2$
5. $R_5' \equiv n_{15}b_1R_1' + n_{25}b_2R_2'$
6. $R_6' \equiv n_{16}b_1R_1' + n_{26}b_2R_2'$
7. $R_7' \equiv n_{17}b_1R_1' + n_{27}b_2R_2'$
8. $R_8' \equiv n_{18}b_1R_1' + n_{28}b_2R_2'$

so kann man zunächst aus 1. und 2. R_1 und R_2 durch R_5 und R_6 ausdrücken. Man erhält

$$9. \quad R_1 \equiv \frac{n_{26}}{\mu a_1} R_5 - \frac{n_{25}}{\mu a_1} R_6, \quad \mu = n_{15}n_{26} - n_{25}n_{16}.$$

$$R_2 \equiv -\frac{n_{16}}{\mu a_2} R_5 + \frac{n_{15}}{\mu a_2} R_6,$$

Ebenso erhält man aus 5. und 6. R_1' und R_2' durch R_5' und R_6' ausgedrückt:

$$10. \quad R_1' \equiv \frac{n_{26}}{\mu b_1} R_5' - \frac{n_{25}}{\mu b_1} R_6'$$

$$R_2' \equiv -\frac{n_{16}}{\mu b_2} R_5' + \frac{n_{15}}{\mu b_2} R_6'.$$

Setzt man die Werthe 9. in die Formeln 3. und 4., sowie die Werthe 10. in die Formeln 7. und 8. ein, so erhält man nach einigen Umstellungen die Trinome R_7 und R_8 durch R_5 und R_6 , sowie die Trinome R_7' und R_8' durch R_5' und R_6' in folgender Weise ausgedrückt:

$$11. \quad R_7 \equiv \frac{n_{17}n_{26} - n_{27}n_{16}}{\mu} R_5 + \frac{n_{27}n_{15} - n_{17}n_{25}}{\mu} R_6,$$

$$R_8 \equiv \frac{n_{18}n_{26} - n_{28}n_{16}}{\mu} R_5 + \frac{n_{28}n_{15} - n_{18}n_{25}}{\mu} R_6,$$

sowie

$$12. \quad R_7' \equiv \frac{n_{17}n_{26} - n_{27}n_{16}}{\mu} R_5' + \frac{n_{27}n_{15} - n_{17}n_{25}}{\mu} R_6',$$

$$R_8' \equiv \frac{n_{18}n_{26} - n_{28}n_{16}}{\mu} R_5' + \frac{n_{28}n_{15} - n_{18}n_{25}}{\mu} R_6'.$$

Das Doppelverhältniss der vier Elemente $R_5 R_6 R_7 R_8$ ergibt sich aus den Formeln 11. zu:

$$(R_5 R_6 R_7 R_8) = \frac{n_{18}n_{26} - n_{28}n_{16}}{n_{17}n_{26} - n_{27}n_{16}} \cdot \frac{n_{28}n_{15} - n_{18}n_{25}}{n_{27}n_{15} - n_{17}n_{25}}.$$

Dasselbe ergibt sich für das Doppelverhältniss der entsprechenden vier Elemente $R_5' R_6' R_7' R_8'$. Wir haben daher

$$(R_5 R_6 R_7 R_8) = (R_5' R_6' R_7' R_8'),$$

oder den Satz: In zwei projectiven Strahlbüscheln oder Punktreihen ist das Doppelverhältniss von je vier Elementen des einen Gebildes gleich dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Elemente des andern Gebildes.

Insbesondere entsprechen vier harmonische Elemente des einen vier harmonischen des andern Gebildes.

12. Wenn bei zwei concentrischen projectiven Büscheln oder zwei auf derselben Geraden liegenden projectiven Punktreihen drei Paare entsprechender Strahlen oder entsprechender Punkte sich decken, so decken sich die Büschel bez. die Punktreihen, d. h. je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel bez. je zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen liegen aufeinander.

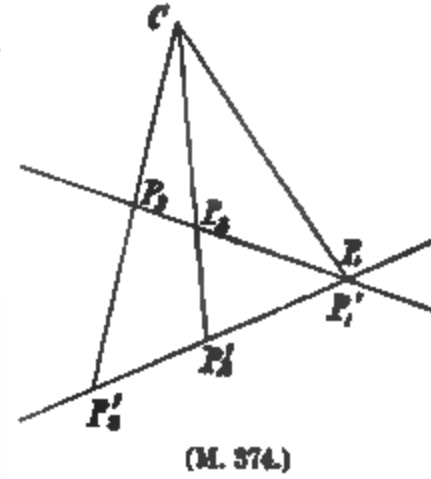
Beweis. Decken sich die entsprechenden Elemente R_i und R_i' , R_k und R_k' , R_l und R_l' , so decken sich auch je zwei Elemente R und R' , für welche die Gleichheit der Doppelverhältnisse besteht:

$$1. \quad (R_i R_k R_l R) = (R_i' R_k' R_l' R).$$

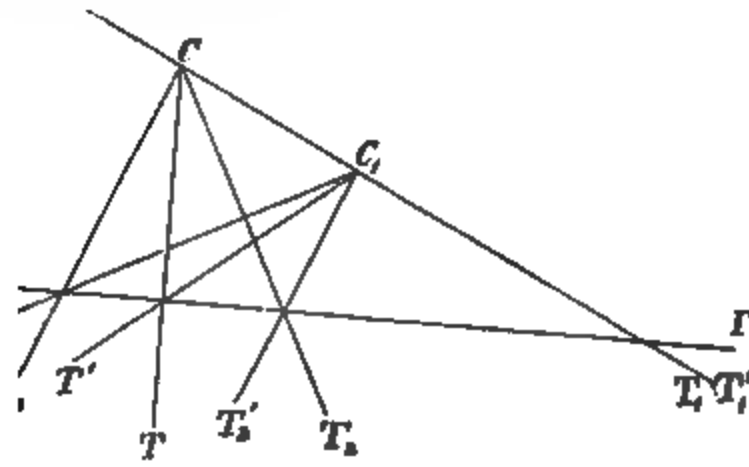
Elemente R dasjenige Element des andern entspricht, für welche die Gleichung 1. bestehend sind.

hiedenen Geraden derselben Ebene
en der Schnittpunkt der beiden Ge-
o sind die Punktfolgen perspectiv,
je zweier entsprechenden Punkte
(der als das gemeinsame Projectionscentrum

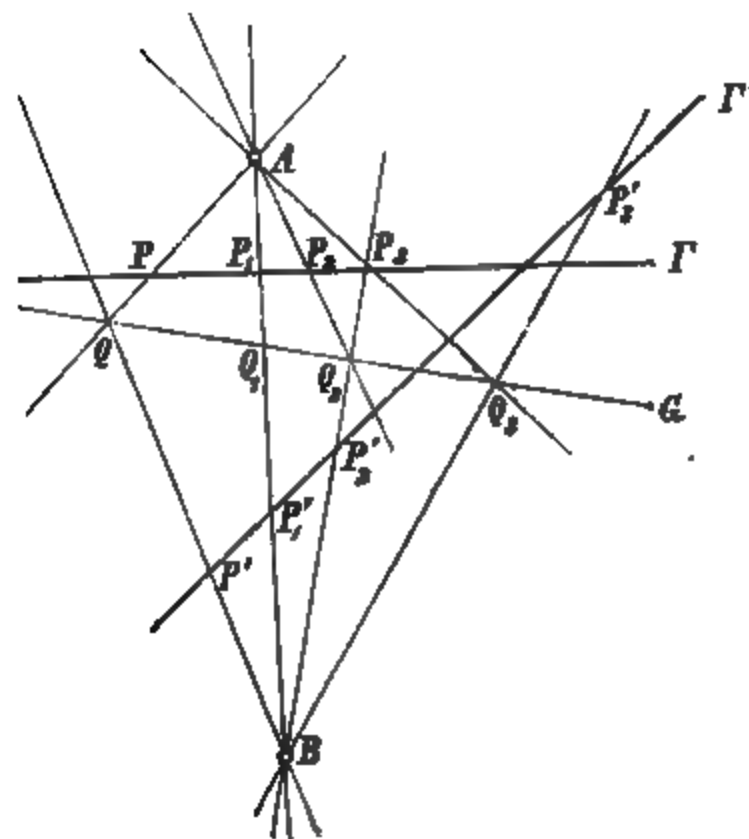
chnittpunkt der
er einen Punkt-
ndern angehört,
l P_1' noch die
man P_2P_2' und
ittpunkt C dieser
einen Reihe, so
: Reihe in einem
: $(P_1'P_2'P_3'P')$,
echende Punkte.



(M. 374.)



(M. 375.)



(M. 376.)

projective Punktreihen oder Strahlbüschel zu ergänzen, d. h. wenn von zwei projectiven Punktreihen oder Strahlbüscheln drei Paare entsprechender Elemente gegeben sind, zu jedem Elemente des einen Gebildes das entsprechende Element des anderen zu finden.

Enthalten die Geraden Γ und Γ' zwei projective Punktreihen, und entsprechen sich die Punkte $P_1 P_2 P_3 \propto P_1' P_2' P_3'$, so nehme man auf der Geraden $P_1 P_1'$ zwei Punkte A und B an, ziehe von A aus Strahlen durch P_2 und P_3 , sowie von B aus Strahlen nach P_2' und P_3' und verbinde Q_2 mit Q_3 durch eine Gerade G . Zieht man nun AP , durchschneidet hiermit G im Punkte Q , und zieht QB , so ist P' der P entsprechende Punkt; denn es ist

$$(P_1 P_2 P_3 P) = (Q_1 Q_2 Q_3 Q) = (P_1' P_2' P_3' P').$$

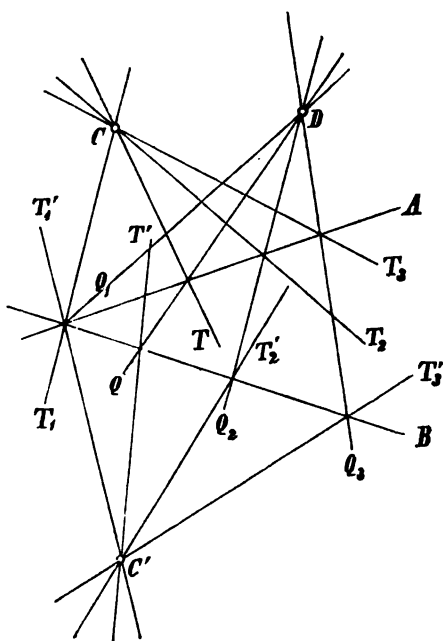
Entsprechen sich in den Büscheln C und C' die Strahlenpaare

$$T_1 T_2 T_3 \propto T_1' T_2' T_3',$$

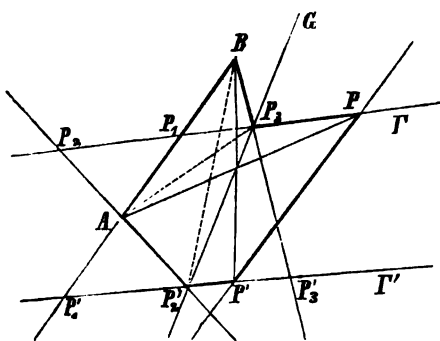
so lege man durch den Schnittpunkt zweier entsprechenden Strahlen T_1 und T_1' zwei Gerade A und B und ziehe die Geraden Q_2, Q_3 , welche die Schnittpunkte von A und B mit je zwei entsprechenden Strahlen T_2, T_2' und T_3, T_3' verbinden. Um den Strahl T' zu erhalten, der T entspricht, lege man durch den Schnittpunkt D von Q_2 und Q_3 einen Strahl Q , der T auf A trifft, und ziehe den Strahl durch C' , der Q auf B trifft. Dies ist der gesuchte Strahl T' , denn man hat $(T_1 T_2 T_3 T) = (Q_1 Q_2 Q_3 Q) = (T_1' T_2' T_3' T')$.

Durch geschickte Wahl der hierbei verwendeten Punktreihen und Strahlbüschel kann man diese Constructionen erheblich vereinfachen. Nimmt man bei der Ergänzung zweier projectiven Punkt-

reihen $P_1 P_2 P_3 \propto P_1' P_2' P_3'$ für die Punkte A und B die Schnittpunkte von $P_1 P_1'$ mit $P_2 P_2'$ und $P_3 P_3'$, so fällt Q_2 mit P_2' und Q_3 mit P_3' , also G mit $P_2' P_3'$ zusammen. Um jetzt zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen zu erhalten, hat man von A und B aus die Punkte der Geraden $P_2' P_3'$ auf $P_1 P_3$ bez. $P_1' P_3'$ zu projeciren. Fügt man zu den fünf Geraden $\Gamma, \Gamma', P_1 P_1', P_2 P_2', P_3 P_3'$ noch die variable Gerade PP' , so erhält man das Sechseck $ABP_3 P P' P_2'$, in welchem A und P, B und P', P_3 und P_2' gegenüberliegende Ecken sind; die Verbindungsgeraden dieser Gegenecken treffen sich in demselben Punkte. Wir erkennen leicht umgekehrt: Wenn von einem Sechsecke vier aufeinander folgende



(M. 377.)



(M. 378.)

leicht umgekehrt: Wenn von einem Sechsecke vier aufeinander folgende

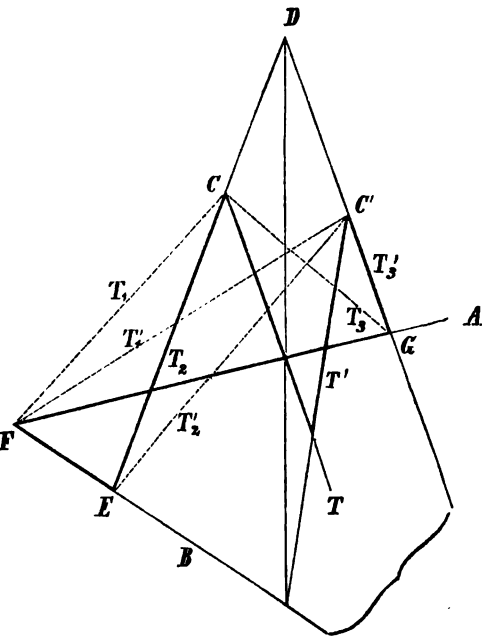
Ecken ($P_3'ABP_3$) und die Richtungen der Seiten Γ und Γ' gegeben sind, auf welchen die fünfte und sechste Ecke liegen, und wenn die sechste Seite dieses Sechsecks sich so bewegt, dass die drei Diagonalen, die je zwei Gegenecken verbinden, durch denselben Punkt gehen, so sind die Reihen der fünften und sechsten Eckpunkte projectiv; dabei entsprechen sich P_1 und P_1' , P_2 und P_2' , P_3 und P_3' . Denn wenn die sechste Seite PP' des Sechsecks sich bewegt, die andern Seiten aber unverändert bleiben, so ändert sich die Diagonale P_3P_2' nicht und die Diagonalen AP und BP' beschreiben Strahlenbüschel mit den Trägern A und B . Da je zwei demselben Sechseck zugehörige Strahlen dieser beiden Büschel sich auf P_3P_2' schneiden, so sind diese Büschel und mithin auch die Reihen der Punkte P und der Punkte P' projectiv.

In den perspectiven Büscheln A und B ist $AP_1 \propto BP_1'$, $AP_2 \propto BP_2'$, $AP_3 \propto BP_3'$, zu den projectiven Reihen der fünften und sechsten Eckpunkte des Sechsecks gehören also die Punktpaare $P_1, P_2, P_3 \propto P_1', P_2', P_3'$.

Ein Sechseck, dessen Diagonalen zwischen Gegenecken sich in einem Punkte treffen, heisst ein BRIANCHON'sches Sechseck.

Zur Ergänzung der projectiven Strahlenbüschel C und C' legen wir die Geraden A und B durch die Punkte T_3T_3' und T_2T_2' ; dann fallen die Gerade Q_2 und Q_3 mit T_2 und T_3' zusammen. Um zwei entsprechende Strahlen T und T' der beiden Büschel zu erhalten, haben wir daher den Schnittpunkt D von T_2 und T_3' aufzusuchen, durch D einen Strahl zu legen und die Schnittpunkte dieses Strahles mit A und B von den Trägern C und C' aus zu projectiren.

Die Geraden A, B, T_2, T, T', T_3' bilden ein Sechseck, in welchem den F Seiten A, B, T_2 der Reihe nach die Seiten T, T', T_3' gegenüber liegen; die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten liegen auf einer Geraden, nämlich auf dem durch D gezogenen variablen Strahle.



(M. 379.)

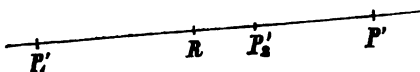
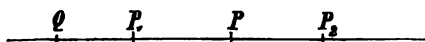
Umgekehrt: Wenn fünf Ecken eines Sechsecks unverändert bleiben und die sechste sich so bewegt, dass die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks sich auf Punkten einer Geraden schneiden, so beschreiben die beiden veränderlichen Seiten des Sechsecks zwei projective Strahlbüschel, in welchem sich die Strahlen entsprechen, die nach den drei festen Ecken gehen, welche nicht Träger der beiden Büschel sind.

Denn wenn die Ecken C, E, F, G, C_1 gegeben sind, so ist auch der Schnittpunkt D der gegenüberliegenden Seiten CE und GC_1 gegeben; die veränderliche Gerade, auf welcher die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten liegen, geht somit durch D . Die beiden variablen Seiten T und T' des Sechsecks projectiren

daher die beiden projectiven Punktreihen, welche von dem Strahlenbüschel D auf A und B ausgeschnitten werden. Ein Sechseck, dessen Gegenseiten sich in Punkten einer Geraden schneiden, heisst ein PASCAL'sches Sechseck.

15. Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse bei zwei projectiven Punktreihen

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P_1' P_3'}{P_3' P_2'} : \frac{P_1' P'}{P' P_2'}$$



(M. 390.)

folgt, wenn man den Quotienten

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1' P_3'}{P_3' P_2'}$$

mit ν bezeichnet, die Gleichung

$$1. \quad \frac{P_1 P}{P P_2} = \nu \frac{P_1' P'}{P' P_2'},$$

die ebenfalls zur Definition der projec-

tiven Verwandtschaft benutzt werden kann. Aus 1. lässt sich ein bemerkenswerther Zusammenhang der Strecken ableiten, um welche die entsprechenden Punkte P und P' von irgend zwei festen Punkten Q und R der beiden Geraden abstehen. Setzt man nämlich $Q P_1 = a$, $Q P_2 = b$; $R P_1' = a'$, $R P_2' = b'$; $Q P = \lambda$, $R P' = \lambda'$; so hat man $P_1 P = \lambda - a$, $P P_2 = b - \lambda$; $P_1' P' = \lambda' - a'$, $P' P_2' = b' - \lambda'$; daher geht 1. über in $(\lambda - a)(b' - \lambda') = \nu(\lambda' - a')(b - \lambda)$.

Multiplicirt und ordnet man, so entsteht hieraus:

2. $(1 - \nu)\lambda\lambda' + (b' - \nu a')\lambda + (a - b\nu)\lambda' - (ab' - \nu a'b) = 0$,
also eine für jede einzelne Länge λ und λ' lineare Gleichung von allgemeinsten Form. Man kann diesen Satz auch umkehren: Wenn die Abstände entsprechender Punkte zweier Punktreihen von zwei festen Punkten beider Reihen einer Gleichung der Form genügen;

3. $\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$,
so sind die Punktreihen projectiv.

Sind zunächst P_1 und P_1' zwei entsprechende Punkte, und setzt man $Q P_1 = \epsilon$, $R P_1' = \epsilon'$, so erfüllen ϵ und ϵ' die Gleichung 3., man hat also

4. $\alpha\epsilon\epsilon' + \beta\epsilon + \gamma\epsilon' + \delta = 0$.

Ferner ist $P_1 P = Q P - Q P_1 = \lambda - \epsilon$, $P_1' P' = R P - R P_1' = \lambda' - \epsilon'$. Setzt man nun $P_1 P = \mu$, $P_1' P' = \mu'$, so ist $\lambda = \mu + \epsilon$, $\lambda' = \mu' + \epsilon'$; nach Einsetzung in 3. entsteht: $\alpha(\mu + \epsilon)(\mu' + \epsilon') + \beta(\mu + \epsilon) + \gamma(\mu' + \epsilon') + \delta = 0$, oder besser geordnet:

5. $\alpha\mu\mu' + (\beta + \alpha\epsilon)\mu + (\gamma + \alpha\epsilon')\mu' + (\alpha\epsilon\epsilon' + \beta\epsilon + \gamma\epsilon' + \delta) = 0$.

Da nun ϵ und ϵ' der Gleichung 4. genügen, so vereinfacht sich 5. auf

6. $\alpha\mu\mu' + (\beta + \alpha\epsilon)\mu + (\gamma + \alpha\epsilon')\mu' = 0$.

Sind $P_2 P_2'$ und $P_3 P_3'$ zwei Paare entsprechender Punkte, so hat man ausser der Gleichung 6. noch die beiden Gleichungen

7. $\alpha\mu_2\mu_2' + (\beta + \alpha\epsilon')\mu_2 + (\gamma + \alpha\epsilon)\mu_2' = 0$,

8. $\alpha\mu_3\mu_3' + (\beta + \alpha\epsilon')\mu_3 + (\gamma + \alpha\epsilon)\mu_3' = 0$.

Die Gleichungen 6., 7., 8. kann man als lineare Gleichungen für die Grössen α , $(\beta + \alpha\epsilon')$, $(\gamma + \alpha\epsilon)$ ansehen; ihr Zusammenbestehen bedingt das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \mu & \mu' & \mu \\ \mu_2\mu_2' & \mu_2 & \mu_2' \\ \mu_3\mu_3' & \mu_3 & \mu_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Division der Zeilen durch $\mu\mu'$, $\mu_2\mu_2'$, $\mu_3\mu_3'$ erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 : \mu \\ 1 : \mu_2 \\ 1 : \mu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Zeile von der ersten und die dritte von der zweiten der Determinante nicht; man erhält

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\mu_2'}, & \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2} \\ -\frac{1}{\mu_3'}, & \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3} \\ & \frac{1}{\mu_3} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\frac{1}{\mu_3} = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2} \right) \left(\frac{1}{\mu_2'} - \frac{1}{\mu_3'} \right), \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\mu_3} = \frac{\mu_2 - \mu}{\mu} \cdot \frac{\mu_2' - \mu_3'}{\mu_2'}.$$

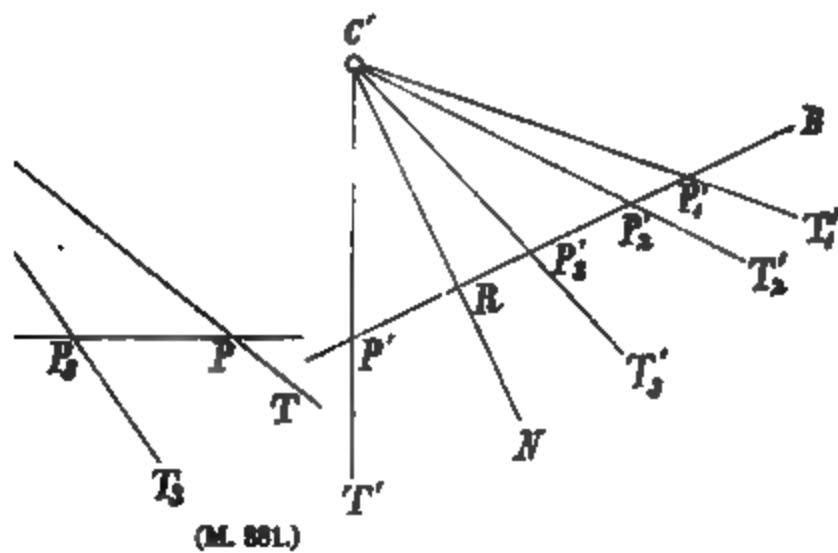
Setzt man $\mu_2 = P_1 P_3$, $\mu' = P_1' P_3'$, $\mu_2' = P_1' P_2'$,
 $\mu = P P_3$, $\mu_2 - \mu = P_3 P_2$, $\mu_2' - \mu' = P' P_2'$,
 über in:

$$\frac{P_3 P_2}{P_1 P_3} = \frac{P P_2}{P_1 P} \cdot \frac{P_2' P_3'}{P_1' P_3'},$$

$$\frac{P_1 P}{P P_3} = \frac{P_1' P_3'}{P_3' P_2'} \cdot \frac{P_1' P_2'}{P' P_2'},$$

Punktreihen projectiv.

Man kann sich bei projectiven Büscheln



Man kann immer so wählen, dass auch bezüglich der ersten Büschel die Formeln gelten:

$$\frac{1}{\lambda}, \quad \tan NT' = \tan \frac{RP'}{C'R},$$

$$CQ = m, \quad C'R = n, \quad MT = \varphi, \quad NT' = \varphi',$$

$$\tan \varphi, \quad \lambda' = n \tan \varphi'.$$

Die Punktreihen sind projectiv, also besteht zwischen λ und λ'

$$\beta \lambda + \gamma \lambda' + \delta = 0.$$

Man setzt ein, so geht die Gleichung 2. über in

$$\beta m \tan \varphi + \gamma n \tan \varphi' + \delta = 0.$$

Die Tangenten der Winkel, welche je zwei

entsprechende Strahlen zweier projectiven Büschel mit beliebigen festen (Null-) Strahlen der beiden Büschel bilden, genügen einer Gleichung, die für jede der beiden Tangenten linear ist.

Umgekehrt: Sind je zwei Strahlen zweier Büschel durch eine Gleichung von der Form verbunden:

$$4. \quad a \tan \varphi \tan \varphi' + b \tan \varphi + c \tan \varphi' + d = 0,$$

so sind die Büschel projectiv. Denn legt man Gerade A und B normal zu den Nullstrahlen, so hat man die Formeln 1., also

$$\frac{a}{mn} \lambda \lambda' + \frac{b}{m} \lambda + \frac{c}{n} \lambda' + d = 0.$$

Die Punktreihen auf A und B sind daher projectiv, und folglich auch die Strahlbüschel C und C' .

17. Bei zwei projectiven Punktreihen entspricht dem unendlich fernen Punkte jeder Reihe ein bestimmter, im Allgemeinen nicht unendlich ferner Punkt der andern Reihe. Diese beiden, den unendlich fernen entsprechenden Punkte, heissen die Gegenpunkte (G und H) der Reihen. Aus der Gleichung

$$1. \quad \alpha \lambda \lambda' + \beta \lambda + \gamma \lambda' + \delta = 0$$

folgen durch Division mit λ und λ' die Gleichungen

$$2. \quad \alpha \lambda' + \beta + \gamma \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\delta}{\lambda} = 0,$$

$$3. \quad \alpha \lambda + \beta \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} + \gamma + \frac{\delta}{\lambda'} = 0.$$

Setzt man in 2. $\lambda = \infty$, und in 3. $\lambda' = \infty$, so erhält man aus 2. und 3. die Abstände λ' und λ der Gegenpunkte H und G von den Nullpunkten zu

$$4. \quad \lambda' = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \lambda = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Wir wollen dieselben mit h und g bezeichnen. Ist $\alpha = 0$, so werden die Gegenpunkte unendlich fern; es entsprechen sich dann die unendlich fernen Punkte beider Reihen. Aus No. 15, 2 folgt, dass dann $v = 1$ sein muss, d. h. es ist

$$P_1 P : P P_2 = P_1' P' : P P_2'. \text{ Hieraus folgt weiter:}$$

$$5. \quad P_1 P : (P_1 P + P P_2) = P_1' P' : (P_1' P' + P' P_2').$$

Setzt man das Verhältniss der Strecken $(P_1 P + P P_2) : (P_1' P' + P' P_2')$ $= P_1 P_2 : P_1' P_2' = k$, so hat man aus 5.

$$6. \quad P_1 P : P_1' P' = k, \quad P_1 P = k \cdot P_1' P'.$$

Es haben also je zwei entsprechende Strecken $P_1 P$ und $P_1' P'$ ein constantes Verhältniss. Zwei Punktreihen, deren Punkte sich derart entsprechen, heissen ähnlich. Wir haben daher den Satz: Projective Punktreihen, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen, sind ähnlich.

Ist noch ausserdem $P_1 P_2 = P_1' P_2'$, so ist auch für je zwei entsprechende Punkte $P_1 P = P_1' P'$; legt man die Punktreihen auf einander und vereint $P_1 P_2$ mit $P_1' P_2'$, so decken sich daher auch je zwei entsprechende Punkte P und P' ; die Punktreihen sind also congruent.

Wählt man die Gegenpunkte G und H als Nullpunkte, so ergibt sich für die Abstände GP und HP' eine Gleichung von der Form 1., aus welcher aber für GG und HH der Werth Null hervorgehen muss, d. h. es muss (nach 4.) $\beta = \gamma = 0$ sein. Für die Strecken zwischen den Gegenpunkten und je zwei entsprechenden Punkten zweier projectiven Punktreihen besteht also die einfache Beziehung

$$7. \quad GP \cdot HP' = -\frac{\delta}{\alpha},$$

d. i. das Produkt dieser Strecken ist constant.

18. Die Frage nach den Gegenpunkten projectiver Reihen lässt sich auch als die Frage nach entsprechenden unendlich grossen Strecken auffassen (d. i. nach unendlich grossen Strecken, deren Endpunkte sich paarweis entsprechen). Man wird nun erkennen, dass dieser Untersuchung über die Gegenpunkte projectiver Reihen für projective Büschel die Frage nach entsprechenden rechten Winkeln zur Seite gestellt werden kann (d. i. nach rechten Winkeln, deren Schenkel sich paarweis entsprechen).

Wir wählen der Einfachheit wegen entsprechende Strahlen zu Nullstrahlen; dann muss die Gleichung $a \tan \varphi \tan \varphi' + b \tan \varphi + c \tan \varphi' + d = 0$ derart sein, dass dem Werthe $\varphi = 0$ der Werth $\varphi' = 0$ zugehört, die Gleichung nimmt also die Form an:

$$1. \quad a \tan \varphi \tan \varphi' + b \tan \varphi + c \tan \varphi' = 0.$$

Gesetzt nun, T und T' seien entsprechende Schenkel sich entsprechender rechter Winkel; dann müssen sich auch die Strahlen T_0 und T'_0 entsprechen, für welche $\varphi_0 = \varphi + 90^\circ$, $\varphi'_0 = \varphi' + 90^\circ$, es muss also auch die Gleichung erfüllt sein:

$$a \tan(\varphi + 90^\circ) \tan(\varphi' + 90^\circ) + b \tan(\varphi + 90^\circ) + c \tan(\varphi' + 90^\circ) = 0.$$

Da nun $\tan(\varphi + 90^\circ) = -1 : \tan \varphi$, $\tan(\varphi' + 90^\circ) = -1 : \tan \varphi'$, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{a}{\tan \varphi \tan \varphi'} - \frac{b}{\tan \varphi} - \frac{c}{\tan \varphi'} = 0,$$

woraus nach Multiplication mit $\tan \varphi \tan \varphi'$ entsteht:

$$2. \quad a - b \tan \varphi' - c \tan \varphi = 0.$$

Die Werthe φ und φ' , welche wir suchen, sind daher die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen 1. und 2. Dieses System besteht aus einer Gleichung zweiten Grades (1) und einer linearen Gleichung (2), hat also zwei Auflösungen.

Gesetzt $\varphi = \alpha$, $\varphi' = \alpha'$ sei eine Auflösung des Systems, es seien also die Gleichungen identisch erfüllt

$$3. \quad a \tan \alpha \tan \alpha' + b \tan \alpha + c \tan \alpha' = 0.$$

$$4. \quad a - b \tan \alpha' - c \tan \alpha = 0.$$

Hebt man aus beiden Gleichungen den Faktor $\tan \alpha \tan \alpha'$ aus, so entsteht

$$5. \quad \tan \alpha \tan \alpha' \left(a + \frac{b}{\tan \alpha'} + \frac{c}{\tan \alpha} \right) = 0.$$

$$6. \quad \tan \alpha \tan \alpha' \left(\frac{a}{\tan \alpha \tan \alpha'} - \frac{b}{\tan \alpha} - \frac{c}{\tan \alpha'} \right) = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen im Vergleich mit 2. und 1., dass auch die Werthe $\tan \varphi = -1 : \tan \alpha$, $\tan \varphi' = -1 : \tan \alpha'$,

d. i. die Strahlen, die mit den Nullstrahlen die Winkel $\alpha + 90^\circ$, $\alpha' + 90^\circ$ bilden, den Gleichungen 1. und 2. genügen. Wir sehen hieraus, dass zwei projective Büschel immer ein und im Allgemeinen auch nur ein Paar entsprechende rechte Winkel haben.

Haben zwei projective Büschel mehr als ein Paar entsprechende rechte Winkel, so haben die Gleichungen 3. und 4. mehr als zwei Lösungen; dies ist aber nur dann möglich, wenn sie identisch sind; letzteres tritt nur dann ein, wenn $a = 0$ und $b = -c$. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung der Pro-

jectivität (1) zu $\delta(\tan \varphi - \tan \varphi') = 0$, und liefert für je zwei entsprechende Strahlen $\tan \varphi = \tan \varphi'$, d. i. je zwei entsprechende Strahlen bilden mit zwei festen entsprechenden Strahlen gleiche Winkel, die Büschel sind also congruent.

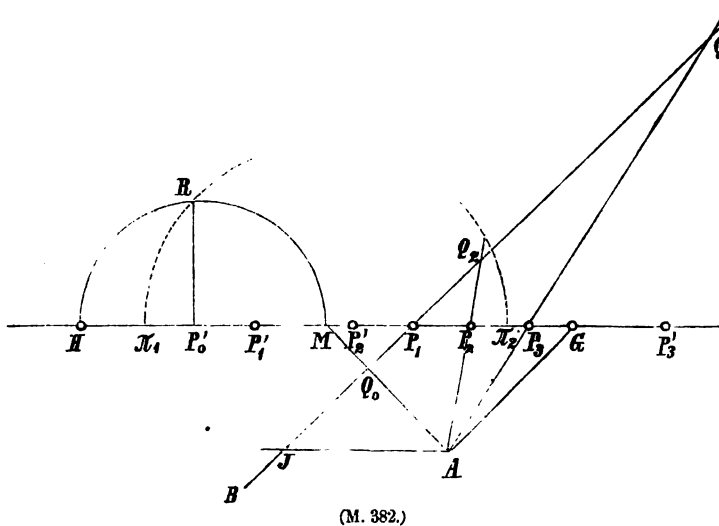
19. Wenn zwei projective Punktreihen denselben Träger haben, (d. i. auf derselben Geraden liegen), so fragt es sich, ob und wie oft es sich ereignet, dass zwei entsprechende Punkte zusammenfallen.

Da ein Doppelverhältniss sich nicht ändert, wenn alle vier darin auftretende Strecken das Zeichen wechseln, so kann man den positiven Sinn einer Punktreihe nach Bedarf wechseln, ohne ihre projective Beziehung zu einer anderen Punktreihe zu stören. Wir können daher unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen die positiven Richtungen übereinstimmen.

Wir bestimmen zunächst die Gegenpunkte G und H . Hierzu, wie auch zur Ergänzung der Punktreihen kann folgendes Verfahren angewandt werden:

Sind $P_1P_2P_3 \sim P'_1P'_2P'_3$, so ziehe man durch P_1 eine Gerade B und mache $P_1Q_2 = P'_1P'_2$, $P_1Q_3 = P'_1P'_3$; die Punktreihen $P_1P_2P_3$ und $P_1Q_2Q_3$

sind perspectiv (No. 13) und der Schnittpunkt A der Geraden P_2Q_2 und P_3Q_3 ist ihr gemeinsames Projectionscentrum. Zieht man nun AG parallel B , so entspricht G dem unendlich fernen Punkte auf B , also auch dem unendlich



fernen der Reihe $P'_1P'_2P'_3$; zieht man ferner AJ parallel P_1P_3 , so trifft AJ die Gerade P_1P_3 in einem unendlich fernen Punkte, J ist also der Punkt der Reihe B , welcher dem unendlich fernen Punkte der Reihe $P_1P_2P_3$ entspricht; macht man nun $P'_1H = P_1J$, so ist H der Gegenpunkt der Reihe $P'_1P'_2P'_3$.

Nach No. 17 hat man für je zwei entsprechende Punkte

$$1. \quad GP \cdot HP' = GP_1 \cdot HP'_1, \text{ oder} \\ GP(GP' - GH) = GP_1 \cdot HP'_1.$$

Ist nun Π ein Doppelpunkt beider projectiven Reihen, d. i. ein Punkt, der mit dem ihm entsprechenden zusammenfällt, so gilt für denselben die Gleichung:

$$2. \quad G\Pi(G\Pi - GH) = GP_1 \cdot HP'_1, \text{ woraus folgt} \\ (G\Pi - \frac{1}{2}GH)^2 = GP_1 \cdot HP'_1 + \frac{1}{4}GH^2.$$

Ist M die Mitte von GH , so ist $GM = MH = \frac{1}{2}GH$; ist ferner P'_0 der Punkt der Reihe $P'_1P'_2P'_3$. . ., welcher dem Punkte M , als Punkt der Reihe $P_1P_2P_3$ betrachtet, entspricht (man findet P'_0 , indem man MA zieht und

$P_1'P_0' = P_1Q_0$ macht), so ist $GP_1 \cdot HP_1' = GM \cdot HP_0' = MH \cdot HP_0'$; man hat daher aus 2.:

$$3. \quad (G\Pi - GM)^2 = MH(MH + HP_0').$$

Setzt man hier $M\Pi$ für $G\Pi - GM$, und MP_0' für $MH + HP_0'$, so hat man schliesslich

$$4. \quad M\Pi^2 = MH \cdot MP_0'.$$

Die Gleichung wird durch keinen realen Werth von $M\Pi$ erfüllt, wenn das Produkt $MH \cdot MP_0'$ ein negatives Zeichen hat, d. i. wenn H und P_0' auf verschiedenen Seiten von M liegen.

Finden sich P_0' und H auf derselben Seite von M , so construïre man das geometrische Mittel aus MH und MP_0' (indem man über MH einen Halbkreis construïrt, und in P_0' ein Loth zu HM bis an den Halbkreis errichtet); die Strecke MR trage man von M aus nach beiden Seiten auf der Geraden ab; dann sind Π_1 und Π_2 die gesuchten Doppelpunkte.

Wie man sieht, haben die Strecke zwischen den Gegenpunkten und die Strecke zwischen den Doppelpunkten zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen eine gemeinsame Mitte.

20. Zwei auf einander liegende projective Strahlbüschel, d. i. zwei Strahlbüschel mit gemeinsamem Träger, schneide man durch eine Gerade A ; diese Gerade wird von den entsprechenden Strahlen der beiden Büschel in entsprechenden Punkten zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen getroffen.

Haben die Strahlbüschel Doppelstrahlen, d. i. zusammenfallende entsprechende Strahlen, so haben die Punktreihen Doppelpunkte, und durch die Doppelpunkte der beiden Reihen gehen die Doppelstrahlen der beiden Büschel.

21. Ist bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen das Produkt $GP \cdot HP'$ entgegengesetzt gleich dem Quadrat der Strecke GM , so fällt M mit P_0' zusammen und es ist $M\Pi_1 = \Pi_2M = 0$; die beiden Doppelpunkte fallen also dann mit M zusammen.

22. Liegen die Gegenpunkte zusammen, so ist $MH = 0$, $MP_0' = \infty$; die Gleichung No. 17, 7 vereinfacht sich alsdann zu

$$GP \cdot GP' = GP_1 \cdot GP_1', \text{ also für Doppelpunkte } \Pi \text{ gilt } G\Pi^2 = GP_1 \cdot GP_1'.$$

Man sieht hieraus: Wenn bei zwei auf einander liegenden projectiven Punktreihen die Gegenpunkte zusammenfallen, so giebt es zwei oder keine Doppelpunkte, je nachdem zwei entsprechende Punkte auf gleicher Seite des Gegenpunktes liegen oder nicht.

Jeder Punkt der Geraden, auf welcher die beiden Punktreihen vereint liegen, ist sowol ein Punkt der Reihe $P_1P_2P_3 \dots$ als auch der Reihe $P_1'P_2'P_3'$; bezeichnen wir einen Punkt, sofern er zur ersten Reihe gehört, mit P , und, sofern er zur andern gehört, mit P' , und sind P_i' und P_k die ihnen entsprechenden Punkte, so hat man, wenn die Gegenpunkte zusammenfallen, zunächst

$$GP_k \cdot GP_k' = GP_i \cdot GP_i'.$$

Da nun $GP_i = GP_k'$, so folgt, dass auch $GP_k = GP_i'$.

Wir erhalten daher den Satz: Wenn zwei projective Punktreihen so auf einander liegen, dass die Gegenpunkte zusammenfallen, so entspricht jedem Punkte der Geraden ein und derselbe Punkt, gleichgültig, zu welcher der beiden Reihen man den Punkt zählt.

Von projectiven Reihen, die derart auf einander liegen, sagt man, dass sie involutorisch liegen und das Punktgebilde, das sie zusammen bilden, heisst eine quadratische Punktinvolution. In gleicher Weise gelangt man zu

liegenden Strahlenbüscheln und erkennt, dass die involuto-
weier Strahlenbüschel eintritt, wenn zwei nicht ent-
genstrahlen zusammenfallen.

schen Involutionen werden wir uns im nächsten Abschnitt von
sichtspunkte ausgehend beschäftigen.

Die quadratische Punkt- und Strahleninvolution.

an sich die Punkte einer Punktreihe einzeln, unabhängig von
über die Punktreihe nichts geometrisch zu bemerken. Ein
eresse entsteht erst, indem man zwei solche Punktreihen zu
projective) Beziehung setzt, indem man jedem Punkte der einen
mehrere bestimmte Punkte der anderen zuordnet.

nun aber die Punkte einer Geraden auch nach bestimmten
ien (oder dreien etc.) in Gruppen vereinigen; dann wird diese
ruppen einen Gegenstand für geometrische Untersuchungen

ian den Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden von
punkte Q mit λ , so kann man die n Werthe von λ , welche den
unktigen Gruppe zugehören, als die Wurzeln einer Gleichung
hen

$$= a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

für die Punkte einer zweiten Gruppe seien die Wurzeln der

$$= b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0.$$

man mit Hülfe zweier realer Zahlen r_1 und r_2 die Gleichung
bilden

$$r_1 M_1 + r_2 M_2 = 0.$$

Gleichung ist eine neue Gruppe von n Punkten definirt. Um
rhalten, zu denen ein bestimmter Punkt P_0 gehört, hat man den
h λ_0 in 3. einzusetzen und dann das Verhältniss r_1 und r_2 zu
ichnet man die Werthe, welche die Polynome M_1 und M_2 ,
man statt λ darin den bestimmten Werth λ_0 setzt, mit M_{10} und
 $r_1 M_{10} + r_2 M_{20} = 0$, also folgt für das Verhältniss $r_1 : r_2$,
immer Werth; man kann nehmen $r_1 = M_{20}$, $r_2 = -M_{10}$.
r Gruppenbildung gehört also jeder Punkt der Geraden nur zu
l wenn man das Verhältniss $r_1 : r_2$ die reale Zahlenreihe durch
hält man durch die Gleichung 3. alle Gruppen auf der Geraden.
he, deren Punkte in dieser Weise in Gruppen von je n Punkten
nt man eine Involution n ten Grades.

ben Mitgetheilten hat man den Satz:

Gruppen einer Involution n ten Grades gegeben sind,
le anderen Gruppen bestimmt.

les kann man über Strahlbüschel bemerken.

an mit φ den Winkel eines Strahles mit einem festen Nullstrahle,
ie Strahlen einer n strahligen Gruppe durch eine Gleichung
iren:

$$\text{tang}^n \varphi + a_1 \text{tang}^{n-1} \varphi + \dots + a_{n-1} \text{tang} \varphi + a_n = 0.$$

Gruppe werde definirt durch die Gleichung

$$\text{tang}^n \varphi + b_1 \text{tang}^{n-1} \varphi + \dots + b_{n-1} \text{tang} \varphi + b_n = 0.$$

gnete Wahl der Zahlen r_1 und r_2 mittelst der Formel

$$M_1 + r_2 M_2 = 0$$

en. Ein Büschel, dessen Strahlen so in n strahlige eine Strahleninvolution n ten Grades.

uf Punkt- und Strahleninvolutionen zweiten

olutionen sind M_1 und M_2 quadratische Functionen

$$\lambda + a_2, \quad M_2 = b_0 \lambda^2 + 2b_1 \lambda + b_2,$$

utionen ist

$$p + a_2, \quad M_2 = b_0 \tan^2 \varphi + 2b_1 \tan \varphi + b_2.$$

h dem Punkte einer quadratischen Punktinvolution,

Punkte der Geraden zusammen ein Paar bildet.

s $r_1 : r_2$ so zu wählen, dass die Gleichung

$$M_1 + r_2 M_2 = 0$$

hat. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

ntlich

$$= -\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}}.$$

onalen Theil, so findet man

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} - \frac{1}{16} \cdot \frac{\alpha^3\gamma^3}{\beta^6} - \dots$$

enthalten höhere Potenzen von α , als die dritte.

wurzeln der quadratischen Gleichung

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \frac{1}{16} \cdot \frac{\alpha^2\gamma^3}{\beta^5} - \dots)$$

$$-\frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} - \dots$$

$$-\frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3} + \dots$$

wird unendlich gross, wenn $\alpha = 0$; die andere 2β an.

eine unendlich grosse Wurzel haben, so muss der

n, d. i. es muss die Gleichung gelten

$$r_1 a_0 + r_2 b_0 = 0,$$

as Verhältniss von $r_1 : r_2$ ankommt, die Werthe

$$= b_0, \quad r_2 = -a_0.$$

erthe reducirt sich 1. auf die lineare Gleichung:

$$a_0 b_1 \lambda + (a_2 b_0 - a_0 b_2) = 0,$$

$$= -\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)}.$$

bestimmte Punkt heisst der Centralpunkt der

bezeichnet werden. Wählt man den Centralpunkt

bigen Nullpunktes Q), so müssen die Coefficienten

in, dass der in 4. gegebene Werth von λ ver-

lig, dass $a_0 : b_0 = a_2 : b_2$; unbeschadet der All-

, $a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2$. Daher lauten die Gleichungen

$$2a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad M_2 = a_0 \lambda^2 + 2b_1 \lambda + a_2 = 0,$$

$$- 2(r_1 a_1 + r_2 b_1) \lambda + (r_1 + r_2) a_2 = 0.$$

Setzt man die Wurzeln von $M = 0$ mit λ' und λ'' , so wird

$$\lambda' \cdot \lambda'' = OP \cdot OP' = \frac{(r_1 + r_2) a_2}{(r_1 + r_2) a_0} = \frac{a_2}{a_0}.$$

folgt der Satz: Das Produkt der Abstände der beiden Paare einer quadratischen Punktinvolution vom Centralconstant.

Nachdem der Quotient $a_2 : a_0$ positiv oder negativ ist, liegen je zwei Paare auf derselben Seite des Centralpunktes oder nicht.

Die Formel 5. mit § 6, No. 21 lehrt, dass die dort gegebene quadratische Involution mit der aus einem allgemeineren Gesichtspunkte aufgestellten gleichbedeutend ist.

Wir fragen nun nach solchen Punktpaaren einer Involution, deren beiden Punkte vereinigt liegen (in einen Punkt zusammenfallen).

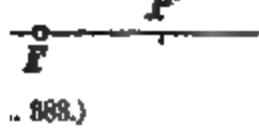
Man kann offenbar nur dann eintreten, wenn die Punkte jedes Paares auf der Seite des Centrums O liegen, wenn also das constante Produkt $OP \cdot OP'$

(der Involution) positiv ist. Bezeichnet λ den Abstand eines zusammenfallenden Punktes bestehenden Paares vom Centrum, so bestimmt

$$5. \text{ der vorigen Nummer aus } \lambda^2 = OP \cdot OP'.$$

Wenn die Potenz einer quadratischen Involution positiv, so liegen zwei Paare, deren Punkte vereinigt liegen; diese Paare liegen auch zum Centrum; man bezeichnet sie als die Asymptotenpunkte

der Involution.



.. 288.)

Sind F und F_1 die Asymptotenpunkte, O das Centrum,

P und P' ein Punktpaar einer quadratischen Involution,

so ist also $OF^2 = OF_1^2 = OP \cdot OP'$, $F_1O = OF$.

1. $PF_1 = PO - F_1O$, 3. $PF = PO + OF$,
2. $FP' = FO + OP'$, 4. $F_1P' = F_1O - P'O$.

Multiplikation der Formeln 1. und 2., sowie 3. und 4. folgt

$$FP' = PO \cdot OP' - FO \cdot F_1O + PO \cdot FO - OP' \cdot F_1O,$$

$$F_1P' = -PO \cdot P'O + OF \cdot F_1O + PO \cdot F_1O - OF \cdot P'O.$$

$$PO \cdot OP' = FO \cdot OF = FO \cdot F_1O, \text{ so folgt}$$

$$PF_1 \cdot FP' = PO \cdot FO - OP' \cdot F_1O,$$

$$PF \cdot F_1P' = PO \cdot F_1O - OF \cdot P'O.$$

$$\text{ist } PO \cdot FO - OP' \cdot F_1O = -(PO \cdot F_1O - P'O \cdot OF).$$

$$PF_1 \cdot FP' = -PF \cdot F_1P', \text{ oder } PF : FP' = -PF_1 : F_1P'.$$

gibt den Satz: Je zwei Punkte eines Paares einer quadratischen Involution mit positiver Potenz liegen harmonisch zu den Asymptotenpunkten der Involution.

Die Formel $OP \cdot OP' = OP_1 \cdot OP_1'$ lehrt eine Involution zu konstruieren, d. i. aus zwei gegebenen Punktpaaren einer quadratischen Involution die Involution und den zu jedem Punkte der Geraden zugehörigen Punkt zu bestimmen.

Zeichnen wir die beiden Kreise, die durch einen beliebig gewählten Punkt A und durch die Punkte je eines der beiden gegebenen Paare P_1P_1' , P_2P_2' bestimmt sind, so schneiden diese sich noch in einem Punkte B (der im Berührungspunkte der beiden Kreise als unendlich nahe bei A anzusehen ist).

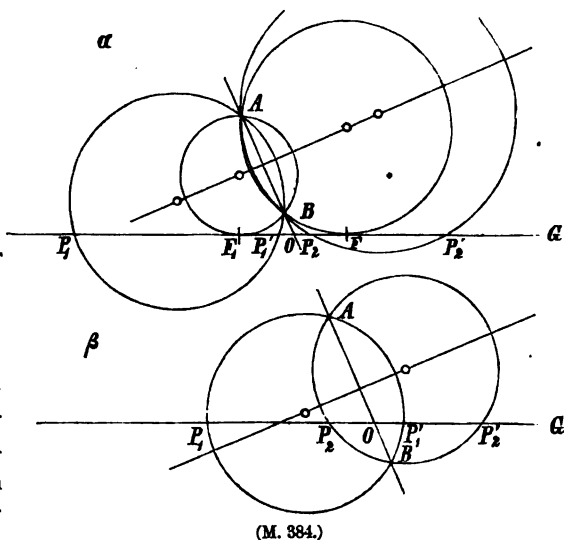
Die Gerade AB trifft die Gerade G im Centrum der Involution, denn nach den bekannten planimetrischen Sätzen $OP_1 \cdot OP_1' = OA \cdot OB = OP_2 \cdot OP_2'$.

Um nun zu einem Punkte P den zugehörigen zu bestimmen, construiren wir den Kreis PAB ; der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden G ist der gesuchte Punkt P' , denn es ist

$$OP \cdot OP' = OP_1 \cdot OP_1'.$$

Construiren wir die beiden Kreise, welche durch A und B gehen und G berühren, so sind die Berührungspunkte die Asymptotenpunkte der Involution; wir erhalten sie bekanntlich, indem wir OF ($= F_1O$) als das geometrische Mittel aus OA und OB construiren.

6. Wir wollen nun untersuchen, ob es in einer Strahleninvolution Strahlenpaare giebt, deren Strahlen auf einander senkrecht stehen.



(M. 384.)

Bestimmen sich die Winkel φ , welche die Strahlen zweier Paare N_1 und N_2 mit einem festen Nullstrahle bilden, aus den beiden quadratischen Gleichungen

$$1. \quad N_1 \equiv a_0 \tan^2 \varphi + 2a_1 \tan \varphi + a_2 = 0,$$

$$2. \quad N_2 \equiv b_0 \tan^2 \varphi + 2b_1 \tan \varphi + b_2 = 0,$$

so erhält man bekanntlich (No. 2) die Winkel φ jedes Strahlenpaares durch geeignete Wahl der Zahlen r_1 und r_2 aus den Wurzeln der Gleichung

$$3. \quad N \equiv r_1 N_1 + r_2 N_2 = 0.$$

Soll diese Gleichung durch zwei auf einander senkrechte Strahlen erfüllt werden, so gilt, wenn φ und φ' der Gleichung genügen, die Beziehung

$$\tan \varphi' = \tan(\varphi + 90^\circ) = -1 : \tan \varphi, \text{ oder}$$

$$4. \quad \tan \varphi' \cdot \tan \varphi = -1.$$

Die Gleichung 3. lautet vollständig ausgeschrieben:

$$N \equiv (r_1 a_0 + r_2 b_0) \tan^2 \varphi + 2(r_1 a_1 + r_2 b_1) \tan \varphi + (r_1 a_2 + r_2 b_2) = 0.$$

Das Produkt ihrer Wurzeln ist $(r_1 a_2 + r_2 b_2) : (r_1 a_0 + r_2 b_0)$; dies soll nach 4. gleich der negativen Einheit sein; daher hat man die Bedingungsgleichung:

$$\frac{r_1 a_2 + r_2 b_2}{r_1 a_0 + r_2 b_0} = -1, \text{ aus welcher folgt:}$$

$$5. \quad r_1 (a_0 + a_2) + r_2 (b_0 + b_2) = 0.$$

Da es nur auf das Verhältniss der Zahlen r_1, r_2 ankommt, so kann man setzen

$$6. \quad r_1 = b_0 + b_2, \quad r_2 = -(a_0 + a_2).$$

Hieraus folgt: In jeder quadratischen Strahleninvolution giebt es ein und nur ein Paar auf einander senkrechte Strahlen; diese Strahlen werden als die Achsen der Involution bezeichnet.

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Gleichung 5. identisch erfüllt ist, d. i. wenn $a_2 = -a_0, b_2 = -b_0$; dann sind die Strahlen der Paare N_1, N_2 , sowie überhaupt die Strahlen jedes Paares auf einander senkrecht. Eine solche Strahleninvolution wird als Kreissystem bezeichnet.

7. Die Gleichung, durch welche die Achsen bestimmt werden, ergiebt sich durch Einsetzung der Werthe 6. in $N = 0$ zu:

$a_2 b_0) \tan^2 \varphi + 2[a_1(b_0 + b_2) - b_1(a_0 + a_2)] \tan \varphi - (a_0 b_2 - a_2 b_0) = 0$.
 n eine Achse zum Nullstrahl, so muss diese Gleichung die beiden
 üben $\tan \varphi = 0$ und $\tan \varphi = \infty$; beides tritt ein, wenn $a_0 b_2 - a_2 b_0 = 0$.
 Beschränkung der Allgemeinheit kann man setzen $a_0 = b_0$, $a_2 = b_2$.
 werden die Gleichungen 1., 2. und 3. zu

$$\begin{aligned} &= a_0 \tan^2 \varphi + 2a_1 \tan \varphi + a_2 = 0, \\ &= a_0 \tan^2 \varphi + 2b_1 \tan \varphi + a_2 = 0, \\ &= a_0(r_1 + r_2) \tan^2 \varphi + 2(a_1 r_1 + b_1 r_2) \tan \varphi + a_2(r_1 + r_2) = 0. \end{aligned}$$

$\tan \varphi$, $\tan \varphi'$ die Wurzeln der letzten Gleichung, so folgt:

$$\tan \varphi \cdot \tan \varphi' = \frac{a_2(r_1 + r_2)}{a_0(r_1 + r_2)} = \frac{a_2}{a_0}.$$

es folgt der Satz: Das Produkt der Tangenten der Winkel,
 e zwei Strahlen eines Paares einer quadratischen Strahlen-
 n mit einer Achse bilden, ist constant.

A und A_1 die Achsen, und ist A die Nulllinie, so ist

$$\angle T = \tan(AA_1 + A_1 T) = \tan(90^\circ + A_1 T) = -1 : \tan A_1 T.$$

nan $AT = \psi$, $A_1 T = \psi'$, so ist $\tan \varphi = -1 : \tan \psi$, $\tan \varphi' = -1 : \tan \psi'$.
 eingesetzt, ergibt:

$$\tan \psi \cdot \tan \psi' = \frac{a_0}{a_2}.$$

Produkte der Tangenten der Winkel, welche je zwei Strahlen
 ares mit der einen und mit der andern Achse bilden, sind
 prok.

, : a_0 positiv, so sind die Winkel φ , φ' , sowie die Winkel ψ , ψ'
 : oder beide stumpf; hieraus folgt, dass in diesem Falle die Strahlen
 es durch dasselbe Scheitelwinkelpaar der Achsen gehen, oder dass die
 edes Paares durch die Achsen nicht getrennt werden; ist hingegen
 gativ, so werden die Strahlen jedes Paares durch die beiden Achsen

ur im ersteren Falle kann es reale Strahlenpaare geben, deren Strahlen
 fallen. Sie werden aus der Gleichung bestimmt:

$$\tan^2 \varphi = \frac{a_2}{a_0},$$

er zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von φ folgen.

en, in welchen zwei Strahlen eines Paares zusammenfallen, werden als
 ten der Involution bezeichnet. Wir haben daher den Satz: Die
 ten einer quadratischen Strahleninvolution liegen sym-
 zu den Achsen der Involution.

eninvolutionen und Punktinvolutionen heissen hyperbolisch oder
 ., je nachdem sie reale Asymptoten, bez. Asymptotenpunkte besitzen

gt man eine Gerade G normal zum Nullstrahle durch den Punkt Q
 und schneidet damit die Strahlen T und T' in P und P' , so ist bei
 Wahl des positiven Sinnes von G :

$$\tan \varphi = \frac{QP}{CQ}, \quad \tan \varphi' = \frac{QP'}{CQ}.$$

man diese Werthe in die Gleichungen $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N = 0$
 tzt $CQ = \gamma$, $QP = \lambda$, $QP' = \lambda'$, so erhält man für die Punktpaare,
 von den Strahlenpaaren der Involution geschnitten wird, die Gleichungen:

$$M_1 \equiv \frac{a_0}{\gamma^2} \lambda^2 + 2 \frac{a_1}{\gamma} \lambda + a_2 = 0, \quad M_2 \equiv \frac{b_0}{\gamma^2} \lambda^2 + 2 \frac{b_1}{\gamma} \lambda + b_2 = 0,$$

$$M \equiv r_1 M_1 + r_2 M_2 = 0.$$

Hieraus folgt: Eine Strahleninvolution wird von jeder Geraden in einer Punktinvolution geschnitten; die Schnittpunkte eines Strahlenpaars bilden ein Punktpaar.

Dieser Satz zeigt, wie man eine quadratische Strahleninvolution ergänzt. Man schneidet die Strahlenpaare N_1, N_2 durch eine Gerade in den Punktpaaren M_1 und M_2 , ergänzt die durch diese beiden Paare bestimmte Punktinvolution und verbindet jedes Punktpaar derselben mit dem Träger der Strahleninvolution, so erhält man die Strahlenpaare derselben. Insbesondere erhält man die Asymptoten der Strahleninvolution aus den Asymptotenpunkten der Punktinvolution.

10. Den Begriff projectiver Verwandtschaft hat man auch auf Involutionen ausgedehnt.

Sind $K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 \equiv \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 = 0$ drei Paare einer Involution, so kann die Gleichung für jedes vierte Paar in der Form geschrieben werden

$$K \equiv r_1 \gamma_1 K_1 + r_2 \gamma_2 K_2 = 0.$$

Das Verhältniss $r_1 : r_2$ heisst das Doppelverhältniss der vier Paare K_1, K_2, K_3, K und wird symbolisch durch $(K_1 K_2 K_3 K)$ bezeichnet.

Dieser Begriff lässt sich geometrisch anschaulich machen. Ist A ein fester Punkt der Geraden, auf welcher eine quadratische Punktinvolution liegt, und ist α sein Abstand vom Nullpunkte Q , so wollen wir den vierten harmonischen Punkt \mathfrak{P} zu jedem Paare der Involution und zu A bestimmen. Ist $O\mathfrak{P} = l$, so ist, wenn \mathfrak{P} die Strecke PP' im Verhältnisse $v_2 : v_1$ theilt:

$$1. \quad l = \frac{v_1 \lambda + v_2 \lambda'}{v_1 + v_2}.$$

Nun sind aber $PP'A\mathfrak{P}$ harmonisch; also ist nach dem Begriffe harmonischer Punktpaare $v_2 : v_1 = -PA : AP' = -(\alpha - \lambda) : (\lambda' - \alpha)$; folglich, wenn man in 1. direkt $v_2 = -(\alpha - \lambda), v_1 = \lambda' - \alpha$ setzt:

$$2. \quad l = \frac{2\lambda\lambda' - \alpha(\lambda + \lambda')}{\lambda + \lambda'}.$$

Sind nun $M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 \equiv \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 = 0, M \equiv r_1 \gamma_1 M_1 + r_2 \gamma_2 M_2 = 0$ die Gleichungen zur Bestimmung der Punktpaare M_1, M_2, M_3, M , so ergeben sich für $\lambda\lambda'$ und $\lambda + \lambda'$ aus der Gleichung $M = 0$ die Werthe

$$3. \quad \lambda\lambda' = \frac{r_1 \gamma_1 a_2 + r_2 \gamma_2 b_2}{r_1 \gamma_1 a_0 + r_2 \gamma_2 b_0}, \quad -(\lambda + \lambda') = 2 \frac{r_1 \gamma_1 a_1 + r_2 \gamma_2 b_1}{r_1 \gamma_1 a_0 + r_2 \gamma_2 b_0}.$$

Aus diesen folgt weiter

$$4. \quad l = - \frac{r_1 \gamma_1 (a_2 + \alpha a_1) + r_2 \gamma_2 (b_2 + \alpha b_1)}{r_1 \gamma_1 a_1 + r_2 \gamma_2 b_1}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $r_2 = 0, r_1 = 0, r_2 = r_1 = 1$, so ergibt sich für die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$, welche den Paaren M_1, M_2, M_3 und dem Punkte A harmonisch zugeordnet sind

$$5. \quad l_1 = - \frac{a_2 + \alpha a_1}{a_1}, \quad l_2 = - \frac{b_2 + \alpha b_1}{b_1},$$

$$l_3 = - \frac{\gamma_1 (a_2 + \alpha a_1) + \gamma_2 (b_2 + \alpha b_1)}{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1} = \frac{\gamma_1 a_1 l_1 + \gamma_2 b_1 l_2}{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1}.$$

Hiernach lässt sich für l schreiben:

$$6. \quad l = \frac{r_1 \gamma_1 a_1 l_1 + r_2 \gamma_2 b_1 l_2}{r_1 \gamma_1 a_1 + r_2 \gamma_2 b_1}.$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}$ folgt aus 5. und 6. zu:

$$(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}) = r_1 : r_2.$$

Dies ergibt den Satz: Vier Punktpaare einer quadratischen Punktinvolution und die vier Punkte, welche den vier Paaren und einem festen Punkte harmonisch zugeordnet sind, haben gleiches Doppelverhältniss.

Schneidet man eine Strahleninvolution durch eine Gerade und beachtet, dass harmonische Strahlen in harmonischen Punkten geschnitten werden, so findet man, dass sich der soeben mitgetheilte Satz auch auf Strahleninvolutions ausdehnen lässt: Vier Strahlenpaare einer quadratischen Strahleninvolution und die Strahlen, die den vier Paaren und einem festen Strahle harmonisch zugeordnet sind, haben dasselbe Doppelverhältniss.

11. Sind $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 \equiv \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 = 0$ drei Paare einer Punkt- oder Strahleninvolution; sind ferner $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 \equiv \delta_1 L_1 + \delta_2 L_2 = 0$ Paare einer andern Punkt- und Strahleninvolution, oder Punkte einer Geraden, oder Strahlen eines Büschels, so heissen die beiden Gebilde projectiv, wenn jedem Paare der Involution das Paar der andern Involution, bez. der Punkt der Geraden oder der Strahl des Büschels zugeordnet wird, für welche die Gleichung der Doppelverhältnisse besteht:

$$(K_1 K_2 K_3 K) = (L_1 L_2 L_3 L).$$

Es entsprechen sich also dann

$$K \equiv r_1 \gamma_1 K_1 + r_2 \gamma_2 K_2 \equiv 0 \text{ und } L \equiv r_1 \delta_1 L_1 + r_2 \delta_2 L_2 \equiv 0.$$

Die Ergänzung projectiver Involutionen wird erst später, bei Gelegenheit der Entwicklungen über Curvenbüschel zweiter Ordnung, mitgetheilt werden.

12. Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Betrachtung einer Entartung der quadratischen Punkt- und der Strahleninvolution, die sich in ähnlicher Weise auch auf Involutionen dritten, vierten etc. Grades ausdehnen lässt.

Haben zwei Punktpaare M_1 und M_2 einer Involution einen gemeinsamen Punkt, so wollen wir diesen Punkt zum Nullpunkte wählen. Die Gleichungen $M_1 = 0$ und $M_2 = 0$ vereinfachen sich jetzt zu

$$1. \quad M_1 \equiv a_0 \lambda^2 + 2a_1 \lambda = 0,$$

$$2. \quad M_2 \equiv b_0 \lambda^2 + 2b_1 \lambda = 0.$$

Die Gleichung eines beliebigen Paares M wird daher

$$3. \quad M \equiv r_1 M_1 + r_2 M_2 \equiv (r_1 a_0 + r_2 b_0) \lambda^2 + 2(r_1 a_1 + r_2 b_1) \lambda = 0.$$

Diese Gleichung hat ebenso, wie 1. und 2., die Wurzel $\lambda = 0$.

Die Abstände $\lambda_1 \lambda_2 \lambda$ der übrigen nicht in den Nullpunkt fallenden Punkte $P_1 P_2 P$ der Paare $M_1 M_2 M$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$P_1 \equiv a_0 \lambda + 2a_1 = 0,$$

$$P_2 \equiv b_0 \lambda + 2b_1 = 0,$$

$$P \equiv r_1 P_1 + r_2 P_2 \equiv (r_1 a_0 + r_2 b_0) \lambda + 2(r_1 a_1 + r_2 b_1) = 0.$$

Fügt man zu M_1 und M_2 ein drittes und viertes Paar M_3 und M derart, dass man setzt

$$M_3 \equiv \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 = 0, \quad M \equiv \rho_1 \gamma_1 M_1 + \rho_2 \gamma_2 M_2 = 0,$$

$$\text{so wird } P_3 \equiv \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 = 0, \quad P \equiv \rho_1 \gamma_1 P_1 + \rho_2 \gamma_2 P_2 = 0$$

und hieraus folgen für die Abstände OP_1 , OP_2 , OP_3 , OP die Werthe

$$\lambda_1 \equiv -\frac{2a_1}{a_0}, \quad \lambda_2 \equiv -\frac{2b_1}{b_0}, \quad \lambda_3 \equiv -\frac{2\gamma_1 a_1 + 2\gamma_2 b_1}{\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0} = \frac{\gamma_1 a_0 \lambda_1 + \gamma_2 b_0 \lambda_2}{\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0}$$

$$\lambda \equiv -\frac{2\rho_1 \gamma_1 a_1 + 2\rho_2 \gamma_2 b_1}{\rho_1 \gamma_1 a_0 + \rho_2 \gamma_2 b_0} = \frac{\rho_1 \gamma_1 a_0 \lambda_1 + \rho_2 \gamma_2 b_0 \lambda_2}{\rho_1 \gamma_1 a_0 + \rho_2 \gamma_2 b_0}.$$

Aus diesen vier Werthen erhält man das Doppelverhältniss der vier Punkte

$$(P_1 P_2 P_3 P) = \rho_1 : \rho_2,$$

es ist daher gleich dem Doppelverhältniss der vier Paare der Involution:

$$(P_1 P_2 P_3 P) = (M_1 M_2 M_3 M).$$

Wir übertragen diese Bemerkungen sogleich auf Strahleninvolutionen und haben daher den Satz: Haben zwei Paare einer quadratischen Involution ein Element gemein, so gehört dieses Element allen Paaren der Involution an; die Reihe der übrigen Elemente ist mit der Involution projectiv.

§ 8. Der Kreis.

1. Hat das Centrum M eines Kreises die Coordinaten a und b und ist ρ der Radius des Kreises, so gilt für jeden Punkt P des Kreises die Gleichung

$$\overline{MP}^2 = \rho^2,$$

das ist $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2$, oder entwickelt und geordnet:

$$1. \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - \rho^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung des Kreises.

Giebt man dem Centrum besondere Lagen gegen die Coordinatenachsen, so gehen aus der allgemeinen Gleichung des Kreises besondere Modificationen derselben hervor.

Liegt das Centrum im Nullpunkte, so ist $a = b = 0$; die Gleichung des Kreises lautet daher

$$2. \quad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0.$$

Liegt das Centrum auf der X -Achse, so ist $b = 0$, und die Gleichung ändert sich ab zu:

$$3. \quad x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - \rho^2 = 0.$$

Liegt das Centrum auf der Y -Achse, so erhält man

$$4. \quad x^2 + y^2 - 2by + b^2 - \rho^2 = 0.$$

Geht der Kreis durch den Nullpunkt, so hat das rechtwinklige Dreieck $OM'M$ die Hypotenuse ρ , daher ist

$$a^2 + b^2 = \rho^2,$$

also erhält man die Gleichung:

$$5. \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Berührt der Kreis die Y -Achse im Nullpunkte, so vereinen sich die Fälle 3. und 5. und man hat die Gleichung:

$$6. \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad \text{oder } y = \sqrt{2ax - x^2}.$$

Berührt der Kreis die X -Achse im Nullpunkte, so hat man:

$$7. \quad x^2 + y^2 - 2by = 0.$$

2. Die Gleichung des Kreises

$$1. \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - \rho^2 = 0$$

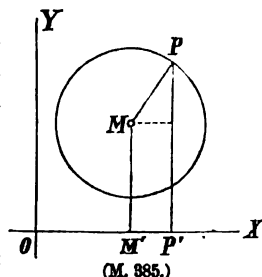
ist eine Gleichung zweiten Grades. Sie zeigt gegenüber einer allgemeinen Gleichung zweiten Grades in den Coordinaten x und y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die Besonderheiten, dass das Glied mit dem Coordinatenfaktor xy fehlt, und dass ferner die Glieder x^2 und y^2 den Coefficienten 1 haben.

Liegt umgekehrt eine Gleichung zweiten Grades vor

$$2. \quad mx^2 + my^2 + 2nx + 2py + q = 0,$$



(M. 385.)

in welcher das Glied mit dem Coordinatenfaktor xy fehlt und in welcher x^2 und y^2 gleiche Coefficienten haben, so schreibe man für dieselbe

$$3. \quad x^2 + y^2 + 2 \frac{n}{m} x + 2 \frac{p}{m} y + \frac{q}{m} = 0.$$

Der Vergleich von 3. mit 1. zeigt, dass 3. die Gleichung eines Kreises ist, dessen Centrum die Coordinaten hat

$$4. \quad a = -n : m, \quad b = -p : m.$$

Ferner ist

$$a^2 + b^2 - \rho^2 = \frac{q}{m},$$

daher durch Verwendung der Werthe 4.

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2} (n^2 + p^2 - qm).$$

Die Gleichung 2. ist also die Gleichung des Kreises, dessen Centrum die Coordinaten $(-n) : m$ und $(-p) : m$ und dessen Radius die Länge hat:

$$\rho = \frac{1}{m} \sqrt{n^2 + p^2 - qm}.$$

Es fragt sich, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn der Radicand $n^2 + p^2 - qm$ negativ ist. Setzen wir $n^2 + p^2 = qm - s^2$, so wird also $qm = n^2 + p^2 + s^2$, daher geht die Gleichung 2. nach Multiplication mit m über in

$$m^2 x^2 + m^2 y^2 + 2nm x + 2pm y + n^2 + p^2 + s^2 = 0$$

oder

$$(mx + n)^2 + (my + p)^2 + s^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist durch reale Werthe von x und y nicht erfüllbar; denn für jeden realen Werth von x und y sind $(mx + n)^2$ und $(my + p)^2$ positive Grössen, die mit der positiven Grösse s^2 nicht die Summe Null geben können.

Ist also $n^2 + p^2 - qm$ negativ, so wird der Gleichung

$$mx^2 + my^2 + 2nx + 2py + q = 0$$

durch keinen realen Punkt genügt.

Nimmt m ab, während n , p und q gegebene endliche Werthe behalten, so wachsen die Grössen

$$a = -\frac{n}{m}, \quad b = -\frac{p}{m}, \quad \rho = \frac{1}{m} \sqrt{n^2 + p^2 - qm},$$

es wachsen also die Coordinaten des Kreiscentrums und der Radius. Geht m zur Grenze Null über, so werden a , b und ρ unendlich gross; die Gleichung des Kreises geht zugleich in die lineare Gleichung über $2nx + 2py + q = 0$.

Man kann daher eine gerade Linie als einen Kreis mit unendlich grossem Radius betrachten.

3. Setzt man abkürzend $a^2 + b^2 - \rho^2 = c$, so erscheinen in der Gleichung des Kreises

$$1. \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

drei Constante, a , b und c .

Wird verlangt, dass ein Kreis K durch den Punkt P_1 geht, so muss die Gleichung 1. durch die Coordinaten x_1 y_1 des Punktes P_1 erfüllt werden; die noch unbestimmten Constanten a , b , c müssen also der Gleichung genügen

$$2. \quad x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0.$$

Dies ist eine lineare Gleichung; drei lineare Gleichungen sind zu vollständiger und eindeutiger Bestimmung von a , b und c ausreichend und nothwendig. Wir haben daher den analytisch-geometrischen Beweis des Satzes: Ein Kreis ist durch drei Punkte bestimmt.

Soll P auf dem Kreise liegen, der durch die gegebenen Punkte P_1, P_2, P_3 geht, so müssen die Coordinaten $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ die Gleichung 1. erfüllen. Man hat daher die vier in a, b, c linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + c &= 0 \\ 3. \quad x_1^2 + y_1^2 - 2x_1a - 2y_1b + c &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - 2x_2a - 2y_2b + c &= 0 \\ x_3^2 + y_3^2 - 2x_3a - 2y_3b + c &= 0. \end{aligned}$$

Ihr Verein bedingt das Verschwinden der Determinante

$$4. \quad \begin{vmatrix} (x^2 + y^2) & x & y & 1 \\ (x_1^2 + y_1^2) & x_1 & y_1 & 1 \\ (x_2^2 + y_2^2) & x_2 & y_2 & 1 \\ (x_3^2 + y_3^2) & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist also die Gleichung des Kreises P_1, P_2, P_3 .

Liegt P_3 auf der Geraden P_1, P_2 , und theilt P die Strecke P_1, P_2 im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$, so hat man

$$x_3 = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y_3 = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Multipliziert man die letzte Zeile der Determinante 4. mit $\lambda_1 + \lambda_2$, ferner die zweite Zeile mit λ_1 , die dritte mit λ_2 , setzt in die vierte Zeile die Werthe ein

$$(\lambda_1 + \lambda_2)x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad (\lambda_1 + \lambda_2)y_3 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

und subtrahirt dann von den Gliedern der vierten Zeile die Summen der homologen Glieder der zweiten und dritten Zeile, so wird das erste Glied der vierten Zeile zu $(\lambda_1 + \lambda_2)(x_3^2 + y_3^2) - \lambda_1(x_1^2 + y_1^2) - \lambda_2(x_2^2 + y_2^2)$. Die anderen Glieder der letzten Zeile werden sämmtlich gleich Null. Dividirt man dann die letzte Zeile durch das erste, von den veränderlichen Coordinaten x, y unabhängige Glied, so erhält man schliesslich als Gleichung des Kreises die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (x^2 + y^2), & x, & y, & 1 \\ (x_1^2 + y_1^2) & x_1 & y_1 & 1 \\ (x_2^2 + y_2^2) & x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich bei Entwicklung der Determinante nach den Gliedern der letzten Zeile auf

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. auf die Gleichung der Geraden P_1, P_2 , in Uebereinstimmung mit der vorigen Nummer.

4. Wird durch einen Punkt P_1 eine Gerade T gelegt, die mit der X -Achse den Winkel α bildet, so gilt für jeden Punkt P dieser Geraden:

$$OP' = OP_1' + P_1'P', \quad OP'' = OP_1'' + P_1''P''.$$

Setzt man $P_1P = r$, so ist $P_1'P' = P_1P \cos \alpha = r \cos \alpha$, $P_1''P'' = P_1P \sin \alpha = r \sin \alpha$.

Da nun weiter $OP' = x$, $OP'' = y$, $OP_1' = x_1$, $OP_1'' = y_1$, so folgen die Formeln

$$x = x_1 + r \cos \alpha, \quad y = y_1 + r \sin \alpha.$$

Wir bestimmen nun die Strecken der Geraden T , welche von P_1 bis an die Peripherie des Kreises

$$2. \quad K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

reichen; zu diesem Zwecke haben wir die Coordinatenwerthe aus 1. in 2. einzusetzen und die sich ergebende Gleichung für r aufzulösen. Wir erhalten
 $(x_1 + r \cos \alpha)^2 + (y_1 + r \sin \alpha)^2 - 2a(x_1 + r \cos \alpha) - 2b(y_1 + r \sin \alpha) + c = 0$
 oder nach fallenden Potenzen der Unbekannten r geordnet:

$$3. \quad r^2 + 2[(x_1 - a) \cos \alpha + (y_1 - b) \sin \alpha] r + x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln mit r', r'' , so folgt aus 3. das Produkt der Wurzeln zu

$$4. \quad r' r'' = x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c.$$

Dieser Werth ist unabhängig von der Richtung der Geraden T , er hängt nur von den Constanten des Kreises und von den Coordinaten des Punktes P_1 ab. Wir haben daher den (aus der Planimetrie bekannten) Satz: Wird ein Strahlenbüschel von einem Kreise geschnitten, so ist das Produkt der Strecken, die auf jedem Strahle vom Büschelträger bis an den Kreis reichen, von constanter Grösse. Dieses constante Produkt wird bekanntlich die Potenz des Punktes P_1 in Bezug auf den Kreis genannt; die rechte Seite der Gleichung 4. lehrt: Die Potenz eines Punktes P_1 in Bezug auf den Kreis $K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ist der Werth, den die Function $K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$ annimmt, wenn man in dieselbe die Coordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1 einsetzt.

Ist $r' r''$ positiv, so haben r' und r'' gleiches Zeichen, erstrecken sich also auf derselben Seite von P_1 ; ist $r' r''$ negativ, so haben r' und r'' verschiedene Zeichen und erstrecken sich daher zu beiden Seiten von P_1 . Der Werth K ist also positiv für alle Punkte P_1 ausserhalb und negativ für alle Punkte innerhalb des Kreises $K = 0$.

5. Die Punkte, welche der Kreis

$$1. \quad K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

mit der Geraden

$$2. \quad T \equiv mx + ny + p = 0$$

gemein hat, besitzen Coordinaten, welche die Gleichungen 1. und 2. befriedigen; dieselben sind also die Wurzeln dieser Gleichungen. Multiplicirt man 1. mit n^2 und dann mit m^2 und setzt die aus 2. genommenen Werthe

$$ny = -(mx + p),$$

$$mx = -(ny + p)$$

in die multiplicirten Gleichungen ein, so erhält man für x und y die Gleichungen:

$$3. \quad (m^2 + n^2)x^2 + 2(mp - an^2 + bnm)x + p^2 + 2bnp + n^2c = 0,$$

$$4. \quad (m^2 + n^2)y^2 + 2(np - bm^2 + anm)y + p^2 + 2amp + m^2c = 0.$$

Die Auflösungen dieser beiden quadratischen Gleichungen sind, wie man durch Substitution von $a^2 + b^2 - \rho^2$ für c und nach leichter Umformung gewinnt:

$$5. \quad x = \frac{-mp + an^2 - bnm}{m^2 + n^2} \pm \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\rho^2 - \frac{(ma + nb + p)^2}{m^2 + n^2}}$$

$$y = \frac{-np + bm^2 - anm}{m^2 + n^2} \mp \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\rho^2 - \frac{(ma + nb + p)^2}{m^2 + n^2}}.$$

Der Subtrahend des Radicanden, nämlich

$$\frac{(ma + nb + p)^2}{m^2 + n^2}$$

ist das Quadrat des Abstandes des Punktes a, b , d. i. des Kreiscentrums, von der Geraden T . Wir haben daher: Eine Gerade schneidet einen Kreis in zwei Punkten, oder berührt ihn in einem Punkte, oder verfehlt

ihn, je nachdem ihr Abstand vom Kreiscentrum kleiner, ebenso gross oder grösser als der Halbmesser des Kreises ist.

6. Die Bedingung der Berührung kann man schreiben

$$(m^2 + n^2) \rho^2 - (ma + nb + p)^2 = 0;$$

hieraus folgt weiter

$$1. \quad \left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{p^2} \right) \rho^2 - \left(\frac{m}{-p} a + \frac{n}{-p} b - 1 \right)^2 = 0.$$

Da nun $\frac{m}{-p}$ und $\frac{n}{-p}$ die Coordinaten u, v der Geraden T sind, so folgt aus 1. die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten zu

$$2. \quad (u^2 + v^2) \rho^2 - (au + bv - 1)^2 = 0.$$

Wir bemerken hierzu, dass $au + bv - 1 = 0$ die Gleichung des Kreismittelpunktes in Liniencoordinaten ist.

Wir wollen die linke Seite der Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten mit \mathfrak{K} (für verschiedene Kreise mit $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \dots$), und mit denselben Buchstaben auch den durch die Gleichung $\mathfrak{K} = 0$ dargestellten Kreis bezeichnen. Ein Kreis wird daher mit K oder \mathfrak{K} bezeichnet, je nachdem wir von seiner Gleichung in Punkt- oder in Liniencoordinaten ausgehen.

7. Die Gleichung der Geraden, die den Kreis

$$K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

im Punkte P_1 berührt, kann aus der Bemerkung gewonnen werden, dass die Tangente durch P_1 geht und normal zu MP_1 ist. Die Gleichung von MP_1 ist (§ 5, No. 3) $(y_1 - b)x - (x_1 - a)y + (x_1b - y_1a) = 0$, folglich ist die Gleichung der Tangente (§ 5, No. 9)

$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0.$$

8. Um die Coordinaten der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise \mathfrak{K}_0 und \mathfrak{K}_1 zu erhalten, haben wir die Gleichungen beider Kreise in Liniencoordinaten aufzustellen

$$1. \quad \mathfrak{K}_0 \equiv (u^2 + v^2) \rho_0^2 - (a_0u + b_0v - 1)^2 = 0,$$

$$2. \quad \mathfrak{K}_1 \equiv (u^2 + v^2) \rho_1^2 - (a_1u + b_1v - 1)^2 = 0,$$

und die Wurzeln dieses Systems zu bestimmen.

Wir wollen die Ausdrücke $a_0u + b_0v - 1$ und $a_1u + b_1v - 1$ mit P_0 und P_1 bezeichnen, so dass also $P_0 = 0$ und $P_1 = 0$ die Gleichungen der Mittelpunkte beider Kreise sind. Dann gewinnen wir aus 1. und 2.

$$3. \quad \rho_0^2 \mathfrak{K}_1 - \rho_1^2 \mathfrak{K}_0 \equiv \rho_1^2 P_0^2 - \rho_0^2 P_1^2 = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung 3. zerfällt in Faktoren

$$4. \quad (\rho_1 P_0 - \rho_0 P_1)(\rho_1 P_0 + \rho_0 P_1) = 0,$$

also zerfällt die Gleichung in die linearen Gleichungen

$$5. \quad \mathfrak{P} \equiv \rho_1 P_0 - \rho_0 P_1 = 0, \quad 6. \quad \mathfrak{P}' \equiv \rho_1 P_0 + \rho_0 P_1 = 0.$$

Die Coordinaten der gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise \mathfrak{K}_0 und \mathfrak{K}_1 erfüllen also entweder die Gleichung 5. oder 6., gehen also durch den Punkt $\mathfrak{P} = 0$ oder durch den $\mathfrak{P}' = 0$; und umgekehrt: Jede Gerade, welche durch $\mathfrak{P} = 0$ oder durch $\mathfrak{P}' = 0$ geht und der Gleichung $\mathfrak{K}_0 = 0$ genügt, d. i. also jede von \mathfrak{P} oder von \mathfrak{P}' an den Kreis \mathfrak{K}_0 gelegte Tangente, genügt auch der Gleichung $\mathfrak{K}_1 = 0$, ist also gemeinsame Tangente beider Kreise.

Wie aus den Gleichungen 5. und 6. ersichtlich ist, liegen die beiden Punkte \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' auf der Geraden $P_0 P_1$, also auf der Centralen beider Kreise. Nach § 2, No. 6, theilen sie die Strecke $P_0 P$ in den Verhältnissen

$$P_0 \mathfrak{P} : \mathfrak{P} P_1 = - \rho_0 : \rho_1, \quad P_0 \mathfrak{P}' : \mathfrak{P}' P_1 = \rho_0 : \rho_1.$$

Die beiden Punkte \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' theilen also die Strecke zwischen den Centren P_0 und P_1 aussen und innen im Verhältniss der Kreisradien ρ_0 und ρ_1 . Diese beiden Punkte werden als der äussere und der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise bezeichnet.

Der soeben mitgetheilte Satz über die Lage der Aehnlichkeitspunkte liefert folgende Construction derselben: Die Verbindungsgerade zweier parallelen gleichgerichteten Radien zweier Kreise trifft die Centrale im äusseren Aehnlichkeitspunkte; die Verbindungsgerade zweier parallelen Radien von entgegengesetzter Richtung trifft die Centrale im innern Aehnlichkeitspunkte.

9. Die Aehnlichkeitspunkte je zweier von drei Kreisen $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ werden erhalten, indem man die Seiten des von den Kreismittelpunkten P_0, P_1, P_2 gebildeten Dreiecks der Reihe nach in den Verhältnissen $\rho_0 : \rho_1, \rho_1 : \rho_2, \rho_2 : \rho_0$ innen und aussen theilt. Nach § 5, No. 20 liegen diese sechs Aehnlichkeitspunkte viermal zu je dreien auf einer Geraden; diese vier Geraden nennt man die Aehnlichkeitsachsen der drei Kreise. Eine Aehnlichkeitsachse enthält die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte; jede der drei andern Aehnlichkeitsachsen enthält zwei innere und einen äusseren Aehnlichkeitspunkt.

10. Die Coordinaten der gemeinsamen Punkte zweier Kreise

$$1. \quad K_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0,$$

$$2. \quad K_2 \equiv x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$$

sind die Wurzeln Gleichungen 1. und 2.

Bei der Aufsuchung der Wurzeln zweier Gleichungen höhern Grades hat man zunächst zu untersuchen, ob gemeinsame unendlich grosse Wurzeln vorhanden sind.

Zu diesem Zwecke führt man bekanntlich für x und y neue Unbekannte ein, indem man $x = r\omega$, $y = s\omega$ setzt und dann ω ins Unendliche wachsen lässt. Hat man diese Einsetzung in der Gleichung $f(x, y) = 0$ vorgenommen, so ordene man die Gleichung nach Potenzen von ω und dividire dann durch die höchste Potenz von ω (deren Exponent gleich dem Grade der Function $f(x, y)$ ist). Dann werden die Glieder von $f(x, y)$, welche den Grad der Function besitzen, von ω befreit; alle anderen Glieder, deren Grad niedriger ist als der Grad der Function, erhalten eine Potenz von ω als Divisor. Ist die Function $f(x, y)$ vom Grade n , so ist die Gesammtheit der Glieder vom Grade n eine homogene Function von x und y :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n.$$

Nachdem man $x = r\omega$, $y = s\omega$ eingesetzt und die Gleichung durch ω^n dividirt hat, geht die Gleichung $f(x, y)$ über in

$$1. \quad a_0r^n + a_1r^{n-1}s + a_2r^{n-2}s^2 + \dots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n + Q = 0,$$

wobei Q aus Gliedern besteht, deren jedes eine Potenz von ω als Divisor enthält.

Lässt man nun ω über alle Grenzen wachsen, so nähert sich Q der Grenze Null, die Gleichung reducirt sich also auf

$$2. \quad a_0r^n + a_1r^{n-1}s + \dots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n = 0.$$

Aus dieser folgt nach Division durch s^n :

$$3. \quad a_0\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^{n-2} + \dots + a_{n-1}\frac{r}{s} + a_n = 0.$$

Die Gleichung liefert n Werthe für das Verhältniss $r : s$, die zum Theil oder auch, bei geraden n , sämmtlich aus conjugirt complexen Werthpaaren bestehen können.

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist die Gleichung einer Curve n ten Grades. Wir haben daher den Satz: Eine Curve n ten Grades hat n in unendlicher Entfernung liegende Punkte; dieselben liegen in der Richtung der durch den Nullpunkt gezogenen Geraden, die die Gleichung haben $x:y = r:s$, wobei $r:s$ eine Wurzel der Gleichung ist:

$$a_0 \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1 \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{r}{s} + a_n = 0.$$

11. Wir können diesen Satz auch für den Fall gelten lassen, dass die Gleichung 3. conjugirt complexe Wurzeln enthält; mir müssen uns nur dann dazu entschliessen, auch von imaginären Punkten zu sprechen, und zwar in dem Sinne, dass wir sagen: ein Punkt mit den complexen Coordinaten $x = a + ib$, $y = c + id$, ($i = \sqrt{-1}$) liegt auf einer Curve $f(x, y) = 0$, wenn diese complexen Werthe der Gleichung genügen. Imaginäre Punkte sind allerdings nicht construierbar und geometrisch nicht vorstellbar; durch ihre Einführung in die Geometrie gewinnen aber solche Sätze, die durch analytische Operationen abgeleitet worden sind, einen höhern Grad von Allgemeinheit, und es zeigt sich auf geometrischem Gebiete derselbe Vortheil, den die Algebra durch Anerkennung der complexen Zahlen erlangt hat.

Hat man sich zu imaginären Punkten verstanden, so liegt nun kein Bedenken dagegen vor, in besonderen Fällen auch complexe Gerade oder überhaupt complexe Curven einzuführen, indem man darunter solche Linien versteht, in deren Gleichungen complexe Coefficienten vorkommen.

Die allgemeinste Form der Gleichung einer complexen Geraden ist

$$T \equiv (a + ia')x + (b + ib')y + (c + ic') = 0.$$

Soll diese Gleichung durch einen realen Punkt erfüllt werden, so müssen dessen Coordinaten den einzelnen Gleichungen genügen

$$ax + by + c = 0,$$

$$a'x + b'y + c' = 0.$$

Hieraus folgt ein einziges Wurzelpaar x, y . Wir können daher den Satz aufstellen: Jede imaginäre Gerade enthält einen, aber auch nur einen, realen Punkt.

Als conjugirt complexe Gerade werden wir folgerichtig zwei Gerade bezeichnen, deren Coefficienten der Reihe nach conjugirt complex sind.

Die conjugirt complexe Gerade zu T ist also

$$T' \equiv (a - ai')x + (b - ib')y + (c - ic') = 0.$$

Wir haben daher den Satz: Conjugirt complexe Gerade haben einen realen Punkt gemein.

Unter conjugirt complexen Punkten haben wir zwei Punkte zu verstehen, deren Abscissen und deren Ordinaten conjugirt complexe Werthe haben. Sind also $x = \xi + i\eta$, $y = \eta + i\eta$ die Coordinaten eines Punktes P , so hat der conjugirt complexe Punkt P' die Coordinaten $x = \xi - i\eta$, $y = \eta - i\eta$. Soll durch P eine reale Gerade gehen, $ax + by + c = 0$, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein $a\xi + b\eta + c = 0$, $a\eta + b\eta = 0$. Hieraus folgt

$$\frac{a}{c} = \frac{\eta}{\eta\eta - \xi\eta}, \quad \frac{b}{c} = -\frac{\eta}{\eta\eta - \xi\eta}.$$

Hierdurch ist die reale Gerade eindeutig bestimmt; die Coefficientenverhältnisse $a:c$ und $b:c$ ändern sich nicht, wenn die Werthe η und η ihre Zeichen wechseln, d. i. wenn man den Punkt P mit dem conjugirt complexen Punkt P' vertauscht. Wir erhalten daher die Sätze: Durch einen complexen Punkt

geht eine, und nur eine reale Gerade. Zwei conjugirt complexe Punkte liegen auf derselben realen Geraden.

12. Wir kehren nun zu der in No. 9 abgebrochenen Untersuchung zurück.

Setzen wir in der Gleichung eines Kreises $K \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, für x und y die Werthe $x = r\omega$, $y = s\omega$, und dividiren dann durch ω^2 , so entsteht: $r^2 + s^2 - 2a \cdot \frac{1}{\omega} - 2b \cdot \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$. Setzen wir nun, um die im Unendlichen liegenden Punkte des Kreises zu bestimmen, $\omega = \infty$, so folgt die Gleichung $r^2 + s^2 = 0$, welche für das Verhältniss $r:s$ die beiden conjugirten Werthe liefert $r:s = \pm i$.

Alle Punkte, deren Coordinatenverhältniss einen gegebenen Werth v hat, liegen auf der durch den Ursprung gehenden Geraden $x:y = v$, oder $x - vy = 0$.

Wir sehen daher: Auf jedem Kreise liegen die beiden unendlich fernen conjugirt complexen Punkte, welche auf den durch den Ursprung gehenden conjugirt complexen Geraden $x - iy = 0$ und $x + iy = 0$ enthalten sind. Hieraus folgt weiter: Alle Kreise einer Ebene haben zwei conjugirt complexe unendlich ferne Punkte mit einander gemein. Diese beiden Punkte bezeichnet man demgemäss als die imaginären Kreispunkte der Ebene.

13. Um die nicht unendlich fern gelegenen gemeinsamen Punkte zweier Kreise zu erhalten, subtrahiren wir die Gleichungen der beiden Kreise

$$1. \quad K_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0,$$

$$2. \quad K_2 \equiv x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0,$$

und erhalten

$$3. \quad L \equiv K_1 - K_2 \equiv 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y - (c_2 - c_1) = 0.$$

Die Gleichung 3. ist linear, ist also die Gleichung einer von beiden Kreisen abhängigen Geraden; man nennt dieselbe die Chordale der beiden Kreise. Jeder Punkt, den die Chordale mit einem der beiden Kreise K_1 oder K_2 gemein hat, genügt der Gleichung 3. und einer der Gleichungen 1. oder 2.; seine Coordinaten annulliren also das Polynom $L \equiv K_1 - K_2$, und eines der Polynome K_1 oder K_2 ; folglich annulliren sie auch das andere, der Punkt liegt daher auch auf dem andern Kreise. Die im Endlichen liegenden Schnittpunkte der beiden Kreise sind mithin die Punkte, in welchem einer derselben von der Chordalen geschnitten wird. Dies ergibt: Zwei Kreise haben ausser den unendlich fernen imaginären Kreispunkten noch zwei Punkte gemein, die conjugirt complex, oder real sind; im letzteren Falle können sie von einander getrennt oder unendlich nahe beisammen liegen; beide Schnittpunkte sind auf der Chordalen enthalten.

Wenn die beiden Kreiscentra unendlich nahe zusammenrücken, die Radien aber von einander verschieden sind, so nähern sich die Differenzen $a_2 - a_1$ und $b_2 - b_1$ der Grenze Null, während die Differenz $c_1 - c_2$ einen endlichen Werth behält. Der Gleichung der Chordalen $L = 0$ kann dann nur durch unendlich grosse Werthe der Coordinaten genügt werden. Hieraus folgt: Zwei concentrische Kreise haben eine unendlich ferne Chordale; ihre vier Schnittpunkte sind sämmtlich unendlich fern und imaginär.

Die Verbindungsgerade der Centra zweier Kreise hat die Gleichung

$$(b_2 - b_1)x - (a_2 - a_1)y + (a_2b_1 - a_1b_2) = 0.$$

Hält man dieselbe mit der Gleichung der Chordalen zusammen

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y - (c_2 - c_1) = 0,$$

so folgt (§ 5, 9): Die Chordale zweier Kreise steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Kreismittelpunkte.

14. Für jeden Punkt der Chordalen zweier Kreise K_1 und K_2 ist $L \equiv K_1 - K_2 = 0$, oder $K_1 = K_2$. Nach No. 4 folgt hieraus: Die Chordale zweier Kreise ist der Ort der Punkte, welche für beide Kreise gleiche Potenz haben.

Für zwei Kreise, die sich nicht in realen Punkten schneiden, ist daher die Chordale der Ort der Punkte, von denen aus gleich lange Tangenten an beide Kreise gezogen werden können; für Kreise, die zwei reale Schnittpunkte haben, ist sie nur, soweit sie ausserhalb der beiden Kreise liegt, der Ort der Punkte gleicher Tangenten; soweit sie innerhalb beider Kreise liegt, ist sie der Ort der Punkte, für welche die durch sie hindurchgehenden kürzesten Sehnen beider Kreise gleich sind.

15. Die Gleichungen der Chordalen je zweier der drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ ergeben sich zu

$$L_3 \equiv K_1 - K_2 = 0, \quad L_1 \equiv K_2 - K_3 = 0, \quad L_2 \equiv K_3 - K_1 = 0.$$

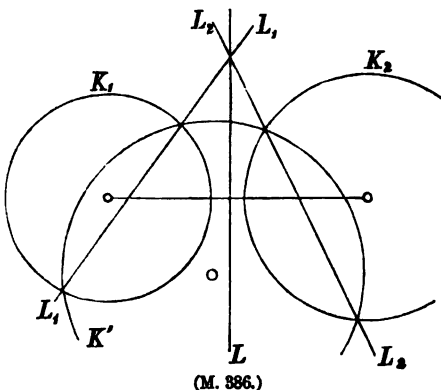
Wie man sieht, verschwindet die Summe $L_3 + L_1 + L_2$ identisch. Wir schliessen daher (§ 5, 11): Die drei Chordalen je zweier von drei Kreisen gehen durch einen Punkt; dieser Punkt hat gleiche Potenz für alle drei Kreise, er wird der Chordalpunkt der drei Kreise genannt.

Der Chordalpunkt ist unendlich fern, wenn zwei Chordalen (und mithin alle drei) parallel sind. Die Bedingung dafür, dass L_3 und L_1 parallel sind, ist (§ 5, 9)

$$(a_1 - a_2) : (a_2 - a_3) = (b_1 - b_2) : (b_2 - b_3).$$

Aus § 5, 3 ist ersichtlich, dass alsdann die Centra der drei Kreise auf einer Geraden liegen.

16. Mit Hülfe des Chordalpunktes construirt man die Chordale zweier Kreise K_1 und K_2 , die sich nicht in realen Punkten schneiden. Man construirt einen Kreis K' , der K_1 und K_2 schneidet, zeichnet die Chordalen L_1 und L_2 dieses Kreises und der Kreise K_1 und K_2 , indem man die realen Punkte verbindet, in denen K_1 und K_2 von K' geschnitten werden; durch den Schnittpunkt von L_1 und L_2 geht die gesuchte Chordale und ist normal zur Verbindungslinie der Centren von K_1 und K_2 .



17. Es entsteht die Frage, ob die drei Kreise auch so gelegen sein können, dass die Chordalen L_3 und L_1 , und mithin alle drei Chordalen L_1 , L_2 , L_3 zusammenfallen.

Wenn $L_3 = 0$ und $L_1 = 0$ geometrisch identisch sind, so kann die Function L_3 von der Function L_1 nur um einen constanten Faktor verschieden sein, es giebt also dann eine Zahl m , für welche die Identität gilt $L_1 \equiv mL_3$.

Hieraus folgen die einzelnen Beziehungen:

$$a_3 - a_2 = m(a_2 - a_1); \quad b_3 - b_2 = m(b_2 - b_1); \quad c_3 - c_2 = m(c_2 - c_1).$$

Aus denselben folgen:

$$1. \quad a_3 = -ma_1 + (1+m)a_2; \quad b_3 = -mb_1 + (1+m)b_2; \quad c_3 = -mc_1 + (1+m)c_2.$$

Setzt man $-m = n_1$, $1 + m = n_2$, so gehen die Formeln 1. über in 2. $a_3 = n_1 a_1 + n_2 a_2$, $b_3 = n_1 b_1 + n_2 b_2$, $c_3 = n_1 c_1 + n_2 c_2$, wobei $n_1 + n_2 = 1$.

Die Gleichung des Kreises K_3 erscheint nun in der Form:

$$K_3 \equiv x^2 + y^2 + 2(n_1 a_1 + n_2 a_2)x + 2(n_1 b_1 + n_2 b_2)y + n_1 c_1 + n_2 c_2 = 0.$$

Schreibt man für die Summe $x^2 + y^2$ den Ausdruck $(n_1 + n_2)x^2 + (n_1 + n_2)y^2$, so erhält man für K_3 die Darstellung $K_3 \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2$.

Wenn also die Gleichung eines Kreises K_3 aus den Gleichungen zweier gegebenen Kreise K_1 und K_2 in der Weise abgeleitet wird:

$$K_3 \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2 = 0,$$

so haben die drei Kreise eine gemeinsame Chordale. Wir bezeichnen dieselbe mit L .

Das Verhältniss $n_1 : n_2$ kann man beliebig ändern; denn es giebt immer zwei Zahlen, die zusammen 1 geben und ein gegebenes Verhältniss haben. Giebt man nun dem Verhältnisse $n_1 : n_2$ alle realen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man eine unendliche Anzahl von Kreisen K , die alle mit K_1 und mit K_2 die Chordale L haben. Sind K_α und K_β zwei dieser Kreise, so haben K_α und K_1 , sowie K_β und K_1 die Chordale L , also ist L auch die Chordale von K_α und K_β . Je zwei Kreise dieser Folge von Kreisen haben also die Chordale L , die somit als die gemeinsame Chordale aller dieser Kreise bezeichnet werden kann.

Eine solche Gruppe von Kreisen nennt man ein Kreisbüschel. Durch zwei Kreise ist ein Kreisbüschel bestimmt; sind K_1 und K_2 zwei Kreise, so werden die Gleichungen aller andern Kreise des durch sie bestimmten Büschels in der Form erhalten: $K \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2 = 0$. Alle Punkte, für welche $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$, annulliren auch K ; also hat man den Satz: Alle Kreise eines Büschels haben gemeinsame reale oder imaginäre Schnittpunkte. Hieraus, sowie aus den Formeln 2. folgt ferner: Die Mittelpunkte aller Kreise eines Büschels liegen auf einer Geraden; dieselbe heisst die Centrale des Büschels.

18. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein (und nur ein) Kreis eines gegebenen Kreisbüschels.

Denn soll der Büschelkreis

$$1. \quad K \equiv n_1 K_1 + n_2 K_2 = 0$$

durch den Punkt P' (x' , y') gehen, so müssen die Zahlen n_1 und n_2 so gewählt sein, dass K von den Coordinaten von P' annullirt wird. Bezeichnet man die Werthe, welche die Polynome K_1 und K_2 annehmen, wenn man darin die unbestimmten Coordinaten x , y durch die gegebenen Werthe x' , y' ersetzt, mit K_1' und K_2' , so hat man die Bedingung

$$n_1 K_1' + n_2 K_2' = 0, \text{ oder } n_1 : n_2 = K_2' : -K_1'.$$

Führt man dies in 1. ein, so ergibt sich die Gleichung des durch P' gehenden Büschelkreises zu

$$2. \quad K_2' K_1 - K_1' K_2 = 0.$$

Die Bedingung $n_1 + n_2 = 1$ braucht nicht festgehalten zu werden; um sie einzuhalten, hätte man die Gleichung 2. durch $K_2' - K_1'$ zu dividiren, doch ändert sich die geometrische Bedeutung einer Curvengleichung nicht, wenn man alle Glieder mit einem constanten Faktor multiplicirt oder dividirt.

Liegt der Punkt P' auf der Chordale, so ist bekanntlich $K_1' = K_2'$; man kann dann diesen Faktor aus der Gleichung 2. weglassen, und dieselbe geht daher über in $K_1 - K_2 = 0$, d. i. in die Gleichung der Chordale. Die

Chordale eines Kreisbüschels ist also selbst als Kreis des Büschels (mit unendlich grossem Radius) anzusehen.

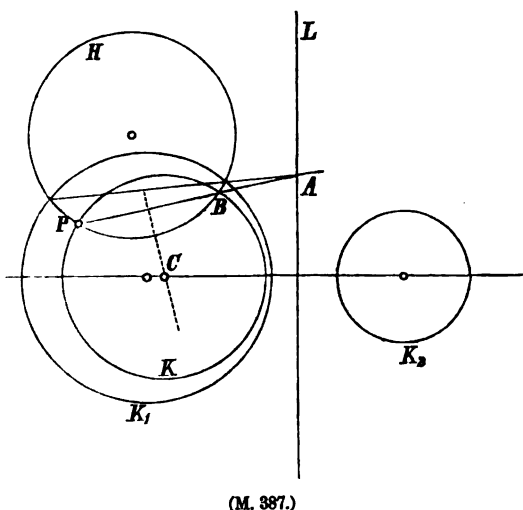
19. Jeder Punkt der Chordale eines Büschels hat gleiche Potenz für alle Kreise des Büschels.

Von jedem Punkte der Chordale aus, der ausserhalb der Büschelkreise liegt, gehen gleich lange Tangenten an alle Büschelkreise.

Da nun ein Kreis, dessen Radius gleich der von seinem Centrum bis an einen Kreis K reichenden Tangente dieses Kreises ist, den Kreis K unter rechten Winkeln schneidet, so ergibt sich der Satz: Von jedem Punkte der Chordale eines Kreisbüschels als Centrum lässt sich ein Kreis construiren, der alle Kreise des Büschels unter rechten Winkeln schneidet.

20. Die Aufgabe: »Den Kreis eines Büschels zu bestimmen, der durch einen gegebenen Punkt geht,« die in No. 18 ihre analytische Lösung gefunden hat, lässt sich auf Grund der mitgetheilten Sätze in folgender Weise constructiv lösen:

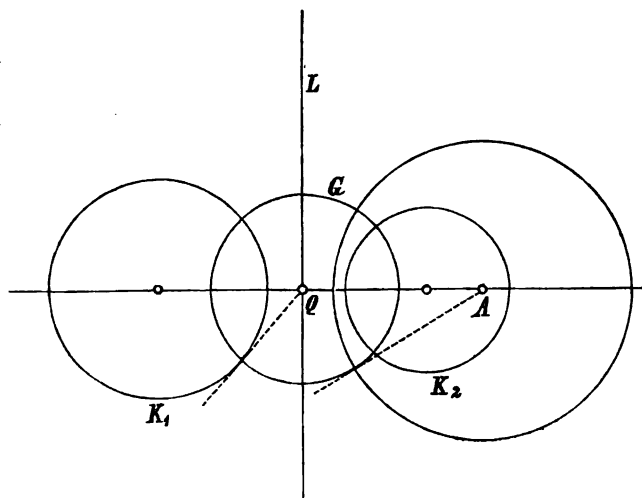
Durch den gegebenen Punkt P lege man einen Kreis H , der den Kreis K_1 (oder K_2) in zwei Punkten schneidet. Man ziehe die Chordale von H und K_1 und durchschneide damit die Büschelchordale L . Von diesem Schnittpunkte A aus ziehe man eine Gerade durch P , und bemerke den Punkt B , in welchem sie den Hilfskreis H zum zweiten Male trifft. Dann geht der gesuchte Büschelkreis K durch B , und sein Centrum ist also der Durchschnitt C der Normalhalbirenden von PB und der Centralen von K_1 und K_2 .



(M. 387.)

Denn der Punkt A hat gleiche Potenz für H und K_1 , sowie für H und K , also auch für K und K_1 , mithin ist L die Chordale von K und K_1 , also gehört K zu dem Büschel $K_1 K_2$.

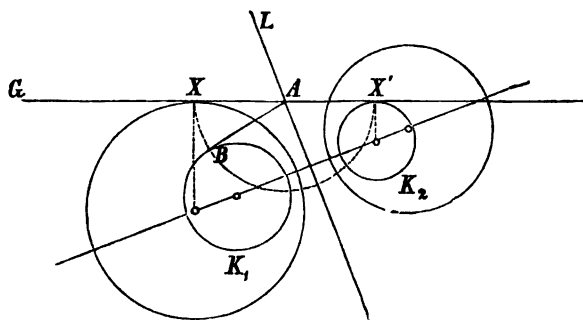
21. Den Kreis eines Büschels, der einen gegebenen Mittelpunkt A hat, findet man, wenn die Büschelkreise keine realen Schnittpunkte haben, durch folgende Construction:



(M. 388.)

Von einem beliebigen Punkte der Büschelchordale aus (z. B. von dem Punkte Q aus, in welchem dieselbe die Büschelcentrale schneidet, lege man eine Tangente an einen der Büschelkreise und mit dieser Tangente als Halbmesser beschreibe man einen Kreis G ; dieser Kreis trifft alle Kreise des Büschels unter rechten Winkeln (No. 19). Legt man daher von A aus Tangenten an G , so sind diese Tangenten Radien des gesuchten Kreises.

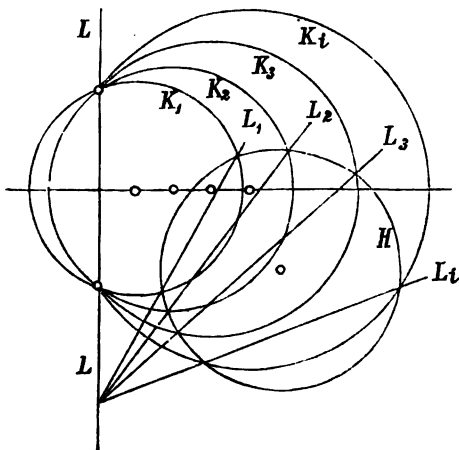
Hat man den Schnittpunkt Q der Büschelchordale und der Centrale zum Mittelpunkt von G genommen, so ist ersichtlich, dass die Aufgabe nur lösbar ist, wenn QA grösser ist als die von Q an die Büschelkreise gelegte Tangente. Ist QA gleich dieser Tangente, oder entgegengesetzt gleich, so verschwindet der Radius des gesuchten Kreises und derselbe zieht sich zu einem Punkte zusammen. Wir finden daher: Wenn die Kreise eines Büschels keine realen Schnittpunkte haben, so giebt es Centra der Büschelkreise nur ausserhalb des Kreises, der vom Schnittpunkte der Chordale und der Centrale aus normal zu den Büschelkreisen construirt wird; die beiden Gegenpunkte dieses Kreises, die auf der Centrale liegen, sind als Büschelkreise mit verschwindend kleinem Radius zu betrachten.



(M. 389.)

22. Um einen Kreis eines Büschels zu finden, der eine gegebene Gerade G berührt, bestimmen wir den Punkt X , in welchem der gesuchte Kreis die Gerade berührt. Durchschneiden wir (in A) die Gerade G mit der Büschelchordale L , und legen durch A eine Tangente AB an einen Kreis des Büschels, so ist (No. 19) AX gleich oder entgegen-

gesetzt gleich der Strecke AB . Machen wir also $X'A = AX = AB$ und construiren die Büschelkreise, die durch X' und X gehen, so sind diese die Lösungen der Aufgabe.



(M. 390.)

23. Construirt man die Chordalen L_1, L_i eines beliebigen Kreises H mit den Kreisen K_1 und K_i des durch K_1 und K_2 bestimmten Büschels, so schneiden sich die Geraden L_1 (Chordale von H und K_1), L (Chordale von K_1 und K_i) und L_i (Chordale von K_i und H) in einem Punkte (nach No. 15), L_i trifft also L in dem Punkte, in welchem L von L_1 geschnitten wird; dieser Punkt bleibt unverändert derselbe, wenn man für K_i der Reihe nach alle Kreise des Büschels setzt. Wir haben daher: Die Chordalen, welche ein beliebiger fester Kreis mit allen den

einzelnen Kreisen eines Kreisbüschels bestimmt, treffen die Büschelchordale in demselben Punkte.

Wie man leicht sieht, ist die Construction No. 20 eine Anwendung dieses Satzes.

Man kann denselben auch leicht analytisch beweisen:

Die Gleichung des Kreises K_i sei

$$K_i \equiv n_{1i} K_1 + n_{2i} K_2 = 0, \quad n_{1i} + n_{2i} = 1.$$

Die Gleichung der Chordale von K_i und H ist dann:

$$L_i \equiv K_i - H \equiv n_{1i} K_1 + n_{2i} K_2 - H = 0,$$

oder wenn man $n_{1i} = 1 - n_{2i}$ einsetzt:

$$L_i \equiv K_1 - H - n_{2i} (K_1 - K_2) = 0.$$

Nun ist $K_1 - K_2 = L = 0$ die Gleichung der Büschelchordale, und $K_1 - H = L_1 = 0$ die Gleichung der Chordale von K_1 und H ; man hat also

$$L_i \equiv L_1 - n_{2i} L = 0$$

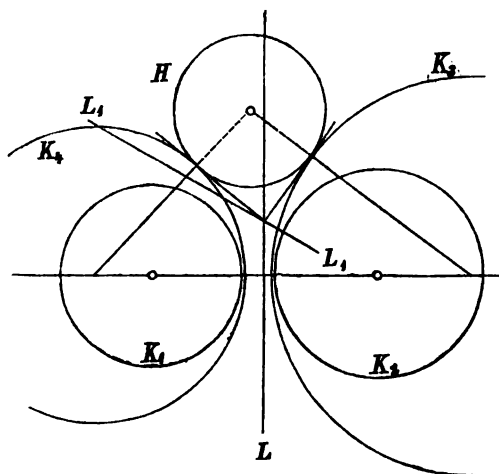
und erkennt daraus, dass L_i durch den Schnittpunkt von L und L_1 geht.

24. Für die Kreise eines Büschels, die einen gegebenen Kreis H berühren, ergibt sich folgende Construction:

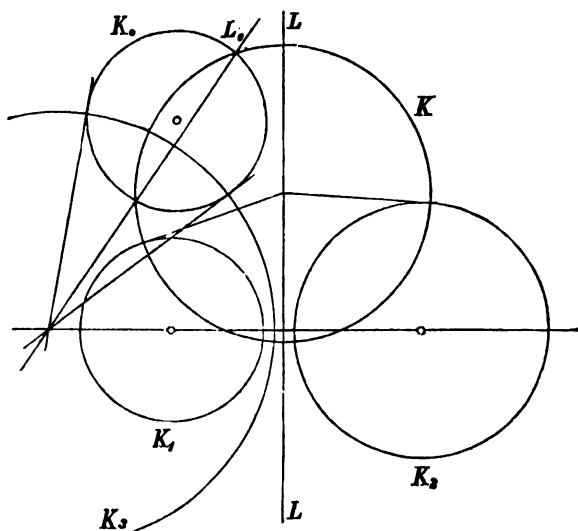
Man construiere die Chordale L_1 des gegebenen Kreises H und des Büschelkreises K_1 und durchschneide damit die Büschelchordale L . Durch diesen Schnittpunkt C gehen dann auch die gemeinsamen Tangenten des Kreises H und der ihn berührenden Büschelkreise, da diese Tangenten die Chordalen des Kreises H und der gesuchten Kreise sind. Man lege also von C aus Tangenten an H , und construiere die beiden Büschelkreise K_3 und K_4 , welche durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehen.

Liegt C ausserhalb H , so giebt es zwei Büschelkreise, die den Kreis H berühren; liegt C auf H , so giebt es nur einen solchen Kreis; liegt C im Innern von H , so ist die Aufgabe nicht lösbar.

Der Kreis eines Büschels, der mit H eine Sehne von gegebener Länge a gemein hat, wird mit Hülfe des Punktes C und des Kreises gefunden, den die Sehnen



(M. 391.)



(M. 392.)

des Kreises H umhüllen, die von der Länge a sind. An diesen Kreis hat man von C aus Tangenten zu legen.

25. Den Kreis eines Büschels, der einen gegebenen Kreis K_0 unter rechten Winkeln schneidet, findet man nun leicht durch folgende Construction.

Von einem beliebigen Punkte der Chordale L als Centrum aus construiren man einen Kreis K , der alle Büschelkreise rechtwinkelig schneidet. Hierauf construiren man die Chordale L_0 von K und K_0 ; der Schnittpunkt von L_0 und der Büschelcentralen ist das Centrum des gesuchten Kreises, und die von diesem Centrum an die Kreise K und K_0 gelegten Tangenten, die alle vier gleiche Länge haben, sind Radien des gesuchten Kreises K_3 .

§ 9. Transformation der Coordinaten.

1. Nachdem wir im vorigen Abschnitte eine besondere Curve zweiten Grades, den Kreis, untersucht haben, liegt uns nun zunächst ob, die Eigenschaften der Curven zweiten Grades ohne jede Beschränkung zu untersuchen.

Eine Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten x und y hat im allgemeinen Falle drei Glieder von der zweiten Potenz, nämlich mit den Coordinatenfactoren x^2 , xy , y^2 ; zwei Glieder von der ersten Potenz, nämlich Vielfache von x und y ; und ein constantes Glied; die allgemeine Form der Gleichung einer Curve zweiten Grades ist daher

$$f \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Diese Gleichung enthält sechs unveränderliche Zahlen, a, b, c, d, e, f , die man durch Division durch eine derselben auf fünf reduciren kann. Giebt man allen oder einigen dieser Zahlen andere Werthe, so ändert sich die Curve f . Diese Aenderung kann zweierlei Art sein: entweder ändert sich nur die Lage der Curve gegen das Coordinatensystem, oder es ändert sich die Gestalt der Curve.

Das wesentliche Interesse ist, Eigenschaften einer Curve kennen zu lernen, die unabhängig von der zufälligen Lage des Coordinatensystems gegen die Curve sind. Wir fragen daher zunächst nach den Aenderungen, die die Coefficienten einer Curvengleichung erfahren, wenn man das Coordinatensystem ändert.

Die Ableitung einer Curvengleichung in Bezug auf ein neues System aus der Curvengleichung bezüglich des ursprünglichen Systems wird als die Transformation der Curvengleichung vom ursprünglichen in das neue System bezeichnet.

Die Transformation erfolgt in der Weise, dass man die Coordinaten eines Punktes, bez. einer Geraden, in Bezug auf das ursprüngliche System durch die Coordinaten bezüglich des neuen Systems ausdrückt, diese Werthe — die Transformationsformeln — in die Curvengleichung einführt und dieselbe schliesslich geeignet ordnet.

Die Coefficienten der transformirten Gleichung setzen sich aus den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung und aus den Grössen zusammen, durch welche die Lage der neuen Coordinatenachsen gegen die ursprünglichen bestimmt wird. Durch geschickte Wahl des neuen Systems wird man es daher dahin bringen können, dass einige Coefficienten der Gleichung besonders einfache Werthe annehmen, und damit die transformirte Curvengleichung selbst eine einfachere, für weitere Untersuchungen besonders geeignete Gestalt erhält.

2. Die einfachste Aenderung des Coordinatensystems besteht in einer parallelen Verschiebung der Achsen; dabei ändert der Nullpunkt seine Lage, während die Achsenrichtungen unverändert bleiben. Eine fernere Aenderung

besteht in der Drehung des Coordinatensystems um den unveränderten Nullpunkt.

Jede beliebige Aenderung der Lage des Coordinatensystems kann, wie man leicht sieht, durch eine Verschiebung und nachherige Drehung (oder in umgekehrter Reihenfolge) erzeugt werden.

Wir wollen nun die Transformationsformeln der Punktcoordinaten zunächst für eine Verschiebung, dann für eine Drehung des Coordinatensystems um den Nullpunkt, und schliesslich für eine beliebige Aenderung des Coordinatensystems aufstellen; hierauf werden die Transformationsformeln der Liniencoordinaten folgen.

3. Transformationsformeln für eine parallele Verschiebung des Coordinatensystems.

Der Nullpunkt des neuen Coordinatensystems sei O_1 , $OA = a$, $OB = b$ seien die Coordinaten von O_1 in Bezug auf das ursprüngliche System XOY , und die neuen Achsen OX_1 und OY_1 seien parallel und gleichgerichtet mit OX und OY ; ferner sei $PC \parallel OY$, $PD \parallel OX$; dann sind OC und OD die Coordinaten des Punktes P bezüglich des ursprünglichen und O_1E und O_1F die Coordinaten bezüglich des neuen Systems. Nun ist

$$OC = OA + AC = OA + O_1E$$

$$OD = OB + BD = OB + O_1F.$$

Bezeichnet man mit x, y die Coordinaten von P im System XOY und mit x', y' die Coordinaten im neuen System $X'O_1Y'$, so folgt hieraus:

$$2. \quad x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Dies sind die gesuchten Transformationsformeln.

Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve in Bezug auf das System XOY , so erhält man also die Gleichung bezüglich des Systems $X'O_1Y'$, indem man in der Function $f(x, y)$ die Grössen x und y durch $x' + a$ und $y' + b$ ersetzt.

4. Transformationsformeln für eine Drehung des Coordinatensystems.

Hat das neue Coordinatensystem $X'OY'$ den Nullpunkt mit dem ursprünglichen XOY gemein und ist der Winkel $XOX' = \omega$; ist ferner $XOP = \varphi$, $X'OP = \varphi'$ und $OP = r$, so hat man bekanntlich, wenn x, y die Coordinaten von P im System XOY , und x', y' die im neuen System $X'OY'$ sind:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Ersetzt man φ durch $\omega + \varphi'$, so entsteht:

$$x = r \cos(\omega + \varphi') = r \cos \omega \cos \varphi' - r \sin \omega \sin \varphi'$$

$$y = r \sin(\omega + \varphi') = r \sin \omega \cos \varphi' + r \cos \omega \sin \varphi'.$$

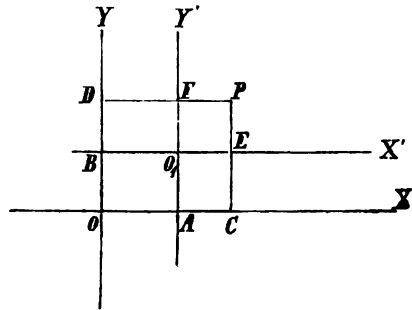
Nun ist aber $r \cos \varphi' = x'$, $r \sin \varphi' = y'$, also hat man die Transformationsformeln:

$$x = \cos \omega \cdot x' - \sin \omega \cdot y',$$

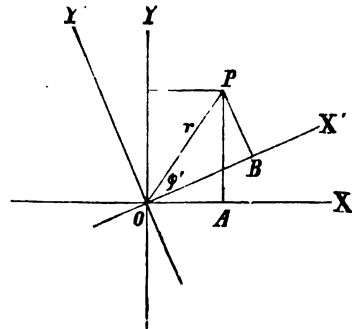
$$y = \sin \omega \cdot x' + \cos \omega \cdot y'.$$

Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve für das System XOY , so ist also die Gleichung dieser Curve für das System $X'OY'$:

$$f[(\cos \omega \cdot x' - \sin \omega \cdot y'), (\sin \omega \cdot x' + \cos \omega \cdot y')] = 0.$$



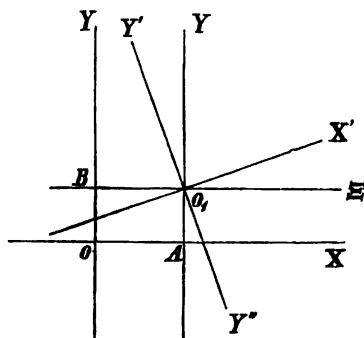
(M. 393.)



(M. 394.)

5. Transformationsformeln für eine beliebige Veränderung des Coordinatensystems.

Der Nullpunkt des neuen Systems sei O_1 und habe die Coordinaten $OA = a$ und $OB = b$; ferner sei O_1X' die positive Seite der neuen X -Achse; ist $Y'Y''$ normal zu OX' , so ist entweder O_1Y' oder O_1Y'' die positive Hälfte der neuen



(M. 395.)

Y -Achse. Wir können das Coordinatensystem XOY zunächst unter Beibehaltung der Achsenrichtungen verschieben, bis der Ursprung nach O_1 kommt und die Coordinatenachsen mit den zu OX und OY parallelen Geraden $O_1\xi$ und $O_1\eta$ zusammenfallen. Drehen wir hierauf das Coordinatensystem um den Punkt O_1 , bis die positive Hälfte der Abscissenachse mit der positiven Hälfte der neuen Abscissenachse zusammenfällt, so falle dabei (wie in der Figur angedeutet) die positive Seite der Ordinatenachse auf O_1Y' . Ist nun O_1Y' die positive Hälfte der neuen Ordinatenachse, so ist also durch die erste Ver-

schiebung und die nachfolgende Drehung das ursprüngliche System in das neue übergeführt. Ist aber O_1Y'' die positive Hälfte des neuen Systems, so kann man das ursprüngliche nicht durch Verschiebung und Drehung in das neue überführen; man muss vielmehr schliesslich das System noch im Raume um die Gerade O_1X' um einen gestreckten Winkel drehen, um die positive Hälfte der Ordinatenachse in die neue Lage zu bringen.

Wir wollen das ursprüngliche und das neue System im ersten Falle gleichsinnig, im letzteren ungleichsinnig nennen.

Sind x, y, ξ, η, x', y' die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf die Systeme $XOY, \xi O_1\eta$ und in Bezug auf das mit denselben gleichsinnige System $X'O_1Y'$, so hat man nach No. 3. und 4.:

$$\begin{aligned} 1. \quad & x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \\ 2. \quad & \xi = \cos \omega \cdot x' - \sin \omega \cdot y', \quad \eta = \sin \omega \cdot x' + \cos \omega \cdot y'. \end{aligned}$$

Hieraus folgen die Transformationsformeln für gleichsinnige Systeme:

$$\begin{aligned} 3. \quad & x = \cos \omega \cdot x' - \sin \omega \cdot y' + a \\ & y = \sin \omega \cdot x' + \cos \omega \cdot y' + b. \end{aligned}$$

Die Coordinaten eines Punktes in den Systemen $X'O_1Y'$ und $X'O_1Y''$ unterscheiden sich nur durch Vorzeichenwechsel der Ordinate; sind x', y' die Coordinaten von P in dem System, welches O_1X' und O_1Y'' zu positiven Achsenhälften hat, so hat man daher für ungleichsinnige Systeme:

$$\begin{aligned} 4. \quad & x = \cos \omega \cdot x' + \sin \omega \cdot y' + a \\ & y = \sin \omega \cdot x' - \cos \omega \cdot y' + b. \end{aligned}$$

6. Wir wenden uns nun zu den Transformationsformeln der Liniencoordinaten, und zwar zunächst für eine Verschiebung des Coordinatensystems.

Sind u, v die Coordinaten einer Geraden T im ursprünglichen Systeme, so ist die Gleichung von T in diesem Systeme:

$$1. \quad ux + vy - 1 = 0.$$

Um die Gleichung im neuen Systeme $X'O_1Y'$ zu erhalten, setze man in 1. (No. 3)

$$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Man erhält dann $u(x' + a) + v(y' + b) - 1 = 0$, oder geordnet

$$2. \quad ux' + vy' - (1 - au - bv) = 0.$$

Sind nun u' , v' die Coordinaten von T im neuen Systeme, so folgt aus 2.

$$3. \quad u' = \frac{u}{1 - au - bv}, \quad v' = \frac{v}{1 - au - bv}.$$

Diese Formeln lehren die Coordinaten von T im neuen System aus denen im ursprünglichen zu berechnen. Aus denselben folgt

$$u'(1 - au - bv) = u, \quad v'(1 - au - bv) = v.$$

Berechnet man hieraus u und v , so erhält man die Transformationsformeln

$$u = \frac{u'}{1 + au' + bv'}, \quad v = \frac{v'}{1 + au' + bv'}.$$

7. Transformationsformeln der Liniencoordinaten für eine Drehung des Systems um den Ursprung.

Ist $ux + vy - 1 = 0$ die Gleichung der Geraden im Systeme XOY , so erhält man ihre Gleichung im Systeme $X'O_1Y'$, indem man für x und y die Werthe einsetzt (No. 4) $x = \cos \omega \cdot x' - \sin \omega \cdot y'$, $y = \sin \omega \cdot x' + \cos \omega \cdot y'$:

$$u(\cos \omega \cdot x' - \sin \omega \cdot y') + v(\sin \omega \cdot x' + \cos \omega \cdot y') - 1 = 0,$$

$$\text{oder} \quad (\cos \omega \cdot u + \sin \omega \cdot v)x' + (\sin \omega \cdot u + \cos \omega \cdot v)y' - 1 = 0.$$

Die Faktoren von x' und y' sind die Coordinaten der Geraden im neuen Systeme; also hat man die Formeln

$$1. \quad \begin{aligned} u' &= \cos \omega \cdot u + \sin \omega \cdot v, \\ v' &= -\sin \omega \cdot u + \cos \omega \cdot v. \end{aligned}$$

Dieselben lehren u' und v' aus den Coordinaten des ursprünglichen Systems zu finden. Um u und v durch u' und v' auszudrücken, multipliciren wir die Gleichungen 1. erst der Reihe nach mit $\cos \omega$ und $(-\sin \omega)$, dann mit $\sin \omega$ und $\cos \omega$, und addiren jedesmal. Wir erhalten dann die gesuchten Formeln:

$$2. \quad \begin{aligned} u &= \cos \omega \cdot u' - \sin \omega \cdot v', \\ v &= \sin \omega \cdot u' + \cos \omega \cdot v'. \end{aligned}$$

8. Transformationsformeln der Liniencoordinaten für beliebige Systeme.

Sind u, v, u', v' die Coordinaten von T im Systeme XOY, EO_1Y und dem zu ihnen gleichsinnigen $X'OY'$, so ist nach No. 6. und 7.:

$$1. \quad u = \cos \omega \cdot u' - \sin \omega \cdot v', \quad v = \sin \omega \cdot u' + \cos \omega \cdot v';$$

$$2. \quad u = \frac{u}{1 + au + bv}, \quad v = \frac{v}{1 + au + bv}.$$

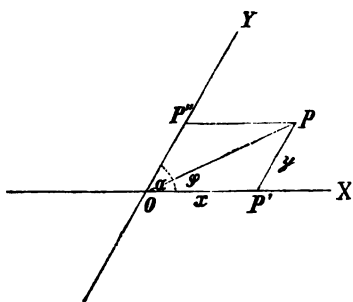
Setzt man nun in 2. für u und v die Werthe aus 1., so erhält man die Formeln für gleichsinnige Systeme:

$$3. \quad \begin{aligned} u &= \frac{\cos \omega \cdot u' - \sin \omega \cdot v'}{1 + (a \cos \omega + b \sin \omega) u' - (a \sin \omega - b \cos \omega) v'}, \\ v &= \frac{\sin \omega \cdot u' + \cos \omega \cdot v'}{1 + (a \cos \omega + b \sin \omega) u' - (a \sin \omega - b \cos \omega) v'}. \end{aligned}$$

Für ungleichsinnige Systeme erhält man die Formeln, wenn man in den Formeln für gleichsinnige das Zeichen von v' wechselt:

$$4. \quad \begin{aligned} u &= \frac{\cos \omega \cdot u' + \sin \omega \cdot v'}{1 + (a \cos \omega + b \sin \omega) u' + (a \sin \omega - b \cos \omega) v'}, \\ v &= \frac{\sin \omega \cdot u' - \cos \omega \cdot v'}{1 + (a \cos \omega + b \sin \omega) u' + (a \sin \omega - b \cos \omega) v'}. \end{aligned}$$

9. Schiefwinkelige Parallelkoordinaten. Bei einigen Untersuchungen macht man mit Vortheil von einer allgemeineren Coordinatenbestimmung Gebrauch, die darin besteht, dass man die Coordinatenachsen OX und OY nicht mehr



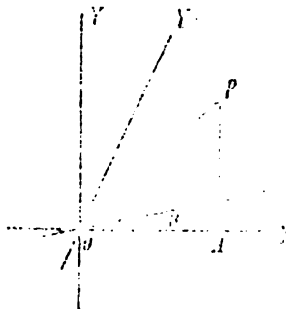
(M. 896.)

rechtwinkelig, sondern schiefwinkelig zu einander annimmt, und jeden Punkt durch Strahlen, die mit OY und OX parallel sind, auf die X -Achse und die Y -Achse projectirt, so dass der Nullpunkt O , ein Punkt P und seine Projectionen auf die beiden Achsen die Paare gegenüberliegender Ecken eines Parallelogramms sind.

Ist $XOY = \alpha$, $XOP = \varphi$, $OP = r$, so folgt aus $OP'P$:

$$x = \frac{r}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha - \varphi), \quad y = \frac{r}{\sin \alpha} \sin \varphi.$$

Entwickelt man $\sin(\alpha - \varphi)$, so erhält man die beiden Formeln:



(M. 897.)

$$1. \quad x = r \cos \varphi - y \cos \alpha, \quad y = \frac{r}{\sin \alpha} \sin \varphi.$$

10. Wir entwickeln nun die Formeln für den Uebergang aus einem rechtwinkligen in ein schiefwinkliges System und beschränken uns dabei auf den einfacheren Fall, dass die beiden Systeme einen gemeinsamen Anfangspunkt haben.

Ist wieder $X'OY' = \alpha$, $XOX' = \omega$, $X'OP = \varphi$, $OP = r$, sind ferner x, y, x', y' die Coordinaten eines Punktes bezüglich der Systeme XOY und $X'OY'$, so ist

$$1. \quad \begin{aligned} x &= r \cos(\omega + \varphi) = r \cos \omega \cdot \cos \varphi - r \sin \omega \sin \varphi \\ y &= r \sin(\omega + \varphi) = r \sin \omega \cdot \cos \varphi + r \cos \omega \sin \varphi, \end{aligned}$$

ferner ist nach No. 9:

$$2. \quad \begin{aligned} x' &= r \cos \varphi - y' \cos \alpha, \quad \text{also} \quad r \cos \varphi = x' + y' \cos \alpha, \\ y' &= \frac{r}{\sin \alpha} \sin \varphi, \quad \text{also} \quad r \sin \varphi = y' \sin \alpha. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe für $r \cos \varphi$ und $r \sin \varphi$ in 1. ein, so erhält man die Transformationsformeln:

$$3. \quad \begin{aligned} x &= \cos \omega \cdot x' + \cos(\omega + \alpha) \cdot y' \\ y &= \sin \omega \cdot x' + \sin(\omega + \alpha) \cdot y'. \end{aligned}$$

11. Gleichung der Geraden in einem schiefwinkligen Coordinatensysteme. Denkt man sich ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das mit dem schiefwinkligen den Nullpunkt gemein hat, und sind ξ, η die Coordinaten eines Punktes in diesem Systeme, x, y die Coordinaten im schiefwinkligen Systeme und

$$1. \quad m\xi + n\eta - 1 = 0$$

die Gleichung einer Geraden T im rechtwinkligen Systeme, so erhält man die Gleichung von T im schiefwinkligen Systeme, indem man in den Formeln No. 10, 3. statt x, y, x', y' der Reihe nach die jetzt geltenden Bezeichnungen ξ, η, x, y setzt und hierauf die Werthe für ξ, η in die Gleichung 1. einsetzt.

Wie man sofort sieht, erhält man eine Gleichung von der Form

$$2. \quad Mx + Ny - 1 = 0,$$

wobei M und N von m, n und den Winkeln ω und α abhängen.

Sind S_1 und S_2 die Spuren der Geraden auf den Coordinatenachsen, und setzt man $OS_1 = a$, $OS_2 = b$, so sind

die Coordinaten von S_1 : $x = a$, $y = 0$,

" " " S_2 : $x = 0$, $y = b$.

Beide Coordinatenpaare genügen der Gleichung der Geraden. Setzt man sie in diese Gleichung ein, so erhält man

$$3. \quad Ma - 1 = 0, \quad \text{also} \quad M = 1 : a,$$

$$Nb - 1 = 0, \quad \text{"} \quad N = 1 : b.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung der Geraden ein, so erhält man dieselbe in der Gestalt:

$$4. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

die vollständig mit der Gleichung für rechtwinkelige Achsen übereinstimmt.

Man betrachtet die reciproken Werthe der Achsenabschnitte a und b als die Coordinaten der Geraden im schiefwinkligen Systeme und bezeichnet sie wieder mit u und v . Die Bedingung, welche die Coordinaten eines Punktes und einer Geraden erfüllen, wenn der Punkt auf der Geraden liegt, lautet also auch für ein schiefwinkliges System

$$5. \quad ux + vy - 1 = 0.$$

12. Um die Transformationsformeln der Liniencoordinaten beim Uebergang aus einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Systeme mit demselben Nullpunkte zu erhalten, haben wir die im Anfange der vorigen Nummer angedeutete Substitution auszuführen. Sind u, v die Coordinaten einer Geraden im ursprünglichen (rechtwinkligen), u', v' die im schiefwinkligen Systeme, so sind also $u\xi + v\eta - 1 = 0$, und $u'x + v'y - 1 = 0$ die Gleichungen der Geraden in den beiden Systemen. Nun ist nach den Transformationsformeln in No. 10.

$$\xi = \cos \omega \cdot x + \sin(\omega + \alpha)y, \quad \eta = \sin \omega \cdot x + \sin(\omega + \alpha)y,$$

führt man dies in $u\xi + v\eta - 1 = 0$ ein, so entsteht:

$$(\cos \omega \cdot u + \sin \omega \cdot v)x + [\cos(\omega + \alpha) \cdot u + \sin(\omega + \alpha) \cdot v]y - 1 = 0.$$

Hieraus folgen die Formeln:

$$1. \quad \begin{aligned} u' &= \cos \omega \cdot u + \sin \omega \cdot v, \\ v' &= \cos(\omega + \alpha) \cdot u + \sin(\omega + \alpha) \cdot v. \end{aligned}$$

Sie dienen dazu, die Coordinaten der Geraden im schiefwinkligen Systeme aus denen im rechtwinkligen zu berechnen.

Multiplicirt man die erste dieser Formeln mit $+\sin(\omega + \alpha)$, die zweite mit $-\sin \omega$ und addirt, so erhält man

$$3. \quad \sin(\omega + \alpha) \cdot u' - \sin \omega \cdot v' = [\sin(\omega + \alpha) \cos \omega - \cos(\omega + \alpha) \sin \omega] u$$

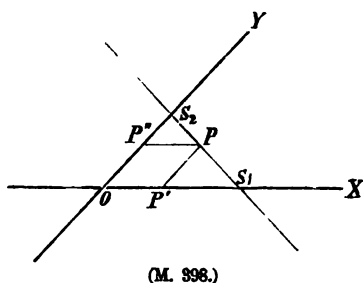
Multiplicirt man ferner die erste Gleichung in 1. mit $-\cos(\omega + \alpha)$, die andere mit $\cos \omega$ und addirt, so entsteht

$$4. \quad -\cos(\omega + \alpha) u' + \cos \omega \cdot v' = [-\sin \omega \cdot \cos(\omega + \alpha) + \sin(\omega + \alpha) \cos \omega] v.$$

Aus den Gleichungen 3. und 4. gehen die gesuchten Transformationsformeln hervor:

$$5. \quad u = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot [\sin(\omega + \alpha) \cdot u' - \sin \omega \cdot v']$$

$$v = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot [-\cos(\omega + \alpha) u' + \cos \omega \cdot v'].$$



13. Wir entwickeln nun noch die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel in Bezug auf ein Coordinatensystem, auf dessen Achsen conjugirte Diameter liegen. Ist $m\xi^2 + n\eta^2 - 1 = 0$ die Gleichung der einen und der andern Curve in Bezug auf die Symmetrieachsen, und sind x, y die Coordinaten eines Punktes für das schiefwinkelige System, so hat man in $m\xi^2 + n\eta^2 - 1 = 0$ die Werthe für ξ, η einzusetzen, die man aus den Formeln No. 10, 3. erhält, wenn man darin x, y, x', y' gegen ξ, η, x, y vertauscht. Wie man sieht, erhält man eine Gleichung von der Form:

1.
$$Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - 1 = 0.$$

Von dieser Form also ist die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf ein beliebiges schiefwinkeliges Coordinatensystem, das den Mittelpunkt der Curve zum Nullpunkte hat.

Eine Gerade T , die der X -Achse parallel ist und von der Y -Achse die Strecke $OB = \beta$ abschneidet, hat die Gleichung $y = \beta$.

Setzt man diesen Werth in 1. ein, so erhält man

2.
$$Mx^2 + 2N\beta x + P\beta^2 - 1 = 0,$$

also eine gemischt quadratische Gleichung in x , deren beide Wurzeln die Strecken BC und BC' sind, welche die Curve von der Geraden T abschneidet.

Sind nun die Richtungen der Achsen conjugirt, so sind die Strecken BC und BC' für jeden Werth von β entgegengesetzt gleich, die Gleichung 2. also ist rein quadratisch. Dies trifft nur dann ein, wenn $N = 0$.

Die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf conjugirte Diameter als Achsen lautet also:

3.
$$Mx^2 + Py^2 - 1 = 0.$$

Bezeichnet man mit A_1 und B_1 die Schnittpunkte der Ellipse mit der positiven X - und Y -Achse, und

setzt $OA_1 = a_1$, $OB_1 = b_1$, so sind

die Coordinaten von A_1 : $x = a_1$, $y = 0$

„ „ „ „ B_1 : $x = 0$, $y = b_1$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 3. ein, so erhält man

$$Ma_1^2 - 1 = 0, \quad \text{also} \quad M = 1 : a_1^2,$$

$$Pb_1^2 - 1 = 0, \quad \text{„} \quad P = 1 : b_1^2.$$

Daher ist die Gleichung der Ellipse für zwei conjugirte Diameter:

4.
$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

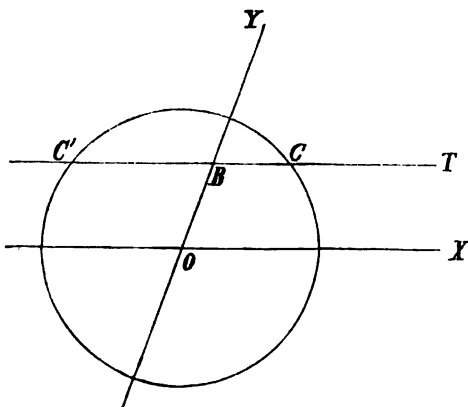
Bei der Hyperbel fragen wir zunächst nach den Asymptoten. Dividiren wir die Gleichung 3. durch x^2 , so entsteht

$$M + P \cdot \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Setzen wir $x = \infty$, so verschwindet das letzte Glied und man erhält

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{-\frac{M}{P}}.$$

Die unendlich fernen Punkte der Curve 3. liegen also auf den beiden Geraden, deren Gleichungen sind



(M. 399.)

$$\frac{y}{x} = \sqrt{-\frac{M}{P}}, \quad \frac{y}{x} = -\sqrt{-\frac{M}{P}}.$$

Diese Geraden sind die Asymptoten der Curve. Für die Ellipse ist $-M:P = -a_1^2:b_1^2$, die Asymptoten sind also imaginär. Die Hyperbel hingegen hat reale Asymptoten, also ist für die Hyperbel der Quotient $-M:P$ positiv; folglich haben M und P ungleiche Zeichen. Man kann nun die Bezeichnung der Coordinatenachsen immer so wählen, dass M positiv, P negativ ist. Setzen wir zur Verdeutlichung dessen:

$$M = 1:a_1^2, \quad P = -1:b_1^2,$$

so erhält die Hyperbel die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Die X -Achse wird von der Hyperbel in den realen Punkten geschnitten, für welche $y = 0$ und daher $x = \pm a$ ist. Die Y -Achse wird in imaginären Punkten geschnitten, deren Ordinaten $y = \pm b_1 \sqrt{-1}$ sind.

Die Asymptoten haben die Gleichungen

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b_1}{a_1},$$

sie schneiden daher von den Hyperbeltangenten, die parallel der Y -Achse sind, die Strecken $\pm b_1$ ab (vom Tangentialpunkte aus gerechnet).

14. Die Gleichung einer Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten kann in folgender Weise erhalten werden. Sind OX und OY die Asymptoten und ist P ein Hyperbelpunkt, so ist bekanntlich (§ 3, 6)

$$1. \quad S_2 P \cdot PS_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \cdot b^2,$$

wenn mit α der halbe Winkel der Asymptoten und mit β und γ die Winkel OS_2S_1 und S_2S_1X bezeichnet werden.

Nun ist

$$S_2 P : P'P = \sin 2\alpha : \sin \beta,$$

$$PS_1 : P'P = \sin 2\alpha : \sin \gamma,$$

also, wenn man x und y

für $P'P$ und $P''P$ setzt:

$$\begin{aligned} & S_2 P \cdot PS_1 \\ &= \frac{\sin^2 2\alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \cdot xy. \end{aligned}$$

Setzt man dies in

1. ein, so erhält man

$$xy = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha} \cdot b^2,$$

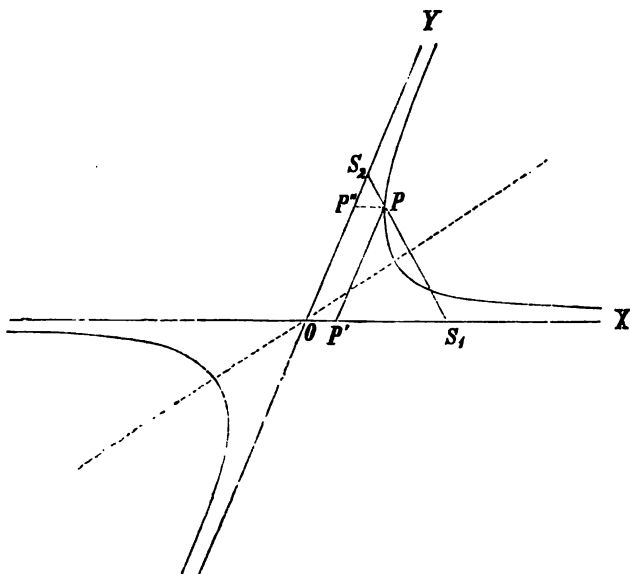
oder, da

$$\sin^2 2\alpha = 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha:$$

2.

$$xy = \frac{b^2}{4 \sin^2 \alpha}.$$

Für die gleichseitige Hyperbel hat man $b = a$, $\alpha = 45^\circ$, daher $4 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$ und die Gleichung in Bezug auf das in diesem Falle orthogonale Coordinatensystem der beiden Asymptoten wird daher $xy = \frac{1}{2} a^2$.



(M. 400.)

Transformation der Gleichungen zweiten Grades in Liniencoordinaten.

Unter einer Curve n ter Ordnung versteht man eine Curve, deren Gleichung in Liniencoordinaten vom n ten Grade ist; unter einer Curve zweiter Klasse versteht man eine Curve, deren Gleichung in Liniencoordinaten vom zweiten Grade ist.

Die einfachste Curve erster Ordnung ist die Gerade; das Gebilde erster Ordnung zweiter Klasse ist die Parabel. Die allgemeinste Gleichung einer Curve zweiter Ordnung zweiter Klasse ist:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Die allgemeinste Gleichung einer Curve zweiter Klasse ist:

$$au^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \kappa = 0$$

Wir werden nun die Gleichungen zu anderen Coordinatensystemen transformiren und dann die neuen Systeme so wählen, dass die Gleichungen sich möglichst vereinfachen; wir beginnen mit der Transformation in Punktkoordinaten.

Man schiebt man die Coordinatenachsen, ohne dass der neue Ursprung die Coordinaten μ, ν hat, um μ, ν nach (S. 9, No. 3)

$$x = x' + \mu, \quad y = y' + \nu;$$

folgt:

$$x^2 = x'^2 + 2\mu x' + \mu^2,$$

$$y^2 = y'^2 + 2\nu y' + \nu^2,$$

$$xy = x'y' + \nu x' + \mu y' + \mu\nu.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

ein, so erhält man

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2(a\mu + b\nu + d)x' + (b\mu + c\nu + e)y' + \mu^2 a + 2\mu\nu b + \nu^2 c + 2d\mu + 2e\nu + f = 0.$$

Es zeigt sich: Bei einer Verschiebung der Coordinaten ändern sich die Coefficienten der drei quadratischen Glieder nicht. Es zeigt sich ferner: Bei einer Verschiebung der Coordinaten ändern sich die Coefficienten der drei linearen Glieder nicht. Es zeigt sich endlich: Bei einer Verschiebung der Coordinaten ändern sich die Constanten nicht. Es zeigt sich endlich: Bei einer Verschiebung der Coordinaten ändern sich die Constanten nicht.

Wir wollen nun das neue Coordinatensystem so wählen, dass die vierten und fünften Glieder der transformirten Gleichung verschwinden; wenn

$$a\mu + b\nu = -d,$$

$$b\mu + c\nu = -e.$$

Setzt man daher die erste Gleichung mit $-c$, die zweite mit $-b$, die andere mit $-a$ und addirt jedesmal die dritte, so erhält man die Lösungen

$$\mu = \frac{cd - be}{b^2 - ac}, \quad \nu = \frac{ae - bd}{b^2 - ac}.$$

Es zeigt sich: Der Punkt, der diese Grössen μ und ν zu Coordinaten des neuen Coordinatensystems untauglich, wenn c und b nicht beide Null sind, wenn

$$b^2 - ac = 0,$$

gleichzeitig die Zähler von μ und ν verschwinden

6. Wenn die drei Bedingungen 1. $b^2 - ac = 0$, 2. $cd - be = 0$, 3. $ae - bd = 0$ zugleich erfüllt sind, werden μ und ν unbestimmt.

Aus den Gleichungen $b^2 = ac$, $cd = be$ folgt durch Multiplication der linken und rechten Seiten $b^2 cd = abce$.

Ist nun weder $b = 0$, noch $c = 0$, so ergibt die letzte Gleichung $bd = ae$, also folgt dann aus den ersten beiden Bedingungen die dritte.

Ist $b = 0$, so folgt, dass entweder auch $c = 0$ oder $a = 0$; im ersten Falle ist dann zugleich 2. erfüllt, im andern zugleich 3.; im ersteren ist also μ unbestimmt und $\nu = \infty$, im andern ist $\mu = \infty$ und ν unbestimmt.

7. Wir wollen diese besonderen Fälle zunächst ins Auge fassen, und bemerken noch vorher, dass, wenn b , a und c zugleich Null sind, die Gleichung der Curve aufhört vom zweiten Grade zu sein.

a) Ist $b = 0$, und $c = 0$, (und $a \geq 0$), so ist die Gleichung der Curve

$$x^2 + 2 \frac{d}{a} x + 2 \frac{e}{a} y + \frac{f}{a} = 0.$$

Wir schreiben statt dessen $x^2 + 2 \frac{d}{a} x + \frac{d^2}{a^2} + 2 \frac{e}{a} y + \frac{f}{a} - \frac{d^2}{a^2} = 0$, wofür gesetzt werden kann

$$1. \quad \left(x + \frac{d}{a}\right)^2 + 2 \frac{e}{a} \left(y - \frac{d^2 - af}{2ae}\right) = 0.$$

Verschieben wir die Achsen, so dass der neue Nullpunkt die Coordinaten $-d:a$ und $(d^2 - af):2ae$ hat, so sind die Transformationsformeln

$$x = x' - \frac{d}{a}, \quad y = y' + \frac{d^2 - af}{2ae}.$$

Setzen wir diese in die Gleichung ein, so entsteht die transformirte Gleichung

$$2. \quad x'^2 + 2 \frac{e}{a} y' = 0.$$

Hieraus folgt (vergl. § 2, 10): Die Gleichung $ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ ist die Gleichung einer Parabel; der Scheitel derselben hat die Coordinaten $-d:a$ und $(d^2 - af):2ae$, die Symmetrieachse ist der Ordinatenachse parallel; die Curve erstreckt sich in der Richtung der positiven oder negativen Seite der Ordinatenachse, je nachdem e und a ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

b) Ist $a = 0$, $b = 0$, (und $c \geq 0$), so ist die Gleichung

$$y^2 + 2 \frac{d}{c} x + 2 \frac{e}{c} y + \frac{f}{c} = 0.$$

Man kann hierfür schreiben:

$$3. \quad \left(y + \frac{e}{c}\right)^2 + 2 \frac{d}{c} \left(x - \frac{d^2 - cf}{2cd}\right) = 0.$$

Verschiebt man diesmal die Coordinatenachsen so, dass der neue Ursprung die Coordinaten $(d^2 - cf):2cd$ und $-e:c$, so ergibt sich

$$4. \quad y'^2 + 2 \frac{d}{c} x' = 0.$$

Die Gleichung $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ ist daher die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Coordinaten $(d^2 - cf):2cd$ und $-e:c$ hat, und die sich in der Richtung der positiven oder negativen Seite der Abscissenachse erstreckt, je nachdem die Coefficienten d und c ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

8. Sind a , b , c von Null verschieden und ist zugleich

1. $b^2 - ac = 0$, 2. $cd - be = 0$, also auch 3. $ae - bd = 0$,
so schreibe man die Curvengleichung

$$a(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2) + 2d(x + \frac{e}{d}y) + f = 0,$$

und setze dann $c = b^2 : a$, und (nach 3.) $e : d = b : a$; man erhält

$$a(x + \frac{b}{a}y)^2 + 2d(x + \frac{b}{a}y) + f = 0,$$

und nach Multiplication mit a :

4. $(ax + by)^2 + 2d(ax + by) + af = 0.$

Setzt man abkürzend $ax + by = S$, so erhält man:

5. $S^2 + 2dS + af = 0.$

Die linke Seite lässt sich in zwei bezüglich S lineare Faktoren zerlegen, die man durch Auflösung der quadratischen Gleichung 5. erhält. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $-d + \sqrt{d^2 - af}$ und $-d - \sqrt{d^2 - af}$, daher gilt die Identität

$$S^2 + 2dS + af = (S + d - \sqrt{d^2 - af})(S + d + \sqrt{d^2 - af}).$$

Setzt man für S wieder $ax + by$, so hat man nun 4. umgestaltet zu

6. $(ax + by + d - \sqrt{d^2 - af})(ax + by + d + \sqrt{d^2 - af}) = 0.$

Diese Gleichung löst sich in die beiden linearen auf:

7. $ax + by + d - \sqrt{d^2 - af} = 0,$

8. $ax + by + d + \sqrt{d^2 - af} = 0.$

Ist also $b^2 - ac = 0$, $cd - be = 0$, und $ae - bd = 0$, so stellt die Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ zwei parallele Gerade dar, welche die Gleichungen haben:

$$ax + by + d - \sqrt{d^2 - af} = 0,$$

$$ax + by + d + \sqrt{d^2 - af} = 0.$$

Ist $d^2 - af < 0$, so sind diese Geraden conjugirt complex; ist $d^2 - af = 0$, so fallen sie in eine Gerade $ax + by + d = 0$, und die linke Seite der Curvengleichung ist die zweite Potenz der linearen Function $ax + by + d$; ist $d^2 - af > 0$, so sind die Geraden real und von einander verschieden.

9. Ist $b^2 - ac = 0$, und $cd - be$, sowie $ae - bd$ von Null verschieden, so multipliciren wir die Curvengleichung

1. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

zunächst mit a und ersetzen dann ac durch b^2 ; wir erhalten dann

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + 2adx + 2aey + af = 0, \text{ oder}$$

2. $(ax + by)^2 + 2adx + 2aey + af = 0.$

Es liegt nun nahe, nach einer solchen Drehung des Coordinatensystems zu suchen, durch welche der Klammerinhalt $ax + by$ durch ein Vielfaches einer Coordinate allein ersetzt wird, z. B. durch ein Vielfaches von x' . Aus den für eine Drehung des Systems geltenden Formeln § 9, No. 4

$$x = \cos \omega x' - \sin \omega y'$$

$$y = \sin \omega x' + \cos \omega y'$$

folgt $ax + by = (a \cos \omega + b \sin \omega)x' - (a \sin \omega - b \cos \omega)y'.$

Soll dies nur ein Vielfaches von x' sein, so muss der Coefficient von y' verschwinden; man hat also für ω die Bedingung

3. $a \sin \omega - b \cos \omega = 0.$

Setzt man den hieraus folgenden Werth $\sin \omega = b \cos \omega : a$ in die Gleichung $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$ ein, so erhält man

$$4. \quad \cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Da es genügt, einen Winkel ω zu erhalten, der der Bedingung 3. genügt, so können wir festsetzen, dass der positive Werth der Quadratwurzel genommen werde. Mit Hülfe der Werthe 4. wird nun

$$ax + by = \left(a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) x' = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot x'.$$

Ferner liefert die Transformation:

$$2adx + 2aey = \frac{2ad}{\sqrt{a^2 + b^2}} (ax' - by') + \frac{2ae}{\sqrt{a^2 + b^2}} (bx' + ay').$$

Hieraus ergibt sich die transformirte Gleichung

$$5. \quad (a^2 + b^2) x'^2 + 2a \cdot \frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}} x' + 2a \frac{ae - bd}{\sqrt{a^2 + b^2}} y' + af = 0.$$

Die Curve ist daher (No. 7, a) eine Parabel, deren Achse parallel der Y' -Achse ist. Die Coordinaten des Parabelscheitels im System $X'OY'$ sind:

$$6. \quad x' = -a \frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}^3}, \quad y' = \frac{a(ad + be)^2 - (a^2 + b^2)^2 f}{2(ae - bd) \cdot \sqrt{a^2 + b^2}^3}.$$

Die Coordinaten des Scheitels im ursprünglichen System ergeben sich aus x' und y' durch die Transformationsformeln:

$$7. \quad x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (ax' - by'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (bx' + ay').$$

Man erhält:

$$x = \frac{1}{2(a^2 + b^2)^2 (ae - bd)} [-2a^2(ad + be)(ae - bd) - ab(ad + be)^2 + bf(a^2 + b^2)^2].$$

Hieraus findet man durch einfache Rechnung:

$$8. \quad x = \frac{(a^2 + b^2)^2 bf - a(ad + be)[e(a^2 + b^2) + a(ae - bd)]}{2(a^2 + b^2)^2 (ae - bd)}.$$

Ebenso ergibt sich

$$9. \quad y = \frac{-(a^2 + b^2)^2 af + a(ad + be)[d(a^2 + b^2) - b(ae - bd)]}{2(a^2 + b^2)^2 (ae - bd)}.$$

Wenn daher $b^2 - ac = 0$, und $ae - bd$ und $cd - be$ von Null verschieden sind, so ist $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Y -Achse den Winkel ω bildet, für welchen $\cos \omega = a : \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin \omega = b : \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \omega = b : a$, und deren Scheitel die Coordinaten hat, die unter 8. und 9. mitgetheilt worden sind. Die Parabel erstreckt sich in der Richtung der positiven oder negativen Seite der Geraden OY' , für welche $YOY' = \omega$, je nachdem $a(ae - bd)$ negativ oder positiv ist.

Ist also $b^2 - ac = 0$, so bedeutet die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

entweder eine Parabel, oder zwei parallele reale oder conjugirt complexe Gerade, oder eine (zwei zusammenfallende) Gerade.

10. Ist $b^2 - ac$ von Null verschieden, so geben die Formeln No. 4, 2 endliche Werthe für μ und ν , und wir können die beabsichtigte Verschiebung des Coordinatensystems ausführen. Die transformirte Gleichung ist

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f' = 0,$$

wobei

$$f' = a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 + 2d\mu + 2e\nu + f.$$

1 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, so findet sich

$$r^2 (a \cos^2 \varphi + 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) + f' = 0,$$

gleichung für r , die für jeden Werth von φ rein quadratisch ist und für φ zwei entgegengesetzt gleiche Werthe für r liefert. Jede durch den Ursprung des neuen Systems gehende Curvenschneide wird also im Ursprunge des neuen Systems ist daher der Mittelpunkt der Curve.

Ausdruck f' vereinfacht sich erheblich; wenn man ihn schreibt

$$a\mu + b\nu + d) \mu + (b\mu + c\nu + e) \nu + d\mu + e\nu + f = 0,$$

dass (No. 4, 1) $a\mu + b\nu + d = 0$, $b\mu + c\nu + e = 0$, so
nächst $f' = d\mu + e\nu + f$; hieraus folgt schliesslich

$$f' = \frac{ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f}{b^2 - ac}.$$

Setzt man $ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f$ wollen wir mit γ bezeichnen,
 $b^2 - ac$ mit δ , so dass nun $f' = \gamma : \delta$.

$\gamma = 0$, so ist auch $f' = 0$ und die transformirte Gleichung wird homogen:

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = 0.$$

Daher folgt $\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + 2\frac{b}{a} \cdot \frac{x'}{y'} + \frac{c}{a} = 0$,

$$\frac{x'}{y'} = -\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - ac}.$$

Die Gleichung zerfällt daher in zwei lineare Faktoren; nach
Multiplikation mit a ergibt sich aus 1.:

$$[ax' + (b - \sqrt{b^2 - ac})y'] [ax' + (b + \sqrt{b^2 - ac})y'] = 0.$$

Die Gleichung zerfällt daher in die beiden linearen Gleichungen

$$ax' + (b - \sqrt{b^2 - ac})y' = 0,$$

$$ax' + (b + \sqrt{b^2 - ac})y' = 0.$$

$b^2 - ac$ von Null verschieden und $\gamma = 0$, so ist

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

die Gleichung des Vereins zweier sich schneidenden Geraden; der
Punkt hat die Coordinaten $\mu = (cd - be) : \delta$, $\nu = (ae - bd) : \delta$
Die Gleichungen der Geraden sind (wie man aus 3. und 4. findet)

$$-(b - \sqrt{b^2 - ac})y + d + (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0,$$

$$-(b + \sqrt{b^2 - ac})y + d - (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0.$$

Wenn $ac > 0$, so sind diese Geraden real, ist $b^2 - ac < 0$, so
sind sie imaginär.

Wenn $b^2 - ac$ von Null verschieden, so suchen wir die Gleichung

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f' = 0$$

des Coordinatensystems um den Nullpunkt weiter zu vereinfachen.
Wenn die Coordinaten im neuen System durch ξ, η bezeichnet, so ist

$$x' = \cos \omega \cdot \xi - \sin \omega \cdot \eta,$$

$$y' = \sin \omega \cdot \xi + \cos \omega \cdot \eta,$$

$$= \cos^2 \omega \xi^2 - 2 \cos \omega \sin \omega \cdot \xi \eta + \sin^2 \omega \cdot \eta^2$$

$$+ 2 \cos \omega \sin \omega \xi^2 + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \cdot \xi \eta - \cos \omega \sin \omega \cdot \eta^2$$

$$= \sin^2 \omega \xi^2 + 2 \cos \omega \sin \omega \cdot \xi \eta + \cos^2 \omega \cdot \eta^2.$$

Man erhält eine Gleichung von der Form $g\xi^2 + 2h\xi\eta + k\eta^2 + f' = 0$, wenn

$$g = a \cos^2 \omega + 2b \cos \omega \sin \omega + c \sin^2 \omega,$$

$$h = -a \cos \omega \sin \omega + b(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) + c \cos \omega \sin \omega,$$

$$k = a \sin^2 \omega - 2b \cos \omega \sin \omega + c \cos^2 \omega.$$

Wir wollen nun den Winkel ω so wählen, dass der Coefficient h verschwindet, also gemäss der Gleichung $b(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) - (a - c) \cos \omega \sin \omega = 0$.

Hieraus folgt, wenn wir $\cos^2 \omega - \sin^2 \omega$ durch $\cos 2\omega$, und $\cos \omega \sin \omega$ durch $\frac{1}{2} \sin 2\omega$ ersetzen: $b \cos 2\omega - \frac{1}{2}(a - c) \sin 2\omega = 0$, also:

$$4. \quad \tan 2\omega = \frac{2b}{a - c}.$$

Dieser Gleichung genügen unzählige Winkel 2ω ; einer derselben liegt innerhalb -90° und $+90^\circ$, die anderen sind von diesem um ganze Vielfache von 180° verschieden. Da es nur darauf ankommt, einen Winkel zu haben, der der Gleichung 4. genügt, so wollen wir den auswählen, der zwischen -90° und $+90^\circ$ liegt, so dass $\cos 2\omega$ positiv ist.

Für die Coefficienten g und k kann man zunächst schreiben

$$g = a \cos^2 \omega + b \sin 2\omega + c \sin^2 \omega, \\ k = a \sin^2 \omega - b \sin 2\omega + c \cos^2 \omega.$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$5. \quad g + k = a + c, \\ 6. \quad g - k = (a - c) \cos 2\omega + 2b \sin 2\omega.$$

Aus 6. folgt:

$$g - k = \frac{(a - c) \cos 2\omega \cdot \sin 2\omega + 2b \sin^2 2\omega}{\sin 2\omega}.$$

Nun ist nach 4. $(a - c) \sin 2\omega = 2b \cos 2\omega$, also wird

$$g - k = \frac{2b \cos^2 2\omega + 2b \sin^2 2\omega}{\sin 2\omega} = \frac{2b}{\sin 2\omega}.$$

Ferner ist $\sin 2\omega = \frac{\tan 2\omega}{\sqrt{1 + \tan^2 2\omega}}$, und nach 4.

$$\sqrt{1 + \tan^2 2\omega} = \frac{1}{a - c} \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2} \\ = \frac{1}{a - c} \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta}.$$

Daher hat man

$$7. \quad g - k = \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta}.$$

Aus dieser Gleichung und aus 5. erhält man nun die Coefficienten

$$8. \quad g = \frac{1}{2}(a + c + \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta})$$

$$9. \quad k = \frac{1}{2}(a + c - \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta}).$$

Die Gleichung der Curve können wir nun schreiben

$$-\frac{g}{f'} \xi^2 - \frac{k}{f'} \eta^2 - 1 = 0, \text{ oder, da } f' = \frac{\gamma}{\delta}:$$

$$10. \quad \frac{-g\delta}{\gamma} \xi^2 + \frac{-k\delta}{\gamma} \eta^2 - 1 = 0.$$

14. Wir haben nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Coefficienten von ξ^2 und η^2 positiv oder negativ sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass a positiv ist.

A. Ist $\delta = b^2 - ac$ negativ, so muss c positiv sein; die Grösse $\sqrt{(a + c)^2 + 4\delta}$, die nach der über ω gemachten Voraussetzung positiv zu rechnen ist, ist dann kleiner als $a + c$, mithin sind g und k positiv.

a) Ist nun γ positiv, so sind die Quotienten $(-g\delta) : \gamma$ und $(-k\delta) : \gamma$ beide positiv, und wir können setzen

$$1. \quad \frac{-g\delta}{\gamma} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{-k\delta}{\gamma} = \frac{1}{\beta^2}.$$

Die Curvengleichung wird dann:

$$2. \quad \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0,$$

die Curve ist also eine Ellipse mit den Halbachsen α :

b) Ist hingegen γ negativ, so sind die Quotienten

beide negativ; die Gleichung $\frac{-g\delta}{\gamma}\xi^2 + \frac{-k\delta}{\gamma}\eta^2 - 1 = 0$:

Werthe von ξ und η nicht erfüllbar. Man kann formal

Uebereinstimmung bringen, nur dass α^2 und β^2 negative, α und β also imaginäre Werthe haben müssen, und bezeichnet sie demgemäss als die Gleichung einer imaginären Ellipse, von der man dann sagen kann, dass sie zwar keinen realen Peripheriepunkt habe, dass aber doch ihr Mittelpunkt real sei; auf jedem durch diesen realen Mittelpunkt gezogenen Strahl (Diameter) liegen zwei conjugirt complexe Punkte der imaginären Ellipse.

B. Ist $\delta \equiv b^2 - ac$ positiv, so ist $\sqrt{(a+c)^2 + 4\delta}$ grösser als der absolute Werth von $a+c$; also ist g positiv und h negativ.

Ist nun γ negativ, so sind die Quotienten $(-g\delta):\gamma > 0$, $(-k\delta):\gamma < 0$.

Ist hingegen γ positiv, so hat man $(-g\delta):\gamma < 0$, $(-k\delta):\gamma > 0$.

Im ersten Falle kann man setzen $(-g\delta):\gamma = 1:\alpha^2$, $(-k\delta):\gamma = -1:\beta^2$; im andern Falle: $(-g\delta):\gamma = -1:\alpha^2$, $(-k\delta):\gamma = 1:\beta^2$.

Die Curvengleichung wird also

$$\text{im ersten Falle:} \quad \frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0;$$

$$\text{im andern Falle:} \quad -\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

Die Curve ist in beiden Fällen eine Hyperbel; im ersten Falle liegt ihre Hauptachse auf der Abscissenachse, im andern auf der Ordinatenachse.

15. Wir fassen die Ergebnisse dieser Untersuchungen übersichtlich zusammen.

Die Gleichung $F \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ stellt eine Gerade, zwei parallele Gerade, eine Parabel, zwei sich schneidende Gerade, eine Ellipse oder eine Hyperbel dar.

A. a) Ist $b = 0$, $c = 0$, die anderen Coefficienten von Null verschieden, so ist $F=0$ die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Coordinaten

$$-\frac{d}{a} \text{ und } \frac{d^2 - af}{2ac}$$

hat, deren Achse der Ordinatenachse parallel und deren Parameter $\pm e:a$ ist; die Curve erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Seite der Ordinatenachse, je nachdem e und a ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

b) Ist $a = 0$, $b = 0$, die anderen Coefficienten von Null verschieden, so ist $F=0$ die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Coordinaten

$$\frac{d^2 - cf}{2cd} \text{ und } -\frac{e}{c}$$

hat, deren Achse der Abscissenachse parallel und deren Parameter $\pm d:c$ ist; die Curve erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Seite der Abscissenachse, je nachdem d und c ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

B. Sind a , b , c von Null verschieden und ist zugleich $\delta \equiv b^2 - ac = 0$, $cd - be = 0$, also auch $ae - bd = 0$, so ist $aF = 0$ das Produkt der Gleichungen der beiden parallelen Geraden;

$$ax + by + d - \sqrt{d^2 - af} = 0,$$

$$ax + by + d + \sqrt{d^2 - af} = 0.$$

Ist $d^2 - af < 0$, so sind sie conjugirt complex; ist $d^2 - af = 0$, so fallen sie in eine Gerade zusammen, deren Gleichung ist $ax + by + d = 0$; ist $d^2 - af > 0$, so sind die beiden Parallelen real und von einander verschieden.

C. Sind a, b, c von Null verschieden, und $\delta \equiv b^2 - ac = 0$, $cd - be \geq 0$, $ae - bd \geq 0$, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Parabel; die Achse derselben ist der Geraden OY' parallel, für welche

$$\cos YOY' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin YOY' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \tan YOY' = \frac{b}{a},$$

und die Curve erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Hälfte der Geraden OY' , je nachdem $a(ae - bd)$ negativ oder positiv ist. Die Coordinaten des Parabelscheitels sind

$$x = \frac{(a^2 + b^2)^2 bf - a(ad + be)(e(a^2 + b^2) + a(ae - bd))}{2(a^2 + b^2)^2 (ae - bd)},$$

$$y = \frac{-(a^2 + b^2)^2 af + a(ad + be)(d(a^2 + b^2) - b(ae - bd))}{2(a^2 + b^2)^2 (ae - bd)}.$$

Der Parameter stimmt dem absoluten Werthe nach mit $\frac{a(ae - bd)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ überein.

D. Ist $\delta \equiv b^2 - ac$ von Null verschieden und

$$\gamma \equiv ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f = 0,$$

so zerfällt aF in zwei lineare Faktoren; die Curve $F = 0$ zerfällt in die beiden

$$\text{Geraden: } ax + (b - \sqrt{b^2 - ac})y + d + (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0,$$

$$ax + (b + \sqrt{b^2 - ac})y + d - (ae - bd) : \sqrt{b^2 - ac} = 0.$$

Diese Geraden sind real oder conjugirt complex, je nachdem $b^2 - ac$ positiv oder negativ ist; ihr Schnittpunkt hat die Coordinaten $x = (cd - be) : \delta$, $y = (ae - bd) : \delta$, und ist in jedem Falle real.

E. Ist $a > 0$, $b^2 - ac < 0$, und $\gamma \geq 0$, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Ellipse. Das Centrum derselben hat die Coordinaten

$$x = (cd - be) : \delta, \quad y = (ae - bd) : \delta;$$

eine Halbachse hat die Länge

$$\alpha = \sqrt{-\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta(a + c + \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta})}}$$

und bildet mit der Abscissenachse einen zwischen -45° und $+45^\circ$ liegenden Winkel ω , für welchen $\tan 2\omega = \frac{2b}{a - c}$; die andere Halbachse hat die Länge

$$\beta = \sqrt{-\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta(a + c - \sqrt{(a + c)^2 + 4\delta})}}.$$

Die Ellipse ist real oder imaginär, je nachdem der Zähler im Radicanden negativ oder positiv ist.

F. Ist $a > 0$, $b^2 - ac > 0$ und $\gamma \geq 0$, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Hyperbel. Je nachdem $\gamma \equiv ae^2 + cd^2 - 2bde + (b^2 - ac)f \geq 0$, bildet ihre Hauptachse entweder mit der Abscissenachse den zwischen -45° und $+45^\circ$ liegenden Winkel, für welchen $\tan 2\omega = \frac{2b}{a - c}$, oder einen um 90° grösseren Winkel.

Im ersten Falle ist

$$\text{die halbe Hauptachse: } \alpha = \sqrt{-\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta(a + c + \sqrt{(a+c)^2 + 4\delta})}},$$

$$\text{die halbe Nebenachse: } \beta = \sqrt{\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta(a + c - \sqrt{(a+c)^2 + 4\delta})}}.$$

Im andern Falle ist

$$\text{die halbe Hauptachse: } \beta = \sqrt{-\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bdc + \delta f)}{\delta(a + c - \sqrt{(a+c)^2 - 4\delta})}},$$

$$\text{die halbe Nebenachse: } \alpha = \sqrt{\frac{2(ae^2 + cd^2 - 2bde + \delta f)}{\delta(a + c + \sqrt{(a+c)^2 - 4\delta})}}.$$

16. Wir wenden uns nun zur Transformation der Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten

$$\Phi \equiv \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \kappa = 0.$$

Wenn in der Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten das von veränderlichen Faktoren freie letzte Glied der linken Seite verschwindet, so wird der Gleichung durch die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$ genügt; das Verschwinden dieses Gliedes bedeutet also, dass der Nullpunkt auf der Curve liegt, sagt aber für die Gestalt der Curve Nichts aus. Ganz andere Bedeutung hat es, wenn das von veränderlichen Faktoren freie letzte Glied der linken Seite in einer Curvengleichung für Liniencoordinaten gleich Null ist. Dann wird der Curvengleichung durch $u = 0$, $v = 0$ genügt, und diese Coordinaten gehören einer unendlich fernen Geraden der Ebene an, da u und v die Werthe $1:OS_1$ und $1:OS_2$ haben, ihr Verschwinden also unendlich grosse Werthe von OS_1 und OS_2 bedingt.

Bei unserer Coordinatenbestimmung ist nur für dies eine Coordinatenpaar $u = v = 0$ die zugehörige Gerade unendlich fern; übertragen wir die Aussage, dass für endliche Coordinatenwerthe zu jedem Paar Werthe von u und v nur eine Gerade gehört, auch auf den Grenzfall $u = v = 0$, so haben wir nicht von mehreren, sondern nur von einer unendlich fernen Geraden zu sprechen.

Wir finden daher: Wenn das von veränderlichen Faktoren freie Glied auf der linken Seite der Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten gleich Null ist, so wird die Curve von der unendlich fernen Geraden berührt.

17. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\kappa \geq 0$, also die Curve $\Phi = 0$ keine unendlich ferne Tangente hat.

Wir transformiren zunächst die Gleichung durch Verschiebung des Coordinatensystems.

Sind μ , ν die Coordinaten des Nullpunktes des neuen Systems, so sind bekanntlich die Transformationsformeln:

$$u = \frac{u'}{1 + \mu u' + \nu v'}, \quad v = \frac{v'}{1 + \mu u' + \nu v'}.$$

Also hat man die transformirte Gleichung nach Multiplication mit $(1 + \mu u' + \nu v')^2$:

$$1. \alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2 + 2(\delta u' + \varepsilon v')(1 + \mu u' + \nu v') + \kappa(1 + \mu u' + \nu v')^2 = 0$$

oder geordnet:

$$2. (\alpha + 2\delta\mu + \kappa\mu^2) u'^2 + 2(\beta + \varepsilon\mu + \delta\nu + \kappa\mu\nu) u'v' + (\gamma + 2\varepsilon\nu + \kappa\nu^2) v'^2 + 2(\delta + \kappa\mu) u' + 2(\varepsilon + \kappa\nu) v' + \kappa = 0.$$

Wir wollen nun das neue System so wählen, dass die Coefficienten von u' und v' in der transformirten Gleichung verschwinden, dass also

$$3. \quad \delta + \kappa\mu = 0, \quad \varepsilon + \kappa\nu = 0.$$

Dies tritt ein, wenn

$$4. \quad \mu = -\frac{\delta}{x}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon}{x}.$$

Führt man diese Werthe in die Coefficienten der Gleichung 2. ein, so erhält man

$$5. \quad \alpha + 2\delta\mu + x\mu^2 = \frac{\alpha x - \delta^2}{x},$$

$$6. \quad \beta + \varepsilon\mu + \delta\nu + x\mu\nu = \frac{\beta x - \delta\varepsilon}{x},$$

$$7. \quad \gamma + 2\varepsilon\nu + x\nu^2 = \frac{\gamma x - \varepsilon^2}{x}.$$

Die transformirte Gleichung wird daher nach Multiplication mit x zu:

$$8. \quad (\alpha x - \delta^2)u'^2 + 2(\beta x - \delta\varepsilon)u'v' + (\gamma x - \varepsilon^2)v'^2 + x^2 = 0.$$

18. Legt man durch den Nullpunkt eine Normale N zu einer Geraden T , und bezeichnet den Winkel XON mit φ , und die vom Nullpunkte bis zur Geraden T reichende Strecke mit r , so ist, wenn S_1 und S_2 die Spuren von T auf den Achsen sind, bekanntlich $OS_1 = r : \cos\varphi$, $OS_2 = r : \sin\varphi$, mithin hat T die Coordinaten $u = \cos\varphi : r$, $v = \sin\varphi : r$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 8. der vorigen Nummer, so erhält man nach Multiplication mit r^2 :

$$(\alpha x - \delta^2)\cos^2\varphi + 2(\beta x - \delta\varepsilon)\cos\varphi\sin\varphi + (\gamma x - \varepsilon^2)\sin^2\varphi + x^2r^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist rein quadratisch für r , liefert also für r zwei entgegengesetzt gleiche Werthe. Der Punkt mit den Coordinaten $(-\delta) : x$ und $(-\varepsilon) : x$ hat also die Eigenschaft, dass er den Abstand je zweier parallelen Tangenten der Curve halbirt.

19. Wir suchen nun die Gleichung durch Drehung des Coordinatensystems weiter zu vereinfachen.

Ist der Winkel der Achse OX' und der neuen Abscissenachse ω , und werden die Liniencoordinaten im neuen System mit U, V bezeichnet, so hat man die Transformationsformeln (§ 9, 7).

$$1. \quad \begin{aligned} u' &= \cos\omega \cdot U - \sin\omega \cdot V \\ v' &= \sin\omega \cdot U + \cos\omega \cdot V. \end{aligned}$$

$$\text{Mithin} \quad u'^2 = \cos^2\omega U^2 - 2\cos\omega\sin\omega UV + \sin^2\omega V^2$$

$$2. \quad \begin{aligned} u'v' &= \cos\omega\sin\omega U^2 + (\cos^2\omega - \sin^2\omega)UV - \sin\omega\cos\omega V^2 \\ v'^2 &= \sin^2\omega U^2 + 2\sin\omega\cos\omega UV + \cos^2\omega V^2. \end{aligned}$$

Schreibt man für die letzte Gleichung in No. 17 abkürzungsweise

$$3. \quad \alpha'u'^2 + 2\beta'u'v' + \gamma'v'^2 + x^2 = 0$$

und setzt nun die Werthe 2. ein, so erhält man die transformirte Gleichung

$$\rho U^2 + 2\sigma UV + \tau V^2 + x^2 = 0, \quad \text{wenn}$$

$$4. \quad \rho = \alpha'\cos^2\omega + 2\beta'\cos\omega\sin\omega + \gamma'\sin^2\omega$$

$$5. \quad \sigma = -\alpha'\cos\omega\sin\omega + \beta'(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + \gamma'\cos\omega\sin\omega$$

$$6. \quad \tau = \alpha'\sin^2\omega - 2\beta'\cos\omega\sin\omega + \gamma'\cos^2\omega.$$

Wir wählen nun ω so, dass σ verschwindet, also dass

$$-\alpha'\cos\omega\sin\omega + \beta'(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + \gamma'\cos\omega\sin\omega = 0, \quad \text{oder}$$

$$7. \quad \frac{1}{2}(\alpha' - \gamma')\sin 2\omega = \beta'\cos 2\omega, \quad \text{also}$$

$$8. \quad \tan 2\omega = \frac{2\beta'}{\alpha' - \gamma'},$$

oder, wenn man für α', γ', β' die Werthe einsetzt:

$$9. \quad \tan 2\omega = \frac{2(\beta x - \delta\varepsilon)}{(\alpha - \gamma)x - \delta^2 + \varepsilon^2}.$$

wählen für 2ω den zwischen -90° und $+90^\circ$ liegenden Winkel, der die Bedingung genügt, so dass also ω zwischen -45° und $+45^\circ$ liegt und mithin auch $\sqrt{1 + \tan^2 2\omega}$, positiv ist. Es ist dann

$$\sin 2\omega = \frac{2\beta'}{\sqrt{(\alpha' - \gamma')^2 + 4\beta'^2}}.$$

5. und 6. folgen durch Addition und Subtraction die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho + \tau &= \alpha' + \gamma', \\ \rho - \tau &= (\alpha' - \gamma') \cos 2\omega + 2\beta' \sin 2\omega \\ &= \frac{(\alpha' - \gamma') \cos 2\omega \sin 2\omega + 2\beta' \sin^2 2\omega}{\sin 2\omega}, \end{aligned}$$

7. berücksichtigt auf 7.

$$\rho - \tau = \frac{2\beta' \cos^2 2\omega + 2\beta' \sin^2 2\omega}{\sin 2\omega} = \frac{2\beta'}{\sin 2\omega}.$$

8. hat man

$$\rho - \tau = \sqrt{(\alpha' - \gamma')^2 + 4\beta'^2}.$$

9. 1. und 12. folgen die Werthe:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(\alpha' + \gamma' + \sqrt{(\alpha' - \gamma')^2 + 4\beta'^2}), \\ \tau &= \frac{1}{2}(\alpha' + \gamma' - \sqrt{(\alpha' - \gamma')^2 + 4\beta'^2}); \end{aligned}$$

10. man $\alpha' \beta' \gamma'$ durch die Coefficienten α, β, \dots ersetzt:

$$\begin{aligned} &[(\alpha + \gamma)x - \delta^2 - \epsilon^2 + \sqrt{[(\alpha - \gamma)x - (\delta^2 - \epsilon^2)]^2 + 4(\beta x - \delta\epsilon)^2}], \\ &[(\alpha + \gamma)x - \delta^2 - \epsilon^2 - \sqrt{[(\alpha - \gamma)x - (\delta^2 - \epsilon^2)]^2 + 4(\beta x - \delta\epsilon)^2}]. \end{aligned}$$

11. transformirte Gleichung ist $\rho U^2 + \tau V^2 + x^2 = 0$, oder nach Division

$$\frac{-\rho}{x^2} U^2 + \frac{-\tau}{x^2} V^2 - 1 = 0.$$

Sind ρ und τ beide negativ, so kann man setzen

$$\begin{aligned} \frac{-\rho}{x^2} &= a^2, \quad \frac{-\tau}{x^2} = b^2, \\ a &= \frac{1}{x} \sqrt{-\rho}, \quad b = \frac{1}{x} \sqrt{-\tau} \end{aligned}$$

12. Gleichung 16. geht über in

$$a^2 U^2 + b^2 V^2 - 1 = 0.$$

13. Sind ρ und τ beide positiv, so kann der Gleichung 16. durch reale U und V nicht genügt werden.

14. Wenn ρ und τ nicht gleiche Zeichen haben, so kann, da $\rho - \tau$ nur ρ positiv und τ negativ sein. Setzen wir in diesem Falle

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{x^2} &= a^2, \quad \frac{-\tau}{x^2} = b^2, \\ a &= \frac{1}{x} \sqrt{\rho}, \quad b = \frac{1}{x} \sqrt{-\tau}, \end{aligned}$$

15. Gleichung 16. über in

$$-a^2 U^2 + b^2 V^2 - 1 = 0.$$

16. Radicand in den Formeln 13. kann umgeformt werden:

$$(\alpha' - \gamma')^2 + 4\beta'^2 = (\alpha' + \gamma')^2 + 4(\beta'^2 - \alpha'\gamma').$$

17. die ursprünglichen Coefficienten ausgedrückt, ist, was schon in 14. benutzt wurde, $\alpha' + \gamma' = (\alpha + \gamma)x - (\delta^2 + \epsilon^2)$

$$\beta'^2 - \alpha'\gamma' = (\beta x - \delta\epsilon)^2 - (\alpha x - \delta^2)(\gamma x - \epsilon^2).$$

18. Da $\beta'^2 - \alpha'\gamma'$ von Null verschieden, so verschwinden weder ρ noch τ , $-\alpha'\gamma' = 0$, und $\alpha' + \gamma' > 0$, so ist $\rho = \alpha' + \gamma'$, $\tau = 0$.

Ist $\beta'^2 - \alpha'\gamma' = 0$, und $\alpha' + \gamma' < 0$, so ist $\rho = 0$, $\tau = \alpha' + \gamma'$.

Die Curvengleichung wird in dem einen Falle: $(\alpha' + \gamma') U^2 + x^2 = 0$ und kann, da beide Glieder der linken Seite positiv sind, durch reale Gerade nicht befriedigt werden; man erhält aus ihr die imaginären Werthe

$$1. \quad U = \pm \frac{x}{\sqrt{-(\alpha' + \gamma')}} ,$$

also zwei imaginäre Punkte der neuen Abscissenachse, vom Nullpunkte des neuen Systems um $\pm \sqrt{-(\alpha' + \gamma')} : x$ entfernt.

Im andern Falle hat man $(\alpha' + \gamma') V^2 + x^2 = 0$ und kann setzen $(\alpha' + \gamma') = -\delta^2$, so dass die Gleichung entsteht: $\delta^2 V^2 - x^2 = 0$, aus welcher folgt:

$$2. \quad V = \pm \frac{x}{\delta} .$$

Die Curve zerfällt daher in zwei reale, auf der neuen Ordinatenachse gelegene Punkte.

21. Ist $x = 0$, die Curvengleichung somit

$$1. \quad \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v = 0 ,$$

so suchen wir zunächst durch Drehung des Coordinatensystems die Gleichung zu vereinfachen. Die Transformationsformeln

$$u = \cos \omega \cdot u' - \sin \omega \cdot v' , \quad v = \sin \omega \cdot u' + \cos \omega \cdot v' \text{ ergeben:}$$

$$u^2 = \cos^2 \omega \cdot u'^2 - 2 \cos \omega \sin \omega \cdot u'v' + \sin^2 \omega \cdot v'^2 ,$$

$$uv = \cos \omega \cdot \sin \omega \cdot u'^2 + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) u'v' - \cos \omega \sin \omega \cdot v'^2 ,$$

$$v^2 = \sin^2 \omega \cdot u'^2 + 2 \sin \omega \cos \omega \cdot u'v' + \cos^2 \omega \cdot v'^2 .$$

Daher hat man die transformirte Gleichung:

$$\begin{aligned} & (\alpha \cos^2 \omega + 2\beta \cos \omega \sin \omega + \gamma \sin^2 \omega) u'^2 - 2[(\alpha - \gamma) \sin \omega \cos \omega - \beta \cos 2\omega] u'v' \\ 2. & + (\alpha \sin^2 \omega - 2\beta \cos \omega \sin \omega + \gamma \cos^2 \omega) v'^2 + 2(\delta \cos \omega + \varepsilon \sin \omega) u' \\ & - 2(\delta \sin \omega - \varepsilon \cos \omega) v' = 0 . \end{aligned}$$

Wir wählen nun ω so, dass der Coefficient von v' verschwindet, also gemäss der Gleichung $\delta \sin \omega - \varepsilon \cos \omega = 0$, welche ergibt

$$3. \quad \tan \omega = \frac{\varepsilon}{\delta} .$$

Wir nehmen den dieser Gleichung entsprechenden Winkel, für welchen

$$4. \quad \cos \omega = \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}} , \quad \sin \omega = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}} ,$$

die Wurzel positiv gerechnet.

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 2., so wird dieselbe zu:

$$5. \quad \alpha' u'^2 - 2\beta' u'v' + \gamma' v'^2 + \delta' u' = 0 ,$$

wo die Coefficienten die Werthe haben:

$$\alpha' = \alpha \cos^2 \omega + 2\beta \cos \omega \sin \omega + \gamma \sin^2 \omega = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\alpha \delta^2 + 2\beta \delta \varepsilon + \gamma \varepsilon^2)$$

$$6. \quad \beta' = (\alpha - \gamma) \cos \omega \sin \omega - \beta (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} [(\alpha - \gamma) \delta \varepsilon + \beta (\varepsilon^2 - \delta^2)]$$

$$\gamma' = \alpha \sin^2 \omega - 2\beta \cos \omega \sin \omega + \gamma \cos^2 \omega = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} (\alpha \varepsilon^2 - 2\beta \delta \varepsilon + \gamma \delta^2)$$

$$\delta' = \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2} .$$

22. Hierauf verschieben wir die Coordinatenachsen, so dass der Nullpunkt des neuen Systems die Coordinaten μ, ν hat. Bezeichnen U, V die Coordinaten im neuen Systeme, so haben wir die Transformationsformeln

$$u' = \frac{U}{1 + \mu U + \nu V} , \quad v' = \frac{V}{1 + \mu U + \nu V} ,$$

also die transformirte Gleichung, nach Multiplication mit $(1 + \mu U + \nu V)^2$
 $\alpha' U^2 - 2\beta' UV + \gamma' V^2 + 2\delta' (1 + \mu U + \nu V) U = 0$,
 oder geordnet

$$1. \quad (\alpha' + 2\delta'\mu) U^2 - 2(\beta' - \delta'\nu) UV + \gamma' V^2 + 2\delta' U = 0.$$

Wir wählen nun den Nullpunkt des neuen Systems so, dass die Coefficienten von U^2 und UV verschwinden, haben also für μ und ν die Gleichungen:

$$\alpha' + 2\delta'\mu = 0, \quad \beta' - \delta'\nu = 0,$$

aus denen die Werthe folgen:

$$2. \quad \mu = -\frac{\alpha'}{2\delta'}, \quad \nu = \frac{\beta'}{\delta'},$$

Diese Transformation ist nur dann nicht möglich, wenn $\delta' = 0$, und dies kann nach den Formeln 6. in No. 21 nur eintreten, wenn ε und δ zugleich Null sind. Diesen besonderen Fall werden wir am Schlusse betrachten.

Setzt man aus No. 21, 6. die Werthe ein, so hat man

$$3. \quad \mu = -\frac{\alpha\delta^2 + 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2^3}}, \quad \nu = \frac{(\alpha - \gamma)\delta\varepsilon + \beta(\varepsilon^2 - \delta^2)}{\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2^3}}.$$

Die Gleichung 1. geht nun über in

$$4. \quad (\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2) \cdot V^2 + 2\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2^3} \cdot U = 0.$$

Dies ist (§ 4, No. 3) die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter

$$p = \pm \frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2^3}}.$$

23. Ist $x = \varepsilon = \delta = 0$, so reducirt sich die Curvengleichung auf:

$$1. \quad \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 = 0.$$

Die linke Seite zerfällt nach Multiplication mit α in die beiden linearen Faktoren $\alpha u + (\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})v$ und $\alpha u + (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})v$, die Curvengleichung zerfällt also in die linearen Gleichungen

$$2. \quad \alpha u + (\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})v = 0,$$

$$3. \quad \alpha u + (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})v = 0.$$

Dies sind die Gleichungen zweier unendlich fernen Punkte (§ 4, No. 2); ist $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, so sind dieselben real und verschieden; ist $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, so sind sie real und fallen zusammen; ist $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, so sind sie conjugirt complex.

24. Wir fassen die Ergebnisse der Untersuchung der Gleichung $\Phi = 0$ nochmals zusammen:

A. Ist in der Gleichung $\Phi \equiv \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + x = 0$ die Zahl x von Null verschieden, und haben die Grössen

$$\rho = \frac{1}{2}[(\alpha + \gamma)x - \delta^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{((\alpha - \gamma)x - \delta^2 + \varepsilon^2)^2 + 4(\beta x - \delta\varepsilon)^2}]$$

$$\tau = \frac{1}{2}[(\alpha + \gamma)x - \delta^2 - \varepsilon^2 - \sqrt{((\alpha - \gamma)x - \delta^2 + \varepsilon^2)^2 + 4(\beta x - \delta\varepsilon)^2}]$$

gleiches Vorzeichen, so ist die Curve $\Phi = 0$ eine Ellipse; der Mittelpunkt hat die Coordinaten $x = -\delta : x$, $y = -\varepsilon : x$, oder die Gleichung $\delta u + \varepsilon v + x = 0$; die Halbachsen haben die Längen $a = \sqrt{-\rho} : x$, $b = \sqrt{-\tau} : x$.

Der Winkel ω der Abscissenachse mit der ersteren Halbachse ist der zwischen $+45^\circ$ und -45° enthaltene Winkel, der der Gleichung genügt:

$$\tan 2\omega = \frac{2(\beta x - \delta\varepsilon)}{(\alpha - \gamma)x - \delta^2 + \varepsilon^2}.$$

Sind ρ und τ negativ, so ist die Ellipse real; sind ρ und τ positiv, so ist die Ellipse imaginär; der Mittelpunkt ist in jedem Falle real.

B. Ist x von Null verschieden und ρ positiv, τ negativ, so ist die Curve $\Phi = 0$ eine Hyperbel. Der Mittelpunkt hat die Coordinaten $x = -\delta : x$,

$y = -\varepsilon : x$, die halbe Hauptachse und Nebenachse sind $\sqrt{-\tau} : x$ und $\sqrt{\rho} : x$; der Winkel der Abscissenachse mit der Nebenachse ist der zwischen -45° und $+45^\circ$ enthaltene Winkel, der der Gleichung genügt:

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2(\beta x - \delta \varepsilon)}{(\alpha - \gamma)x - \delta^2 + \varepsilon^2}.$$

C. a) Ist $\tau = 0$, so ist $\Phi = 0$ die Gleichung zweier conjugirt complexen Punkte; dieselben sind auf der realen Geraden enthalten, mit welcher die Abscissenachse den Winkel ω bildet.

b) Ist $\rho = 0$, so ist $\Phi = 0$ die Gleichung zweier realen Punkte, mit deren Geraden die Ordinatenachse den Winkel ω einschliesst. Die Gleichungen der beiden Punkte sind, wie man leicht erhält, wenn man in No. 20, 2 V mit Hülfe der Transformationsformeln durch u, v ersetzt

$$\begin{aligned} &(-\sqrt{-(\alpha + \gamma)x + \delta^2 + \varepsilon^2} \sin \omega + \delta)u - (\sqrt{-(\alpha + \gamma)x + \delta^2 + \varepsilon^2} \cos \omega + \varepsilon)v + x = 0, \\ &(-\sqrt{-(\alpha + \gamma)x + \delta^2 + \varepsilon^2} \sin \omega - \delta)u + (\sqrt{-(\alpha + \gamma)x + \delta^2 + \varepsilon^2} \cos \omega - \varepsilon)v - x = 0. \end{aligned}$$

D. Ist $x = 0$, und nicht zugleich $\varepsilon = \delta = 0$, so ist die Curve $\Phi = 0$ eine Parabel.

Die Coordinaten des Parabelscheitels ergeben sich aus No. 21, 3 mittelst der der Transformationsformeln zu

$$x = \frac{1}{2(\delta^2 + \varepsilon^2)^2} (\alpha \delta^3 + 2\alpha \delta \varepsilon^2 - \gamma \delta \varepsilon^2 + 2\beta \varepsilon^3),$$

$$y = \frac{1}{2(\delta^2 + \varepsilon^2)^2} (\gamma \varepsilon^3 + 2\gamma \delta^2 \varepsilon - \alpha \delta^2 \varepsilon + 2\beta \delta^3).$$

Der Parameter stimmt dem absoluten Werthe nach überein mit

$$\frac{\alpha \varepsilon^2 - 2\beta \delta \varepsilon + \gamma \delta^2}{\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}^3};$$

die Parabelachse schliesst mit der Abscissenachse den Winkel ω ein und erstreckt sich entlang der positiven oder negativen Seite dieser Geraden, je nachdem $\alpha \varepsilon^2 - 2\beta \delta \varepsilon + \gamma \delta^2$ positiv oder negativ ist.

E. Ist $x = 0$ und zugleich $\varepsilon = \delta = 0$, so zerfällt die Curve in die zwei unendlich fernen Punkte

$$\alpha u + (\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha \gamma})v = 0,$$

$$\alpha u + (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha \gamma})v = 0.$$

Je nachdem $\beta^2 - \alpha \gamma$ positiv, Null, oder negativ ist, sind diese beiden Punkte (Richtungen) real und verschieden, real und vereint, oder conjugirt complex.

25. Wie zu erwarten war, haben wir die Gebilde ersten Grades — die Gerade und den Punkt — unter den Gebilden zweiten Grades wieder vorgefunden.

Eigentliche Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse giebt es, wie wir gesehen haben, nur die drei: Ellipse, Hyperbel und Parabel.

§ 11. Bestimmung einer Curve zweiten Grades durch fünf Punkte und durch fünf Tangenten.

1. Die Gleichung einer Linie zweiten Grades

$$F \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

enthält sechs Constante, a, b, c, d, e, f . Wird von einer Curve zweiten Grades verlangt, dass sie durch einen gegebenen Punkt $P_1(x_1, y_1)$ geht, so müssen die Coefficienten $a \dots f$ so beschaffen sein, dass die Gleichung erfüllt wird:

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f = 0.$$

Durch einen Punkt einer Curve zweiten Grades ist also eine homogene lineare Gleichung zwischen den sechs Constanten der Curvengleichung gegeben.

Durch fünf homogene lineare, von einander unabhängige Gleichungen sind die Verhältnisse der sechs Constanten $a : b : c : d : e : f$ eindeutig bestimmt; da nun die geometrische Bedeutung der Gleichung $F \equiv 0$ nicht von den Einzelwerthen der Coefficienten $a \dots f$, sondern nur von ihren Verhältnissen abhängt, so folgt: Eine Curve zweiter Ordnung ist durch fünf Punkte bestimmt.

2. Um die Gleichung einer Curve zweiten Grades herzustellen, die durch fünf gegebene Punkte geht, bemerken wir zunächst, dass diese Gleichung nichts anderes sein kann, als die Bedingung dafür, dass der Punkt P auf der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmten Curve zweiten Grades liegt. Sind $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, x_4 y_4, x_5 y_5$ die Coordinaten dieser fünf Punkte, a, b, c, d, e, f die Constanten der durch sie gehenden Curve zweiten Grades, so gelten die fünf Gleichungen:

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f = 0,$$

$$ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + f = 0,$$

$$ax_3^2 + 2bx_3y_3 + cy_3^2 + 2dx_3 + 2ey_3 + f = 0,$$

$$ax_4^2 + 2bx_4y_4 + cy_4^2 + 2dx_4 + 2ey_4 + f = 0,$$

$$ax_5^2 + 2bx_5y_5 + cy_5^2 + 2dx_5 + 2ey_5 + f = 0.$$

Soll nun auch der Punkt P auf derselben Curve liegen, so kommt die sechste Gleichung hinzu $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

Die Bedingung für das Zusammenbestehen dieser sechs, für a, b, c, d, e, f homogenen linearen Gleichungen ist das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, die in der That, wie man sieht, zweiten Grades für x und y ist.

3. Die Gleichung einer Curve zweiter Klasse

$$\Phi \equiv \alpha u^2 + 2\beta uv - \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \kappa = 0$$

enthält sechs Constante $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa$, durch deren Verhältnisse die Curve bestimmt ist.

Ist eine Tangente $T_1(u_1v_1)$ der Curve gegeben, so haben die Constanten der Gleichung zu genügen:

$$\alpha u_1^2 + 2\beta u_1v_1 + \gamma v_1^2 + 2\delta u_1 + 2\varepsilon v_1 + \kappa = 0.$$

Dies ist eine homogene lineare Gleichung. Durch fünf solcher Gleichungen sind die Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon$ bestimmt; wir schliessen daher: Eine Curve zweiter Klasse ist durch fünf Tangenten bestimmt.

Da wir im vorigen Paragraphen gefunden haben, dass die eigentlichen Curven zweiten Grades zugleich auch zweiter Klasse sind, und umgekehrt, so haben wir für diese Curven nicht mehr nöthig, den Unterschied des Grades und der Klasse zu erwähnen und bezeichnen sie als Curven zweiter Ordnung. Wenn die Bezeichnung »zweiten Grades« oder »zweiter Klasse« noch gebraucht wird, so soll sie nur die Bedeutung haben, dass bei dieser Gelegenheit von der Gleichung der Curve zweiter Ordnung in Punktcoordinaten, bez. in Liniencoordinaten ausgegangen wird.

Wir fassen die Ergebnisse von No. 1 und 3 daher in den Satz zusammen:

Eine Curve zweiter Ordnung ist durch fünf Punkte oder durch fünf Tangenten eindeutig bestimmt.

4. Sind T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 fünf Tangenten einer Curve zweiter Klasse, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa$ die Coefficienten ihrer Gleichung, so bestehen für dieselben die fünf Gleichungen:

$$\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 v_1 + \gamma v_1^2 + 2\delta u_1 + 2\gamma v_1 + \kappa = 0,$$

$$\alpha u_2^2 + 2\beta u_2 v_2 + \gamma v_2^2 + 2\delta u_2 + 2\gamma v_2 + \kappa = 0,$$

$$\alpha u_3^2 + 2\beta u_3 v_3 + \gamma v_3^2 + 2\delta u_3 + 2\gamma v_3 + \kappa = 0,$$

$$\alpha u_4^2 + 2\beta u_4 v_4 + \gamma v_4^2 + 2\delta u_4 + 2\gamma v_4 + \kappa = 0,$$

$$\alpha u_5^2 + 2\beta u_5 v_5 + \gamma v_5^2 + 2\delta u_5 + 2\gamma v_5 + \kappa = 0.$$

Soll auch die Gerade T die Curve berühren, so besteht noch die Gleichung

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \kappa = 0.$$

Der Verein dieser sechs für die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa$ homogenen linearen Gleichungen bedingt das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix} u^2 & uv & v^2 & u & v & 1 \\ u_1^2 & u_1 v_1 & v_1^2 & u_1 & v_1 & 1 \\ u_2^2 & u_2 v_2 & v_2^2 & u_2 & v_2 & 1 \\ u_3^2 & u_3 v_3 & v_3^2 & u_3 & v_3 & 1 \\ u_4^2 & u_4 v_4 & v_4^2 & u_4 & v_4 & 1 \\ u_5^2 & u_5 v_5 & v_5^2 & u_5 & v_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der durch $T_1 \dots T_5$ bestimmten Curve zweiter Klasse.

5. Die Gleichung einer Parabel in Linienkoordinaten ist

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur noch fünf Coefficienten, deren Verhältnisse durch vier homogene lineare Gleichungen bestimmt werden. Sind T_1, T_2, T_3, T_4 vier gegebene Tangenten einer Parabel und ist T eine beliebige andere Parabeltangente, so hat man für die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ die fünf Gleichungen:

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v = 0,$$

$$\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 v_1 + \gamma v_1^2 + 2\delta u_1 + 2\varepsilon v_1 = 0,$$

$$\alpha u_2^2 + 2\beta u_2 v_2 + \gamma v_2^2 + 2\delta u_2 + 2\varepsilon v_2 = 0,$$

$$\alpha u_3^2 + 2\beta u_3 v_3 + \gamma v_3^2 + 2\delta u_3 + 2\varepsilon v_3 = 0,$$

$$\alpha u_4^2 + 2\beta u_4 v_4 + \gamma v_4^2 + 2\delta u_4 + 2\varepsilon v_4 = 0.$$

Aus dem Verein dieser fünf Gleichungen folgt das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix} u^2 & uv & v^2 & u & v \\ u_1^2 & u_1 v_1 & v_1^2 & u_1 & v_1 \\ u_2^2 & u_2 v_2 & v_2^2 & u_2 & v_2 \\ u_3^2 & u_3 v_3 & v_3^2 & u_3 & v_3 \\ u_4^2 & u_4 v_4 & v_4^2 & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Parabel, welche die vier Geraden T_1, T_2, T_3, T_4 zu Tangenten hat.

Durch vier Tangenten ist also eine Parabel eindeutig bestimmt.

6. Soll durch vier Punkte eine Parabel gelegt werden, so bestehen für die sechs Coefficienten der Gleichung in Punktkoordinaten $F = 0$ zunächst die vier Gleichungen:

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f = 0,$$

$$ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + f = 0,$$

$$ax_3^2 + 2bx_3y_3 + cy_3^2 + 2dx_3 + 2ey_3 + f = 0,$$

$$ax_4^2 + 2bx_4y_4 + cy_4^2 + 2dx_4 + 2ey_4 + f = 0.$$

Ausserdem gilt noch die für die Parabel charakteristische Gleichung

$$2. \quad b^2 - ac = 0.$$

Setzt man $b : a = \lambda$, also $b = a\lambda$, so folgt aus 2. $c = a\lambda^2$; wenn man diese Werthe für b und c in die Gleichungen 1. einführt, so erhält man:

$$3. \quad \begin{aligned} a(x_1^2 + 2\lambda x_1 y_1 + \lambda^2 y_1^2) + 2dx_1 + 2ey_1 + f &= 0, \\ a(x_2^2 + 2\lambda x_2 y_2 + \lambda^2 y_2^2) + 2dx_2 + 2ey_2 + f &= 0, \\ a(x_3^2 + 2\lambda x_3 y_3 + \lambda^2 y_3^2) + 2dx_3 + 2ey_3 + f &= 0, \\ a(x_4^2 + 2\lambda x_4 y_4 + \lambda^2 y_4^2) + 2dx_4 + 2ey_4 + f &= 0. \end{aligned}$$

Sieht man dieselben als homogene lineare Gleichungen von a, d, e, f an, so folgt das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + 2\lambda x_1 y_1 + \lambda^2 y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + 2\lambda x_2 y_2 + \lambda^2 y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + 2\lambda x_3 y_3 + \lambda^2 y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + 2\lambda x_4 y_4 + \lambda^2 y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante lässt sich als Summe dreier Determinanten schreiben und führt damit auf die quadratische Gleichung für λ

$$4. \quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + 2\lambda \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 y_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diese Gleichung ist nun λ bestimmt. Setzt man den so berechneten Werth von λ in die Parabelgleichung

$$5. \quad a(x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2) + 2dx + 2ey + f = 0$$

ein, so enthält dieselbe noch die vier Constanten a, d, e, f . Man kann nun diese eliminiren, wenn man 5. mit drei Gleichungen der Gruppe 3., z. B. mit den ersten dreien dieser Gleichungen, zusammenstellt. Man hat dann vier homogene lineare Gleichungen für a, d, e, f und folgert aus ihnen das Verschwinden ihrer Determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + 2\lambda x_1 y_1 + \lambda^2 y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + 2\lambda x_2 y_2 + \lambda^2 y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + 2\lambda x_3 y_3 + \lambda^2 y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Parabelgleichung.

Da λ aus der quadratischen Gleichung 4. gefunden wird, so haben wir den Satz: Durch vier Punkte kann man zwei Parabeln legen; dieselben sind real und verschieden, oder real und zusammenfallend, oder conjugirt complex; bei besonderer Wahl der vier Punkte können auch beide oder eine zu zwei parallelen Geraden ausarten.

7. Die in No. 2 und No. 4 gegebenen Gleichungen einer Curve zweiter Ordnung in Punkt- und Linienkoordinaten sind keine geeigneten Ausgangspunkte für geometrische Folgerungen. Wir wollen daher noch eine andere Methode angeben, die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung zu bilden, die durch fünf gegebene Punkte geht, bez. fünf gegebene Gerade berührt; wir werden durch dieselbe die Gleichungen in einer solchen Form erhalten, dass wir mit Leichtigkeit werthvolle geometrische Sätze aus ihnen ableiten können.

8. Um die Gleichung des Kegelschnitts zu finden, der durch die fünf Punkte A, B, P_1, P_2, P_3 geht, betrachten wir zunächst die vier Punkte A, B, P_1, P_2 . Zu den unendlich vielen Kegelschnitten, die durch diese Punkte gehen, gehören die Linienpaare AP_1, BP_2 und AP_2, BP_1 . Sind $T_1 = 0, T_2 = 0, T_1' = 0,$

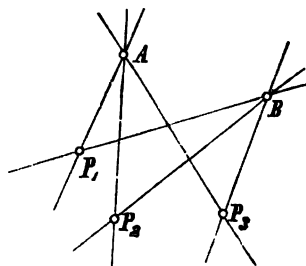
$T_2' = 0$ die Gleichungen der Geraden AP_1, AP_2, BP_1, BP_2 , so ist die Gleichung des Linienpaares AP_1, BP_2 : $T_1 \cdot T_2' = 0$, und
 " " " " " " " AP_2, BP_1 : $T_2 \cdot T_1' = 0$.

Multiplicirt man beide Gleichungen mit irgend zwei Zahlen x_1 und x_2 , und addirt, so erhält man eine neue Gleichung zweiten Grades

1. $F \equiv x_1 T_1 T_2' + x_2 T_2 T_1' = 0$.

Die zu dieser Gleichung gehörige Curve zweiter Ordnung geht nun offenbar durch die Punkte, für welche zugleich

$$\begin{aligned} T_1 &= 0 \text{ und } T_2 = 0, \text{ d. i. Punkt } A, \\ T_1 &= 0 \text{ „ } T_1' = 0, \text{ d. i. „ } P_1, \\ T_2' &= 0 \text{ „ } T_1' = 0, \text{ d. i. „ } B, \\ T_2' &= 0 \text{ „ } T_2 = 0, \text{ d. i. „ } P_2. \end{aligned}$$



(M. 401.)

Das Verhältniss $x_1 : x_2$ kann nun immer so bestimmt werden, dass der Gleichung $F = 0$ noch durch einen beliebigen fünften Punkt P_3 der Ebene genügt werden kann.

Liegt P_3 auf den durch A und B gehenden Geraden

2. $T_3 \equiv a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0, \quad T_3' \equiv b_1 T_1' + b_2 T_2' = 0,$

so ist für die Coordinaten von P_3

3. $a_1 T_1 = -a_2 T_2, \quad b_1 T_1' = -b_2 T_2'.$

Multiplicirt man 1. mit $a_1 b_1$, so entsteht

$$a_1 b_1 x_1 T_1 T_2' + a_1 b_1 x_2 T_2 T_1' = 0.$$

Setzt man hier die Werthe 3. ein und dividirt dann durch $T_2 T_2'$, so erhält man:

4. $a_2 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 = 0.$

Dieser Gleichung genügt man durch

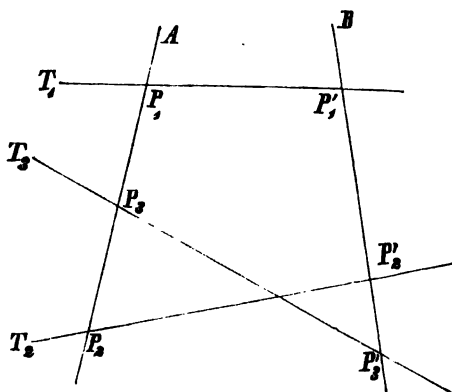
5. $x_1 = a_1 b_2, \quad x_2 = -a_2 b_1.$

Setzt man nun diese Werthe in 1. ein, so erhält man die Gleichung des Kegelschnitts*) durch die fünf gegebenen Punkte $ABP_1 P_2 P_3$ zu

6. $a_1 b_2 T_1 T_2' - a_2 b_1 T_2 T_1' = 0.$

9. In ähnlicher Weise erhalten wir die Gleichung eines Kegelschnitts, von welchem fünf Tangenten gegeben sind.

Die gegebenen Tangenten seien A, B, T_1, T_2, T_3 . Zu den Curven zweiter Klasse, welche die vier Tangenten A, B, T_1, T_2 enthalten, gehören auch die beiden Punktpaare AT_1, BT_2 und AT_2, BT_1 (wobei wir unter dem Punkte AT_1 den Schnittpunkt der Geraden A und T_1 verstehen u. s. w.). Man stelle nun die Gleichungen der vier Punkte $AT_1,$



(M. 402.)

*) In der descriptiven Geometrie ist bewiesen worden, dass jeder ebene Schnitt eines Rotationskegels, der die Kegelspitze nicht enthält, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, und dass umgekehrt jede Ellipse, Parabel und Hyperbel als ebener Schnitt eines Rotationskegels erhalten werden kann; daher werden die Curven zweiter Ordnung als Kegelschnitte bezeichnet.

AT_2 , BT_1 , BT_2 auf; dieselben seien der Reihe nach $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_1' = 0$, $P_2' = 0$.

Die Gleichungen der beiden Punktpaare sind dann

$$P_1 \cdot P_2' = 0 \text{ und } P_2 \cdot P_1' = 0.$$

Multiplicirt man sie mit zwei Zahlen x_1 und x_2 und addirt, so erhält man die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung

$$1. \quad x_1 \cdot P_1 P_2' + x_2 P_2 P_1' = 0.$$

Dieser Gleichung wird durch die vier Geraden ABT_1T_2 genügt, denn

für die Coordinaten von A wird $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$,

„ „ „ „ B „ $P_1' = 0$ „ $P_2' = 0$,

„ „ „ „ T_1 „ $P_1 = 0$ „ $P_1' = 0$,

„ „ „ „ T_2 „ $P_2 = 0$ „ $P_2' = 0$.

Man kann nun das Verhältniss $x_1 : x_2$ immer so wählen, dass die Gleichung 1. durch eine beliebige fünfte Gerade T_3 der Ebene erfüllt wird. Man bilde die Gleichungen der Punkte P_3 und P_3' , in welchen A und B von T_3 geschnitten werden; dieselben werden in der Form erhalten

$$2. \quad P_3 = a_1 P_1 + a_2 P_2 = 0, \quad 3. \quad P_3' = b_1 P_1' + b_2 P_2' = 0.$$

Die Coordinaten von T_3 erfüllen die Gleichungen 2. und 3.; also ist für dieselben $a_1 P_1 = -a_2 P_2$, $b_1 P_1' = -b_2 P_2'$.

Setzt man dies in 1. ein, nachdem man 1. mit $a_1 b_1$ multiplicirt hat, und dividirt dann durch $P_2 P_2'$, so erhält man

$$4. \quad a_2 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 = 0.$$

Wir können daher für x_1 und x_2 die Werthe wählen

$$5. \quad x_1 = a_1 b_2, \quad x_2 = -a_2 b_1,$$

durch welche die Gleichung 4. identisch erfüllt wird. Hierdurch erhalten wir die verlangte Gleichung des durch die fünf Tangenten $ABT_1T_2T_3$ bestimmten Kegelschnitts

$$6. \quad a_1 b_2 \cdot P_1 P_2' - a_2 b_1 \cdot P_2 P_1' = 0.$$

10. A.*) Aus der in No. 8 gefundenen Gleichung des durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts

$$1. \quad a_1 b_2 \cdot T_1 T_2' - a_2 b_1 \cdot T_2 T_1' = 0$$

können wir leicht die Gleichungen zweier durch die Punkte A und B gehenden Geraden ableiten, die sich in einem Punkte der Curve schneiden. Ist nämlich

$$2. \quad T = \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0$$

die Gleichung der durch A nach irgend einem Curvenpunkte P gezogenen Geraden, so ist für jeden Punkt derselben

$$3. \quad \lambda_1 a_1 T_1 = -\lambda_2 a_2 T_2.$$

Setzt man dies in die Curvengleichung 1. ein, nachdem man dieselbe mit λ_1 multiplicirt hat, so erhält man

$$4. \quad (\lambda_2 b_2 T_2' + \lambda_1 b_1 T_1') a_2 T_2 = 0.$$

Daher liegen auf dem Kegelschnitte 1. die Punkte, welche zugleich 2. und 4. genügen, d. i. die Punkte, welche die Gleichungspaare

$$a) \quad T = 0 \text{ und } a_2 T_2 = 0,$$

$$b) \quad T = 0 \text{ und } \lambda_2 b_2 T_2' + \lambda_1 b_1 T_1' = 0$$

*) Um den Dualismus der Entwicklungen in Punkt- und in Liniencoordinaten deutlicher hervortreten zu lassen, werden wir einige Sätze so anordnen, dass in derselben Nummer unter A) eine Entwicklung in Punktcoordinaten, unter B. die entsprechende Entwicklung in Liniencoordinaten enthalten ist. Will man den Gedankengang verfolgen, ohne abwechselnd von Punkt- auf Liniencoordinaten überzugehen, so hat man zunächst 10A, 11A, 12A ... und dann 10B, 11B, 12B ... zu lesen.

befriedigen. Das erste Paar von Gleichungen wird durch den Punkt A erfüllt, den die Geraden T und T_2 gemein haben; das andere Paar von dem neuen Curvenpunkte P ; die Gerade

$$5. \quad T' \equiv \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' = 0,$$

die sich mit T in einem Punkte P durchschneidet, geht, wie ihre Gleichung lehrt, durch B , ist also die gesuchte Gerade.

Ändert man das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ stetig, so beschreiben T und T' die Büschel, deren Träger A und B sind, und P beschreibt damit den ganzen Kegelschnitt.

Die Gleichungen 2. und 5. lehren (§ 6, 10), dass die beiden Büschel A und B projectiv sind, und je zwei nach demselben Curvenpunkte gehende Strahlen sich entsprechen. Wir haben daher den Satz: Die Punkte einer Curve zweiter Ordnung werden von irgend zwei Punkten der Curve aus durch projective Strahlbüschel projectirt, und zwar entsprechen sich die Strahlen, die nach demselben Curvenpunkte gehen.

B. Aus der Gleichung eine Curve zweiter Klasse, die fünf gegebene Gerade A, B, T_1, T_2, T_3 berührt

$$1. \quad a_1 b_2 \cdot P_1 P_2' - a_2 b_1 \cdot P_2 P_1' = 0,$$

findet man leicht die Gleichung des Punktes der Geraden B , der mit einem gegebenen Punkte P der Geraden A auf einer Tangente der Curve liegt.

Die Gleichung von P sei

$$2. \quad P \equiv \lambda_1 a_1 P_1 + \lambda_2 a_2 P_2 = 0.$$

Für die Coordinaten jeder durch P gehenden Geraden ist daher

$$3. \quad \lambda_1 a_1 P_1 = -\lambda_2 a_2 P_2.$$

Multipliziert man 1. mit λ_1 und setzt dann den Werth 3. für $\lambda_1 a_1 P_1$ ein, so erhält man

$$4. \quad a_2 P_2 (\lambda_2 b_2 P_2' + \lambda_1 b_1 P_1') = 0.$$

Die durch P gehenden Tangenten der Curve befriedigen also ausser der Gleichung $P = 0$ noch eine der Gleichungen $P_2 = 0$, $\lambda_2 b_2 P_2' + \lambda_1 b_1 P_1' = 0$.

Die Tangente durch P und P_2 ist die gegebene Gerade A ; die neue durch P gehende Tangente verbindet P mit dem Punkte

$$5. \quad P' \equiv \lambda_1 b_1 P_1' + \lambda_2 b_2 P_2' = 0$$

der Geraden B .

Aus den Gleichungen 2. und 5. folgt, dass die Tangenten der Curve zweiter Ordnung die festen Tangenten A und B in projectiven Punktreihen treffen. Wir haben daher den Satz: Die Tangenten eines Kegelschnitts werden von zwei (oder mehr) Tangenten desselben in projectiven Punktreihen geschnitten, und zwar sind die Punkte entsprechend, welche auf derselben Tangente liegen.

11. A. Der Satz 10 A., der ebenso wie B. für die Curven zweiter Ordnung von grösster Bedeutung ist, lehrt, wie man alle Punkte eines Kegelschnitts construiren kann, von dem fünf Punkte gegeben sind.

Man verbinde zwei der gegebenen fünf Punkte A und B mit den drei übrigen $P_1 P_2 P_3$ durch die Strahlen $T_1 T_2 T_3$ bez. $T_1' T_2' T_3'$. Um nun den Punkt des Kegelschnitts zu erhalten, der auf einem beliebigen durch A gezogenen Strahle T liegt, construirt man durch B den Strahl T' , für welchen die Doppelverhältnissgleichung gilt: $(T_1 T_2 T_3 T) = (T_1' T_2' T_3' T')$. Der Schnittpunkt von T und T' ist der gesuchte Curvenpunkt. Lässt man T das ganze Büschel A zurücklegen, so bekommt man alle Punkte der Curve.

Die Construction besteht in der Vervollständigung der projectiven Büschel A und B und erfolgt nach § 6, 14.

B. Der Satz 10 B. lehrt, jede Tangente eines Kegelschnitts aus fünf gegebenen Tangenten zu construiren.

Man bemerke die Schnittpunkte $P_1P_2P_3$ bez. $P_1'P_2'P_3'$, welche drei von den gegebenen Tangenten mit den beiden anderen A und B haben.

Um nun die Tangente des Kegelschnitts zu finden, die durch einen beliebigen Punkt P der Geraden A geht, construire man auf B den Punkt P' , für welchen die Gleichheit der Doppelverhältnisse besteht $(P_1P_2P_3P) = (P_1'P_2'P_3'P')$.

Die Gerade PP' ist die gesuchte Tangente.

Um alle Tangenten der Curve zu erhalten, hat man also zu den sämtlichen Punkten der Geraden A die projectiv entsprechenden Punkte der Geraden B zu construiren, und je zwei entsprechende Punkte zu verbinden.

12. A. Nähert sich der Strahl T der Geraden AB (Fig. 401) so rückt auch der auf T gelegene Curvenpunkt P näher an B . Verschwindet der Winkel zwischen T und AB , so verschwindet auch der Abstand BP und der durch B und P gehende Strahl T' wird zur Tangente der Curve im Punkte B .

Diese Bemerkung setzt uns in den Stand, die Tangente eines Kegelschnitts in einem direkt gegebenen oder durch Construction gefundenen Punkte desselben zu construiren. Ist Q dieser Punkt, so verbinde man ihn durch die Strahlen $T_1T_2T_3$ mit drei anderen bekannten Punkten A, B, C der Curve; ferner verbinde man A, B, C durch die Strahlen $T_1'T_2'T_3'$ mit einem vierten bekannten Punkte R der Curve. Hierauf verbinde man R mit Q durch den Strahl T'' und construire nun durch Q den Strahl T , für welchen $(T_1T_2T_3T) = (T_1'T_2'T_3'T'')$; dann ist T die gesuchte Tangente der Curve in Q .

B. Nähert sich der Punkt P (Fig. 402) dem Schnittpunkte S der Geraden A und B , so nimmt der Winkel ab, den die Gerade B mit der Tangente PP' bildet; verschwindet die Strecke PS , so verschwindet auch der Winkel dieser Geraden, während doch ihr Schnittpunkt P' ein ganz bestimmter ist. Dieser Punkt ist also dann der Schnittpunkt zweier unendlich naher Tangenten, ist mithin der auf der Tangente B liegende Curvenpunkt.

Dies lehrt, den Punkt zu construiren, in welchem ein Kegelschnitt von einer direkt gegebenen oder durch Construction gefundenen Tangente berührt wird. Ist Q diese Tangente, so bemerke man die Schnittpunkte $P_1P_2P_3$ derselben mit drei bekannten Tangenten ABC der Curve; ferner durchschneide man ABC mit einer vierten bekannten Tangente R in den Punkten $P_1'P_2'P_3'$, und bemerke noch den Punkt P' , in welchem Q und R sich schneiden. Construirt man nun auf Q den Punkt P , für welchen

$$(P_1P_2P_3P) = (P_1'P_2'P_3'P'),$$

so ist P der gesuchte Berührungspunkt.

13. A. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte gegeben; man soll die Punkte bestimmen, in welchen er von einer beliebigen Geraden geschnitten wird.

Sind $ABP_1P_2P_3$ die gegebenen Punkte und G die gegebene Gerade, so bilde man die Strahlenbüschel $T_1T_2T_3$ und $T_1'T_2'T_3'$, durch welche $P_1P_2P_3$ von A und B aus projicirt werden, und bemerke die Schnittpunkte dieser Strahlen mit G .

G werde von $T_1T_2T_3$ in den Punkten $R_1R_2R_3$, von $T_1'T_2'T_3'$ in den Punkten $R_1'R_2'R_3'$ geschnitten.

Construirt man nun zwei entsprechende Punkte R und R' der beiden auf einander liegenden projectiven Punktreihen, welche durch die entsprechenden Paare $R_1R_2R_3 \asymp R_1'R_2'R_3'$ bestimmt sind, so sind die Strahlen T und T' entsprechend, welche R und R' von A und B aus projeciren, ihr Schnittpunkt ist also ein Punkt des Kegelschnitts.

Sind insbesondere Π und Π_1 die Doppelpunkte der beiden auf G liegenden projectiven Punktreihen (§ 6, 19), so ist in den Strahlbüscheln A und B

$$A\Pi \asymp B\Pi, \quad A\Pi_1 \asymp B\Pi_1,$$

also sind Π und Π_1 die gesuchten Schnittpunkte.

Wir entnehmen hieraus den Satz: Wenn man die Punkte eines Kegelschnitts von beliebig vielen Punkten dieser Curve aus projecirt, und die so entstehenden projectiven Strahlbüschel mit einer Geraden G durchschneidet, so erhält man auf G mehrere projective Punktreihen, die alle ein gemeinsames Paar selbstentsprechender Punkte haben, nämlich die Schnittpunkte der Geraden G mit dem Kegelschnitte.

Wenn G den Kegelschnitt nicht trifft, so haben die auf G erzeugten projectiven Punktreihen imaginäre Doppelpunkte. In diesem Falle hat man diese imaginären Doppelpunkte als die Schnittpunkte der Geraden G und des Kegelschnitts zu betrachten.

B. Aufgabe. Von einem Kegelschnitte sind fünf Tangenten gegeben. Man soll die Tangenten bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt C der Ebene gehen.

Werden zwei der gegebenen Tangenten A und B von den übrigen drei in den Punkten $P_1P_2P_3$ bez. $P_1'P_2'P_3'$ geschnitten, verbindet man C mit $P_1P_2P_3$ bez. $P_1'P_2'P_3'$ durch die Strahlen $R_1R_2R_3$ bez. $R_1'R_2'R_3'$, und construirt nun durch C zwei entsprechende Strahlen, R und R' der durch die Paare

$$R_1R_2R_3 \asymp R_1'R_2'R_3'$$

bestimmten projectiven Strahlbüschel, so werden die Geraden A und B von R und R' in zwei entsprechenden Punkte P und P' der auf A und B liegenden projectiven Reihen $P_1P_2P_3 \dots \asymp P_1'P_2'P_3' \dots$ geschnitten, die Gerade PP' ist daher eine Tangente der Curve.

Sind insbesondere Π und Π_1 die Doppelstrahlen der beiden concentrischen Strahlbüschel R und R' , so sind Π und Π_1 zugleich Tangenten des Kegelschnitts.

Also sind Π und Π_1 die gesuchten Tangenten.

Wir haben hiernach den Satz: Wenn die projectiven Punktreihen, welche die Tangenten eines Kegelschnitts auf beliebig vielen festen Tangenten ausschneiden, von einem beliebigen Punkte C der Ebene aus projecirt werden, so entstehen mehrere concentrische projective Strahlbüschel, die alle zwei selbstentsprechende Strahlen haben, nämlich die Tangenten des Kegelschnitts, die durch C gehen.

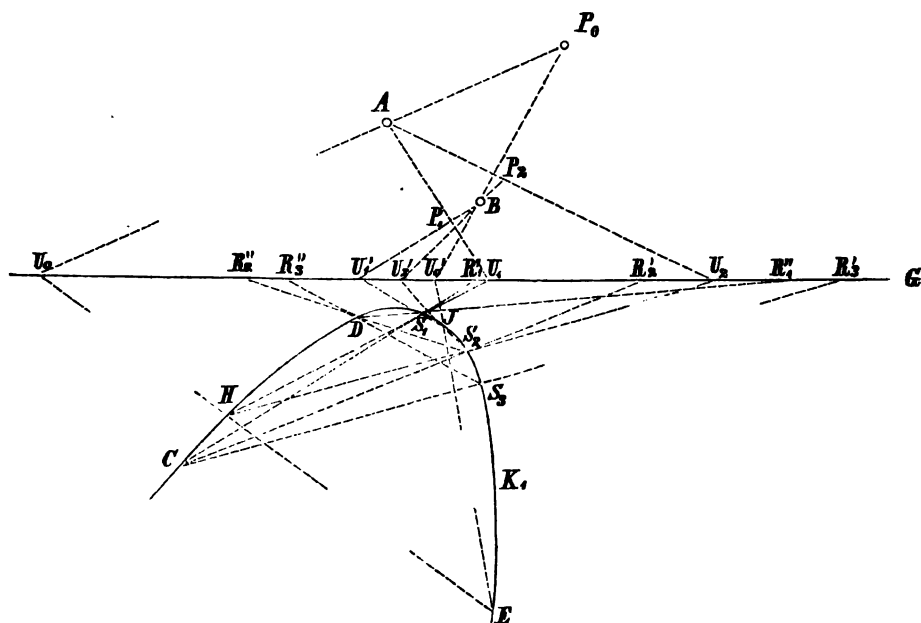
Haben die Strahlbüschel keine realen Doppelstrahlen, so sind die imaginären Doppelstrahlen als die (imaginären) durch C gehenden Curventangenten zu betrachten.

14. A. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem drei reale und zwei conjugirt complexe Punkte gegeben sind.

Die realen Punkte seien ABP_0 . Die imaginären Punkte seien die Doppelpunkte Π und Π_1 zweier auf einer gegebenen Geraden G liegenden, durch drei Paare entsprechender Punkte $R_1'R_2'R_3' \asymp R_1''R_2''R_3''$ gegebenen projectiven Punktreihen.

Wir verbinden $R_1'R_2'R_3'$ mit irgend einem Punkte C und $R_1''R_2''R_3''$ mit

einem andern Punkte D . Die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen dieser beiden Büschel seien $S_1 S_2 S_3$.



(M. 403.)

Durch $CDS_1 S_2 S_3$ ist ein Kegelschnitt K_1 bestimmt, der von G ebenso, wie der gesuchte Kegelschnitt K , in den imaginären Doppelpunkten der auf G liegenden projectiven Punktreihen getroffen wird.

Die Punkte des gesuchten Kegelschnitts K werden von den beiden Punkten A und B aus in projectiven Strahlbüscheln projicirt, und diese treffen G in zwei projectiven Punktreihen u und u' mit den Doppelpunkten Π und Π_1 . Von diesen beiden Punktreihen sind ausser den Doppelpunkten noch die beiden entsprechenden Punkte U_0 und U_0' bekannt, in welchen G von den Strahlen AP_0 und BP_0 geschnitten wird.

Verbindet man nun U_0 und U_0' mit irgend einem Punkte auf K_1 , z. B. mit E , und construirt die Punkte H und I , in denen diese Geraden den Kegelschnitt K_1 zum zweiten Male (ausser E) treffen, so werden die Punkte auf K_1 von H und I aus in zwei projectiven Strahlbüscheln projicirt, und diese schneiden auf der Geraden G zwei projective Punktreihen v und v' aus, die die Doppelpunkte Π und Π_1 und die entsprechenden Punkte U_0 und U_0' haben; folglich sind diese Reihen mit den Reihen u und u' identisch.

Verbindet man nun noch S_1 mit H und I , sowie S_2 mit H und I , und durchschneidet mit diesen beiden Strahlenpaaren die Gerade G in $U_1 U_1'$, $U_2 U_2'$, so hat man damit zwei weitere Paare entsprechender Punkte der Reihen u und u' . Zieht man AU_1 und BU_1' , sowie AU_2 und BU_2' , so sind die Schnittpunkte P_1 und P_2 dieser beiden Strahlenpaare zwei Punkte des gesuchten Kegelschnitts.

Man hat nun im Ganzen fünf reale Punkte A , B , P_0 , P_1 , P_2 , und kann daher den Kegelschnitt vervollständigen.

B. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem drei reale und zwei conjugirt complexe Tangenten gegeben sind.

Die realen Tangenten seien A, B und T_0 , die beiden conjugirt complexen seien die Doppelstrahlen Σ und Σ_1 zweier concentrischer, durch drei Paare entsprechende Strahlen $R_1'R_2'R_3' \asymp R_1''R_2''R_3''$ gegebener Strahlbüschel mit dem Träger Γ .

Durchschneidet man die Strahlen $R_1'R_2'R_3'$ mit einer beliebigen Geraden C und die Strahlen $R_1''R_2''R_3''$ mit einer andern Geraden D , und verbindet die entsprechenden Schnittpunkte durch die drei Geraden S_1, S_2, S_3 , so ist durch die fünf Geraden $CD S_1 S_2 S_3$ ein Kegelschnitt K_1 bestimmt, der ebenso, wie der gesuchte Kegelschnitt K , die imaginären Doppelstrahlen der beiden auf Γ liegenden concentrischen Büschel zu Tangenten hat.

Die beiden Punktreihen, in welchen die Tangenten des gesuchten Kegelschnittes von den Tangenten A und B getroffen werden, werden von Γ in zwei projectiven Büscheln u und u' projecirt, die Σ und Σ_1 zu Doppelstrahlen haben; von diesen beiden Büscheln sind die beiden entsprechenden Strahlen U_0 und U_0' bekannt, welche die Schnittpunkte der Geraden A und B mit der Geraden T_0 projeciren.

Durchschneidet man nun U_0 und U_0' mit einer Tangente des Kegelschnitts K_1 , z. B. mit S_1 , und bestimmt die Tangenten E und F , welche von diesen Schnittpunkten sich ausser S_1 noch an K_1 legen lassen, so werden auch die Tangenten des K_1 von E und F in zwei Punktreihen geschnitten, die von Γ aus in projectiven Strahlbüscheln v und v' projecirt werden, welche die Doppelstrahlen Σ und Σ_1 haben und in denen U_0 und U_0' entsprechende Strahlen sind.

Die Büschel v und v' sind daher mit den Büscheln u und u' identisch.

Projecirt man von Γ aus die Punkte, in denen die Tangenten E und F des Kegelschnitts K_1 von den Tangenten S_2, S_3 geschnitten werden, so erhält man zwei Paare entsprechender Strahlen; diese treffen A und B in zwei Paar entsprechenden Punkten, deren Verbindungsgerade T_2 und T_3 zwei Tangenten des gesuchten Kegelschnitts K sind.

Man hat nun von demselben fünf reale Tangenten A, B, T_1, T_2, T_3 und kann ihn daher ergänzen.

15. A. Alle Punkte, von denen aus vier Punkte $ABCD$, die nicht zu dreien auf derselben Geraden liegen, durch Strahlen von gegebenem Doppelverhältniss x projecirt werden, liegen auf einem Kegelschnitt, der durch die vier Punkte geht.

Es sei E ein Punkt, von dem aus die gegebenen Punkte unter dem Doppelverhältniss x projecirt werden. Construirt man den Kegelschnitt K , der durch $ABCDE$ bestimmt ist, so werden die Punkte $ABCD$ von jedem Punkte dieses Kegelschnitts aus unter dem Doppelverhältniss x projecirt.

Liegt X nicht auf dem Kegelschnitte K , so ziehe man XA , und durchschneide damit K in Y .

Angenommen, das Doppelverhältniss der vier Strahlen $X(ABCD)$ d. i. der von X nach A, B, C, D gezogenen Strahlen wäre x , so hätte man

$$X(ABCD) = x = Y(ABCD),$$

also wären die Büschel $X(ABCD)$ und $Y(ABCD)$ projectiv. Da nun der Verbindungsstrahl der Centren XY sich selbst entspricht, so sind die Büschel $X(ABCD)$ und $Y(ABCD)$ perspectiv, also liegen BCD in einer Geraden. Dies widerspricht der Voraussetzung, also können die Punkte $ABCD$ von keinem Punkte ausserhalb des Kegelschnitts K unter dem Doppelverhältniss x projecirt werden.

B. Die Geraden, welche vier feste Gerade $ABCD$, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen, in Punkten treffen, die ein gegebenes Doppelverhältniss α haben, umhüllen einen Kegelschnitt.

Es sei E eine solche Gerade. Construiert man den Kegelschnitt K , der durch die fünf Tangenten A, B, C, D, E bestimmt ist, so schneidet jede Tangente dieses Kegelschnitts die vier Geraden $ABCD$ unter dem Doppelverhältniss α .

Angenommen, eine Gerade X , die K nicht berührt, schneide $ABCD$ unter dem Doppelverhältniss α , so lege man von dem Punkte, in welchem X von A getroffen wird, eine Tangente Y an K . Bezeichnet man mit $X(ABCD)$ das Doppelverhältniss der vier Punkte, in dem X von $ABCD$ getroffen wird, so hat man

$$X(ABCD) = \alpha = Y(ABCD).$$

Die Punktreihen $X(ABCD)$ und $Y(ABCD)$ sind daher projectiv. Da nun der Schnittpunkt A der Geraden X und Y sich selbst entspricht, so sind die beiden Reihen perspectiv, es gehen also die Geraden BCD durch einen Punkt. Dies widerspricht der Voraussetzung; also wird keine Gerade, die K nicht berührt, von den Geraden $ABCD$ unter dem Doppelverhältniss α geschnitten.

16. A. Den Kegelschnitt, auf dem die Punkte liegen, von denen aus vier gegebene Punkte $ABCD$ unter einem gegebenen Doppelverhältniss projecirt werden, kann man in folgender Weise construiren.

Soll das Doppelverhältniss α gleich dem von vier durch einen Punkt gehenden Strahlen $T_1 T_2 T_3 T_4$ sein, so projecire man BCD von A aus durch die Strahlen $R_2 R_3 R_4$ und bestimme nun durch A den Strahl R_1 , für welchen

$$(R_1 R_2 R_3 R_4) = (T_1 T_2 T_3 T_4).$$

Hierauf projecire man ACD von B aus durch die Geraden $R_1' R_3' R_4'$, und construire den Strahl R_2' durch B so, dass $(R_1' R_2' R_3' R_4') = (T_1 T_2 T_3 T_4)$.

Die Büschel $R_1 R_2 R_3 R_4$ und $R_1' R_2' R_3' R_4'$ haben dann beide das Doppelverhältniss α , sind also projectiv. Ergänzt man diese Büschel, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen in den Punkten des gesuchten Kegelschnitts.

Ist M ein Punkt dieses Kegelschnitts, so ist $M(ABCD) = (R_1 R_2 R_3 R_4)$, also $= \alpha$, wie verlangt war.

B. Den Kegelschnitt, dessen Tangenten vier gegebene Gerade $ABCD$ unter einem gegebenen Doppelverhältniss α schneiden, kann man construiren wie folgt:

Das Doppelverhältniss α sei als das Doppelverhältniss von vier Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4$ einer Geraden gegeben.

Man schneide mit A durch die Geraden BCD in den Punkten $R_2 R_3 R_4$ und construire auf A den Punkt R_1 , für welchen $(R_1 R_2 R_3 R_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$.

Ferner bemerke man auf B die Schnittpunkte $R_1' R_2' R_4'$ mit den Geraden ACD und bestimme den Punkt R_2' , für welchen $(R_1' R_2' R_3' R_4') = (P_1 P_2 P_3 P_4)$.

Ergänzt man nun die projectiven Reihen $R_1 R_2 R_3 R_4$ und $R_1' R_2' R_3' R_4'$, so sind die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte die Tangenten des gesuchten Kegelschnitts.

Ist M eine dieser Tangenten, so ist in der That

$$M(ABCD) = R_1 R_2 R_3 R_4, \text{ also } = \alpha.$$

17. A. Wenn die sechs Punkte A, B, C, D, E, F, G auf einem Kegelschnitte liegen, so kann man zwei beliebige von ihnen als Träger zweier projectiven Büschel ansehen, von denen entsprechende Strahlen sich in den übrigen vier Punkten schneiden. Sechs Punkte eines Kegelschnitts bilden also, ganz willkürlich angeordnet, die Ecken eines PASCAL'schen Sechsecks (§ 6 No. 4); wir haben

somit den nach seinem Erfinder benannten PASCAL'schen Satz: In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecke liegen die drei Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten auf Punkten einer Geraden. Diese Gerade heisst die PASCAL'sche Gerade des Sechsecks.

Verbindet man sechs Punkte in jeder beliebigen Anordnung zu einem Sechsecke und bedenkt, dass es gleichgültig ist, von welchem Perimeterpunkte aus man die Peripherie desselben durchläuft, und in welcher Richtung man sie durchläuft, so wird ersichtlich, dass die $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Permutationen der sechs Punkte $A \dots F$ nur $720 : 12 = 60$ verschiedene Sechsecke liefern.

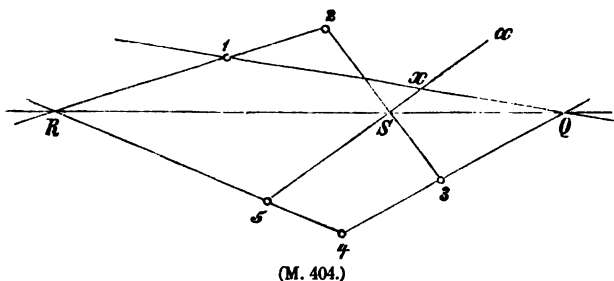
Zu sechs Punkten eines Kegelschnitts gehören daher 60 PASCAL'sche Gerade.

B. Der BRIANCHON'sche Satz. Ist das Sechsseit $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ einem Kegelschnitte umschrieben, so kann man irgend zwei Seiten desselben als Träger zweier projectiven Punktreihen ansehen, die auf ihnen von den Tangenten der Curve ausgeschnitten werden; in diesen Reihen entsprechen sich insbesondere die Schnittpunkte der beiden Träger mit den übrigen vier Seiten des Sechsseits. Man kann daher sechs Tangenten eines Kegelschnitts in willkürlicher Ordnung als die Seiten eines BRIANCHON'schen Sechsecks (§ 6 No. 4) ansehen und hat somit den Satz: In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsseite gehen die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt. Dieser Punkt heisst der BRIANCHON'sche Punkt des Sechsseits.

Sechs Gerade lassen $6! = 720$ Anordnungen zu. Da es aber gleichgültig ist, mit welcher Geraden man beginnt, um den Perimeter eines Sechsseits zu durchlaufen, sowie in welcher Richtung man ihn durchläuft, so ist die Anzahl der geometrisch verschiedenen Sechsecke nur $6! : 12 = 60$.

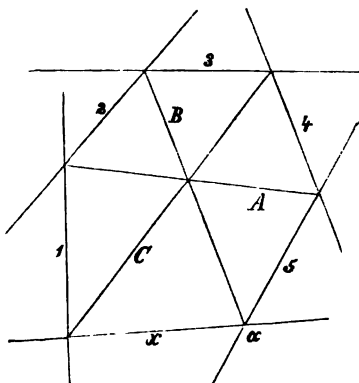
Zu sechs Tangenten eines Kegelschnitts gehören also 60 BRIANCHON'sche Punkte.

18. Mit Hülfe des PASCAL'schen und des BRIANCHON'schen Satzes kann man die Construction von Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts aus fünf gegebenen Punkten bez. fünf gegebenen Tangenten in leicht übersichtlicher Weise vornehmen.



A. Sind 1 2 3 4 5 die gegebenen Punkte und sucht man den Punkt x , der auf einer durch 5 gezogenen Geraden α liegt, so betrachte man 1 2 3 4 5 x als ein Sechseck und suche die Schnittpunkte R und S der gegenüberliegenden Seitenpaare 1 2, 4 5 und 2 3, α auf; dann ist RS die PASCAL'sche Gerade des Sechsecks. Legt man durch den Schnitt Q der Geraden RS und 3 4 und durch 1 eine Gerade, so trifft diese α in dem gesuchten Punkte x .

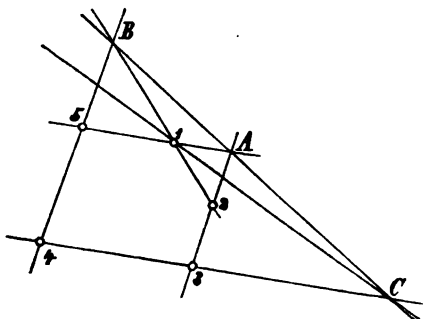
B. Sind fünf Tangenten 1 2 3 4 5 gegeben, und sucht man die Tangente x , die durch einen Punkt α auf 5 geht, so betrachte man



1 2 3 4 5 x als ein Sechseck; ist A die Gerade zwischen den Punkten, in denen 1 und 2, sowie die gegenüberliegenden Seiten 4 und 5 sich schneiden, ferner B die Gerade zwischen dem Eckpunkte 2, 3 und der gegenüberliegenden Ecke α , so ist der Schnitt von A und B der BRIANCHON'sche Punkt des Sechsecks. Legt man also C durch diesen Punkt und den Punkt 3, 4, und eine Gerade durch den Schnitt C , 1 und den Punkt α , so ist diese die gesuchte Tangente x .

19. A. Wenn eine Seite eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks verschwindend klein wird, so geht die Gerade, auf der sie liegt, in eine Tangente der Curve über, und die beiden unendlich nahen Eckpunkte fallen in den Berührungspunkt dieser Tangente. Der PASCAL'sche Satz erhält für diesen Fall folgende Aenderung: Die Schnittpunkte der 1. und 3., sowie der 2. und 4. Seite eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecks liegen mit dem Schnittpunkte der 5. Seite und der Tangente in dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkte auf einer Geraden.

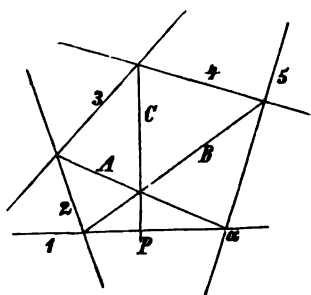
Dieser Satz lehrt, die Tangente in einem Punkte eines Kegelschnitts zu construiren, wenn noch ausserdem vier Punkte desselben bekannt sind.



(M. 406.)

Sind die Punkte 1 2 3 4 5 gegeben, und sucht man die Tangente in 1, so bestimme man den Schnitt A der Geraden 1 5 und 2 3, sowie den Schnitt B der Geraden 1 2 und 4 5, ziehe AB und verbinde den Schnitt C dieser Geraden und der Geraden 3 4 mit dem Punkte 1. Dann ist AC die gesuchte Tangente.

B. Wenn zwei Seiten eines einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecks unendlich nahe benachbart sind, so gehen sie in eine einzige Tangente über und der ihnen gemeinsame Eckpunkt wird der Berührungspunkt dieser Tangente. Der BRIANCHON'sche Satz liefert uns nun: In einem einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen Fünfeck geht die Gerade, welche den Schnitt der Seiten 1 und 2 mit dem Schnitt von 4 und 5 verbindet und die Gerade, die den Schnitt 1, 5 mit dem Schnitt 2, 3 verbindet, mit der Geraden, die den Berührungspunkt der Seite 1 mit dem Schnitt der Seiten 3 und 4 verbindet, durch einen Punkt.



(M. 407.)

Man sieht hieraus, wie man den Berührungspunkt auf einer Tangente einer Curve zweiter Klasse bestimmen kann, wenn man noch ausserdem vier Tangenten kennt.

Sind nämlich die Tangenten 1 2 3 4 5 gegeben, und sucht man den Berührungspunkt der Tangente 1, so bestimme man die Gerade A , welche den Schnittpunkt der Tangenten 1 und 5 mit dem Schnittpunkt von 2 und 3 verbindet; ferner die Gerade B , die den Schnitt von 1 und 2 mit dem Schnitt von 4 und 5 verbindet, und ziehe ferner eine Gerade C durch den Schnitt von 3 und 4 und den von A und B . Der Schnitt von C und 1 ist der gesuchte Tangentialpunkt.

20. A. Der Satz 19 A lehrt die Construction eines Kegelschnitts,

wenn vier Punkte und die Tangente in einem derselben gegeben sind.

Sind die Punkte 1 2 3 4 und die Tangente in 1 gegeben (Fig. 406), und sucht man den Punkt 5 der Curve, der auf einer durch 1 gezogenen Geraden liegt, so bestimme man den Schnitt A dieser Geraden mit der Geraden 2 3; den Schnitt C der Geraden 4 3 und der Tangente in 1, und den Schnitt B der Geraden 1 2 und der Geraden AC . Zieht man nun $B 4$, so durchschneidet diese Gerade die durch 1 gezogene in dem gesuchten Curvenpunkte 5.

B. Der Satz 19 B lehrt die Construction der Tangenten einer Curve zweiten Grades, wenn vier Tangenten und der Tangentialpunkt auf einer derselben gegeben sind.

Sind die Tangenten 1 2 3 4, sowie der Tangentialpunkt P auf 1 gegeben, (Fig. 407) und sucht man die von einem Punkte α der Geraden 1 ausgehende Curventangente, so ziehe man die Gerade A , welche α mit dem Schnitt von 2 und 3 verbindet; ferner die Gerade C , welche den Schnitt von 3 und 4 mit dem Tangentialpunkte P verbindet; und verbinde dann den Schnitt von 1 und 2 mit dem Schnitt von A und C durch eine Gerade B . Verbindet man den Schnitt von B und 4 mit α , so ist diese Gerade die gesuchte Tangente 5.

21. A. Wenn zwei gegenüberliegende Seiten eines eingeschriebenen Sechsecks verschwinden, so ergibt sich der Satz: Der Schnitt der ersten und dritten Seite und der Schnitt der zweiten und vierten Seite eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks liegt mit den Schnitten je zweier Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken auf einer Geraden.

Man sieht leicht, wie man auf Grund dieses Satzes die Punkte eines Kegelschnitts construiren kann, von dem drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben gegeben sind.

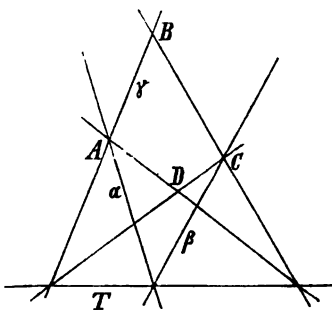
Sind ACD die gegebenen Punkte, sowie α und β die Tangenten in A und C , und sucht man den auf γ liegenden Curvenpunkt B , so ziehe man T , durchschneide T mit AD und lege durch diesen Schnittpunkt und durch C eine Gerade; diese trifft γ in dem gesuchten Punkte.

B. Wenn zwei Tangenten eines umschriebenen Sechsecks und die beiden gegenüberliegenden zusammenfallen, so liefert die Anwendung des BRIANCHON'schen Satzes: Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt umschriebenen Vierecks und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte gegenüberliegender Seiten gehen durch einen Punkt.

Man kann in leicht ersichtlicher Weise auf Grund dieses Satzes die Tangenten eines Kegelschnitts construiren, von dem drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben gegeben sind.

22. Wenn drei abwechselnde Seiten eines Sehnensechsecks verschwinden, so erhält man: Die Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks werden von den Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken in Punkten geschnitten, die auf einer Geraden liegen.

Hiernach erhält man die Tangente in einem Curvenpunkte, wenn zwei andere Punkte und die Tangenten in diesen Punkten bekannt sind; ebenso erhält



(M. 408.)

man durch diesen Satz den Tangentialpunkt, der auf einer gegebenen Tangente liegt, wenn ausserdem zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bekannt sind. Die entsprechende Umgestaltung eines Tangentensechseits führt auf denselben Satz.

§ 12. Homogene Coordinaten des Punktes und der Geraden.

1. Wir wenden uns nun zu einer neuen Coordinatenbestimmung, den homogenen Coordinaten. Die homogenen Coordinaten sind, wie wir bald sehen werden, ebenso anschaulich wie die Parallelcoordinaten und haben vor diesen den Vorzug voraus, dass die analytischen Entwicklungen und Formeln in homogenen Coordinaten, insbesondere bei Problemen allgemeinerer Art, einen höheren Grad von Einfachheit und Uebersichtlichkeit besitzen, und dadurch zur Ableitung geometrischer Sätze besser geeignet sind, als bei Anwendung von Parallelcoordinaten.

Wir werden drei Bestimmungsstücke — Coordinaten — des Punktes und der Geraden benutzen. Da in der Ebene die Lage eines Punktes und einer Geraden durch zwei Stücke bestimmt ist, so muss sich aus zweien der drei homogenen Coordinaten die dritte berechnen lassen; zwischen den drei homogenen Coordinaten eines Punktes und einer Geraden besteht also eine Gleichung, durch die man dann wieder eine derselben, wenn erwünscht, eliminiren kann.

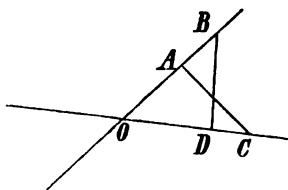
Wir werden die Coordinaten so wählen, dass diese Gleichung eine lineare ist.

Es zeigt sich leicht, dass man in den Stand gesetzt ist, jede Gleichung in homogenen Coordinaten in eine homogene Gleichung zu transformiren, d. i. in eine Gleichung, deren Glieder gleich viele veränderliche Faktoren enthalten; und in der Möglichkeit liegt der wesentliche Vorzug der homogenen Coordinaten.

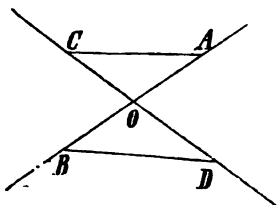
Ehe wir zur Aufstellung dieser Coordinaten vorschreiten, schicken wir einige Bemerkungen über das Vorzeichen von Dreiecksflächen voraus, die sich an § 5, 5 anschliessen.

2. Wenn zwei Gerade sich in einem Punkte O schneiden und auf der einen Geraden zwei Punkte A und B , auf der andern zwei Punkte C und D liegen, so ist:

$$1. \quad \frac{OAC}{OBD} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OC}{OD}.$$



(M. 409.)



(M. 410.)

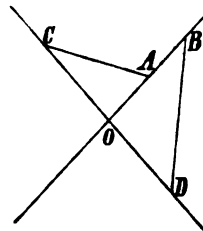
Beweis. Aus den Elementen ist bekannt, dass dieser Satz richtig ist, wenn man die beiden Dreiecksflächen sowie die vier Strecken alle positiv rechnet. Wir haben also noch nachzuweisen, dass die Gleichung richtig bleibt, wenn auf die Vorzeichen Rücksicht genommen wird.

a) Liegen die Punkte A und B , sowie die Punkte C und D auf derselben Seite von O , so haben die Flächen OAC und OBD dasselbe Zeichen, es ist daher jeder der drei Quotienten $OAC : OBD$, $OA : OB$, $OC : OD$ positiv, und somit die Gleichung 1. auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig.

b) Liegen die Punkte A und B , sowie die Punkte C und D auf verschiedenen Seiten von O , so sind die Dreiecke OAC und OBD gleichen Sinnes, der

Quotient $OAC : OBD$ ist also positiv. Die Strecken OA und OB , sowie OC und OD sind aber ungleichen Sinnes, und daher die beiden Quotienten $OA : OB$ und $OC : OD$ negativ, ihr Produkt also wieder positiv; die Gleichung 1. ist daher auch in diesem Falle gültig.

c) Liegen die Punkte eines der beiden Paare AB und CD , z. B. die des Paares AB , auf derselben Seite von O , die des andern Paares auf verschiedenen Seiten, so ist einer der Quotienten $OA : OB$ und $OC : OD$ positiv, der andere negativ. Die beiden Dreiecke OAC und OBD sind in diesem Falle ungleichen Sinnes, ihr Quotient also negativ. Beide Seiten der Gleichung 1. haben also jetzt das negative Zeichen.



(M. 411.)

Somit stimmen für jede Lage der Punkte $ABCD$ der Quotient $OAC : OBD$ und das Produkt $(OA : OB)(OC : OD)$ auch rücksichtlich der Vorzeichen überein.

3. Für vier Punkte der Ebene gilt die Gleichung:

$$ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Beweis. a) Liegt einer der Punkte im Dreieck der drei anderen, z. B. D im Dreieck ABC , so haben die Dreiecke ABC und DBC dasselbe Zeichen, und ebenso die Dreiecke BCA und DCA , sowie CAB und DAB . Da nun $ABC = BCA = CAB$, so haben die vier Dreiecke ABC , DBC , DCA , DAB dasselbe Zeichen. Da nun für die absoluten Werthe die Gleichung gilt

$$1. \quad ABC = DAB + DBC + DCA,$$

so gilt diese Gleichung auch mit Rücksicht auf den Sinn der Flächen.

Bemerkt man, dass $DBC = BCD$, $DCA = -CDA$, so erhält man aus 1.

$$2. \quad ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Es ist nun nachzuweisen, dass die Gleichung auch für jede andere Reihenfolge der Punkte $ABCD$ gilt.

Zunächst ist ersichtlich, dass die Formeln gelten:

$$3. \quad BCD - CDA + DAB - ABC = 0,$$

$$4. \quad CDA - DAB + ABC - BCD = 0,$$

$$5. \quad DAB - ABC + BCD - CDA = 0.$$

Wenn also die Formel 2. für eine Reihenfolge der vier Punkte erwiesen ist, so gilt sie auch für jede cyklische Permutation der Reihe. Kehrt man in 2., 3., 4. die Buchstabenfolge um, macht also die Anordnungen

$$DCBA, ADCB, BADC, CBAD,$$

so wechseln sämtliche Flächen den Sinn, also bleibt die behauptete Gleichung auch für diese Permutationen richtig.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass sie auch für die Anordnungen $ABDC$ und $ACDB$ gilt; denn aus diesem gehen alle übrigen durch cyklische Vertauschung und Umkehrung hervor.

Da $ABD = DAB$, $BDC = -BCD$, $DCA = -CDA$, $CAB = ABC$, so folgt aus 2. durch Einsetzung dieser Werthe und Wechsel der Vorzeichen

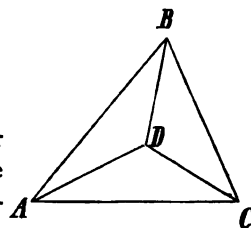
$$6. \quad ABD - BDC + DCA - CAB = 0.$$

Die Gleichung gilt also auch für die Reihenfolge $ABDC$.

Bemerkt man weiter, dass

$$ACB = -ABC, CBD = -BCD, BDA = DAB, DAC = CDA,$$

so folgt aus 2.

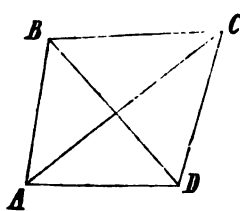


(M. 412.)

7. $ACB - CBD + BDA - DAC = 0$;
somit gilt die Gleichung auch für die Anordnung $ACBD$.

Wenn also einer von den vier Punkten $ABCD$ im Dreieck der drei anderen liegt, so gilt die Formel $ABC - BCD + CDA - DAB = 0$, gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Punkte mit A, B, C und D bezeichnet hat.

b) Liegt nicht einer der vier Punkte im Dreiecke der drei andern, so bilden sie in einer bestimmten Reihenfolge die Ecken eines Vierecks mit lauter concaven Winkeln. Ist $ABCD$ eine solche Reihenfolge, so gilt zunächst für die absoluten



(M. 413.)

Werthe der Dreiecke die Gleichung:

$$8. \quad ABC + ACD = ABD + BCD.$$

Da B und D auf verschiedenen Seiten von AC liegen, so sind ABC und ADC ungleichen Sinnes, mithin ABC und ACD gleichen Sinnes; da ferner B und C auf derselben Seite von AD liegen, so sind ACD und ABD gleichen Sinnes; und da endlich A und D auf derselben Seite von BC liegen, so sind ABC und DBC , also auch ABC und BCD , gleichen Sinnes; es sind also alle vier Dreiecke ABC, ACD, ABD und BCD gleichen Sinnes, und die Formel 8. gilt daher auch in Rücksicht auf die Vorzeichen.

Bemerkt man nun, dass $ACD = CDA, ABD = DAB$, so folgt aus 8.

$$9. \quad ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Die allgemeine Gültigkeit der Formel für jede Permutation der Buchstaben $ABCD$ wird nun anschliessend an 9. ebenso bewiesen, wie in a).

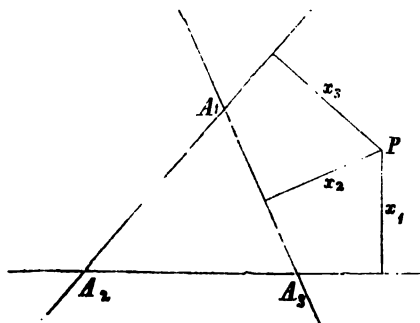
Für jede Lage von vier Punkten $ABCD$ einer Ebene und für jede Reihenfolge der Punkte gilt also die Gleichung der Flächen

$$ABC - BCD + CDA - DAB = 0.$$

Beachtet man, dass $BCD = DBC, CDA = -DCA$, so kann man hieraus noch die bemerkenswerthe Formel ziehen:

$$10. \quad DAB + DBC + DCA = ABC.$$

4. Als homogene Coordinaten eines Punktes in der Ebene verwenden wir die senkrechten Abstände des Punktes von den Seiten eines Dreiecks $A_1A_2A_3$. Das Dreieck heisst das Coordinatendreieck, die Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 werden als die Achsen bezeichnet. Die Abstände eines Punktes P von den drei Achsen A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 werden mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet.



(M. 414.)

Wir rechnen x_1 positiv, wenn P und A_1 auf derselben Seite von A_2A_3 liegen, im Gegenfalle negativ, und ebenso für die andern Coordinaten.

Rechnen wir das Dreieck $A_1A_2A_3$ positiv und die Strecken $A_2A_3 = g_1, A_3A_1 = g_2, A_1A_2 = g_3$ ebenfalls positiv, so ist, wenn ik eines der Paare 1 2, 2 3, 3 1 und ikl eine Permutation von 1 2 3 bezeichnet, das Dreieck PA_iA_k positiv oder negativ, je nachdem x_l positiv oder negativ ist; also ist auch rück-

$$PA_iA_k = \frac{1}{2}g_lx_l.$$

1.

$A_2 A_3$ gilt die Gleichung No. 3, 10:

$$A_2 A_3 + P A_3 A_1 = A_1 A_2 A_3.$$

1. ein und setzt $A_1 A_2 A_3 = \Delta$, so erhält man

$$-g_2 x_2 + g_3 x_3 = 2\Delta.$$

aten der Eckpunkte $A_1 A_2 A_3$ mit h_1, h_2, h_3 ,
ch 2Δ , und bemerkt dass $g_k : 2\Delta = 1 : h_k$, so

$$\frac{1}{h_2} x_2 + \frac{1}{h_3} x_3 = 1.$$

ig, die drei Strecken erfüllen müssen, wenn sie
s Punktes sein sollen.

2. Gleichung n ten Grades zwischen den Coordi-
st die Anzahl der veränderlichen Faktoren eines
als der Grad n , so multiplicire man dies Glied
ktor

$$\left(\frac{1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} \right)^n;$$

3. eine Folge von Gliedern n ten Grades hervor.
Gliedern der Gleichung, die nicht n ten Grades
ung aller Klammern lauter Glieder n ten Grades,
ne Gleichung durch eine homogene ersetzt.
n Systeme zu einem rechtwinkligen überzugehen
Gleichungen der Achsen des homogenen Systems
in Normalform gegeben an; dieselben seien

$$\cos \varphi_1 \cdot x + \sin \varphi_1 \cdot y - d_1 = 0,$$

$$\cos \varphi_2 \cdot x + \sin \varphi_2 \cdot y - d_2 = 0,$$

$$\cos \varphi_3 \cdot x + \sin \varphi_3 \cdot y - d_3 = 0.$$

$$\sin \varphi_1 \cdot x - \cos \varphi_1 \cdot y + d_1,$$

$$\sin \varphi_2 \cdot x - \cos \varphi_2 \cdot y + d_2,$$

$$\sin \varphi_3 \cdot x - \cos \varphi_3 \cdot y + d_3;$$

leichungen das Vorzeichen + oder - zu wählen,
nogene Coordinate des Nullpunkts positiv oder

ionsformeln für Punktcoordinaten zum Ueber-
ein rechtwinkeliges Coordinatensystem.

gen I., z. B. die erste und zweite, nach x und y
onsformeln zum Uebergange aus einem recht-
tem; dieselben haben die Gestalt:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma,$$

$$\alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma'.$$

rd eingeführt, indem man entweder die linken
macht (No. 4), oder indem man die Curven-
on homogen macht.

bergänge hat man also die Coordinaten des
neare Functionen der Coordinaten des neuen
erhält man Gleichungen in den neuen Coordi-
sind, wie die Gleichungen im ursprünglichen
Durch Transformation aus einem recht-

winkligen in ein homogenes System und umgekehrt, — und ebenso durch Transformation aus einem rechtwinkligen in ein anderes rechtwinkliges oder in ein schiefwinkliges und umgekehrt — wird der Grad einer Curvengleichung nicht geändert.

6. Als homogene Coordinaten einer Geraden wollen wir die Abstände der Geraden von den Ecken des Achsendreiecks, jeden dividirt durch den Abstand der Geraden von einem beliebig gewählten festen Punkte, verstehen.

Ist C der feste Punkt und r der Abstand einer Geraden T vom Punkte C , sind ferner r_1, r_2, r_3 die Abstände der Geraden T von den Eckpunkten A_1, A_2, A_3 des Achsendreiecks, so sind

$$1. \quad u_1 = \frac{r_1}{r}, \quad u_2 = \frac{r_2}{r}, \quad u_3 = \frac{r_3}{r}$$

die Coordinaten von T .

Die Coordinate u_k wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem A_k und C auf derselben Seite von T liegen, oder nicht.

Liegt C im Innern des Achsendreiecks, so sind bei den Geraden, die das Coordinatendreieck nicht schneiden, alle drei Coordinaten positiv; die Geraden, welche das Achsendreieck schneiden, haben eine oder zwei Coordinaten negativ.

Sind ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Coordinaten des Punktes C (d. i. die Abstände von den drei Achsen A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2), so sind die Coordinaten von

$$A_2A_3: \quad u_1 = \frac{h_2}{\rho_1}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

$$A_3A_1: \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{h_2}{\rho_2}, \quad u_3 = 0,$$

$$A_1A_2: \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{h_3}{\rho_3}.$$

Sind Q_1, Q_2, Q_3 die Schnittpunkte der Geraden T mit den Geraden A_1C, A_2C, A_3C , so ist

$$2. \quad \frac{A_1Q_1}{CQ_1} = \frac{r_1}{r} = u_1, \quad \frac{A_2Q_2}{CQ_2} = \frac{r_2}{r} = u_2, \quad \frac{A_3Q_3}{CQ_3} = \frac{r_3}{r} = u_3.$$

Hieraus folgt weiter

$$3. \quad \frac{CA_1}{CQ_1} = \frac{CQ_1 - A_1Q_1}{CQ_1} = 1 - \frac{A_1Q_1}{CQ_1} = 1 - u_1, \\ \frac{CA_2}{CQ_2} = \frac{CQ_2 - A_2Q_2}{CQ_2} = 1 - u_2, \quad \frac{CA_3}{CQ_3} = 1 - u_3.$$

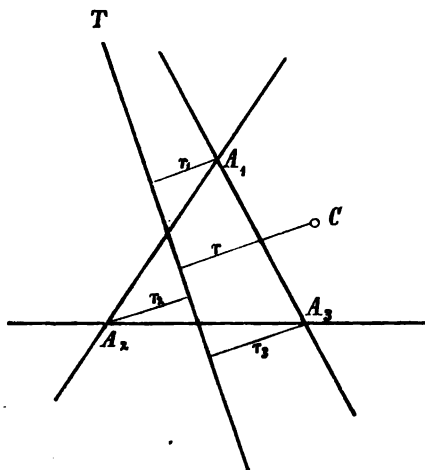
Ferner hat man:

$$\frac{CA_1A_2}{CQ_1Q_2} = \frac{CA_1}{CQ_1} \cdot \frac{CA_2}{CQ_2} = (1 - u_1)(1 - u_2).$$

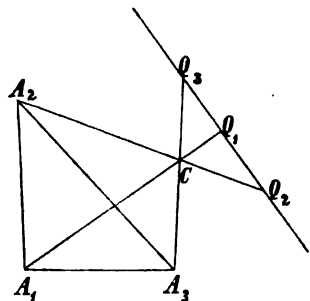
Nun ist $CA_1A_2 = \frac{1}{2}g_3\rho_3$, daher

$$4. \quad CQ_1Q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_3\rho_3}{(1 - u_1)(1 - u_2)}.$$

Ebenso findet man



(M. 415.)



(M. 416.)

$$5. \quad CQ_2Q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_1 \rho_1}{(1-u_1)(1-u_2)}, \quad CQ_3Q_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_2 \rho_2}{(1-u_3)(1-u_1)}.$$

Nun ist bekanntlich $CQ_1Q_2 + CQ_2Q_3 + CQ_3Q_1 = 0$.

Setzt man hier die Werthe 4. und 5. ein, so erhält man nach Multiplication mit $2(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)$

$$g_1 \rho_1 (1-u_1) + g_2 \rho_2 (1-u_2) + g_3 \rho_3 (1-u_3) = 0,$$

oder nach Auflösung der Klammern:

$$g_1 \rho_1 u_1 + g_2 \rho_2 u_2 + g_3 \rho_3 u_3 = g_1 \rho_1 + g_2 \rho_2 + g_3 \rho_3.$$

Ersetzt man die rechte Seite durch 2Δ , dividirt dann rechts und links durch 2Δ und bemerkt, dass $g_k : 2\Delta = 1 : h_k$, so entsteht schliesslich

$$6. \quad \frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3 = 1.$$

Dieser linearen Gleichung genügen also die drei Coordinaten jeder Geraden; und umgekehrt: Wenn drei Zahlen u_1, u_2, u_3 dieser Gleichung genügen, so sind sie die Coordinaten einer Geraden.

Mit Hülfe der Gleichung 6. kann man jede nicht homogene Gleichung der Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 homogen machen. Ist n der Grad der Gleichung und ist die Anzahl der veränderlichen Factoren eines Gliedes um δ Einheiten kleiner als n , so multiplicire man das Glied mit dem der Einheit gleichen Factor

$$\left(\frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3 \right)^\delta.$$

Hierdurch gehen aus dem Gliede eine Reihe von Gliedern vom Grade n hervor. Verfährt man so mit allen Gliedern der Gleichung, die den Grad n nicht erreichen, so geht aus der gegebenen Gleichung eine neue hervor, deren Glieder sämmtlich den Grad n haben, also ist die neue Gleichung homogen.

7. Sind $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \xi \eta$ die Coordinaten der Punkte $A_1 A_2 A_3 C$ in Bezug auf ein rechtwinkeliges System und uv die Coordinaten einer Geraden T in diesem System, so sind die Abstände der Punkte $A_1 A_2 A_3 C$ von T bekanntlich

$$1. \quad r_1 = \frac{x_1 u + y_1 v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad r_2 = \frac{x_2 u + y_2 v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad r_3 = \frac{x_3 u + y_3 v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$r = \frac{\xi u + \eta v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die homogenen Coordinaten von T zu:

$$2. \quad u_1 = \frac{r_1}{r} = \frac{x_1 u + y_1 v - 1}{\xi u + \eta v - 1},$$

$$u_2 = \frac{r_2}{r} = \frac{x_2 u + y_2 v - 1}{\xi u + \eta v - 1},$$

$$u_3 = \frac{r_3}{r} = \frac{x_3 u + y_3 v - 1}{\xi u + \eta v - 1}.$$

Eine homogene Gleichung n ten Grades in homogenen Liniencoordinaten kann mit Hülfe dieser Transformationsformeln in eine Gleichung in gewöhnlichen Liniencoordinaten transformirt werden. Jedes Glied der transformirten Gleichung enthält den Divisor $(\xi u + \eta v - 1)^n$. Lässt man diesen gemeinsamen Divisor aller Glieder weg, so bleibt eine (im Allgemeinen nicht homogene) Gleichung n ten Grades in u und v .

Um aus einem gewöhnlichen System zu einem homogenen überzugehen, lösen wir zwei der Gleichungen 2., z. B. die erste und zweite, nach u und v auf. Wir erhalten

$$u_1 (\xi u + \eta v - 1) = x_1 u + y_1 v - 1,$$

$$u_2 (\xi u + \eta v - 1) = x_2 u + y_2 v - 1,$$

und hieraus

$$\begin{aligned} (\xi u_1 - x_1) u + (\eta u_1 - y_1) v &= u_1 - 1, \\ (\xi u_2 - x_2) u + (\eta u_2 - y_2) v &= u_2 - 1. \end{aligned}$$

Dieses System hat die Auflösungen $u = R_1 : R$, $v = R_2 : R$, wenn R , R_1 , R_2 die Determinanten bedeuten:

$$\begin{aligned} R &= \begin{vmatrix} \xi u_1 - x_1 & \eta u_1 - y_1 \\ \xi u_2 - x_2 & \eta u_2 - y_2 \end{vmatrix}, & R_1 &= \begin{vmatrix} u_1 - 1 & \eta u_1 - y_1 \\ u_2 - 1 & \eta u_2 - y_2 \end{vmatrix} \\ R_2 &= \begin{vmatrix} \xi u_1 - x_1 & u_1 - 1 \\ \xi u_2 - x_2 & u_2 - 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die erste zerfällt in

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \xi u_1 & \eta u_1 \\ \xi u_2 & \eta u_2 \end{vmatrix} - \xi \begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{vmatrix} - \eta \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} y_1 \xi - \eta x_1 & u_1 \\ y_2 \xi - \eta x_2 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die zweite und dritte geben

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & \eta u_1 \\ u_2 & \eta u_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{vmatrix} - \eta \begin{vmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_1 - \eta & u_1 \\ y_2 - \eta & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \xi u_1 & u_1 \\ \xi u_2 & u_2 \end{vmatrix} - \xi \begin{vmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} x_1 - \xi & u_1 \\ x_2 - \xi & u_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Rechnet man diese Determinanten aus, so erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} 3. \quad u &= \frac{(y_2 - \eta) u_1 - (y_1 - \eta) u_2 + (y_1 - y_2)}{(\xi y_2 - x_2 \eta) u_1 - (\xi y_1 - x_1 \eta) u_2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)}, \\ v &= - \frac{(x_2 - \eta) u_1 - (x_1 - \xi) u_2 + (x_1 - x_2)}{(\xi y_2 - x_2 \eta) u_1 - (\xi y_1 - x_1 \eta) u_2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in eine Gleichung n ten Grades ein und multiplicirt die Gleichung alsdann mit $[(\xi y_2 - x_2 \eta) u_1 - (\xi y_1 - x_1 \eta) u_2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)]^n$, so erhält man eine ganze Function n ten Grades von u_1 und u_2 ; man kann dieselbe in der in No. 6 angegebenen Weise homogen machen und führt dabei die dritte Coordinate u_3 ein.

Bei der Transformation einer Gleichung in Linienkoordinaten aus einem rechtwinkligen System in ein homogenes und umgekehrt ändert sich also der Grad der Gleichung nicht.

8. Wenn eine Gerade T auf den Achsen $A_2 A_3$ und $A_1 A_3$ die Spuren S_1 und S_2 hat, so ist

$$\begin{aligned} 1. \quad A_3 S_2 : A_1 S_2 &= r_3 : r_1 = u_3 : u_1, \\ A_3 S_1 : A_2 S_1 &= r_3 : r_2 = u_3 : u_2. \end{aligned}$$

Die Coordinaten von S_1 seien $x_1' x_2' x_3'$, so ist

$$\begin{aligned} x_1' &= 0; \text{ für } x_2' \text{ und } x_3' \text{ hat man die Proportionen} \\ 2. \quad x_2' : h_2 &= A_3 S_1 : A_3 A_2, \\ x_3' : h_3 &= A_2 S_1 : A_2 A_3. \end{aligned}$$

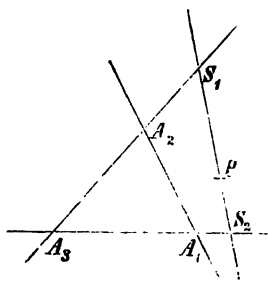
Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 3. \quad x_2' : h_2 &= A_3 S_1 : (A_3 S_1 + S_1 A_2) = 1 : \left(1 - \frac{u_2}{u_3}\right) = u_3 : (u_3 - u_2), \\ x_3' : h_3 &= A_2 S_1 : (A_2 S_1 + S_1 A_3) = 1 : \left(1 - \frac{u_3}{u_2}\right) = u_2 : (u_2 - u_3). \end{aligned}$$

Sind ferner $x_1'' x_2'' x_3''$ die Coordinaten von S_2 , so ist $x_2'' = 0$, und für x_1 und x_3 hat man

$$\begin{aligned} x_1'' : h_1 &= A_3 S_2 : A_3 A_1, \\ x_3'' : h_3 &= A_1 S_2 : A_1 A_3, \end{aligned}$$

woraus folgt



(M. 417.)

$$(S_1 A_1) = 1 : \left(1 - \frac{u_1}{u_3}\right) = u_3 : (u_3 - u_1)$$

$$(S_2 A_2) = 1 : \left(1 - \frac{u_2}{u_3}\right) = u_3 : (u_3 - u_2).$$

S_1 und S_2 ergeben sich hiernach zu:

$$\frac{u_3}{u_3 - u_2} \cdot h_2, \quad x_2' = \frac{u_2}{u_3 - u_2} \cdot h_2,$$

$$, \quad x_2'' = 0, \quad x_2''' = \frac{u_1}{u_3 - u_1} \cdot h_2.$$

Geraden T , und theilt er die Strecke $S_1 S_2$ im Verhältniss der Coordinaten von P

$$\lambda_1 : \lambda_2, \quad x_2 = \frac{\lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2''}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Einsetzen von x_2', x_2'', x_2''' ein, so erhält man

$$\frac{1}{u_1}, \quad \text{also} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{u_3 - u_1}{u_3} \cdot \frac{x_1}{h_1},$$

$$\frac{2}{u_2}, \quad \text{,,} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{u_3 - u_2}{u_3} \cdot \frac{x_2}{h_2},$$

$$\frac{1}{u_3} \cdot h_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{u_1}{u_3 - u_1} \cdot h_2.$$

für $\lambda_1 : (\lambda_1 + \lambda_2)$ und $\lambda_2 : (\lambda_1 + \lambda_2)$ aus 5. und

$$- \frac{u_2 h_2 x_2}{u_3 h_2} - \frac{u_1 h_2 x_1}{u_3 h_1}.$$

reducirt auf Null und ordnet, so entsteht die

$$\frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_1} u_1 x_1 = 0.$$

gefunden: Wenn ein Punkt P und eine Gerade T (wenn der Punkt auf der Geraden liegt), so sind die Coordinaten des Punktes und der Geraden die Gleichung

$$\frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_1} u_1 x_1 = 0.$$

Umgekehrt gilt: Wenn die Coordinaten eines Punktes und einer Geraden der

Gleichung $\frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_1} u_1 x_1 = 0$ genügen, so liegt der Punkt auf der Geraden.

Für gegebene Werthe, so ist die Gleichung

$$\frac{1}{h_2} u_2 x_2 + \frac{1}{h_1} u_1 x_1 = 0$$

die Gleichung der Geraden T . Die Gleichung

$$\frac{u_2}{h_2} \cdot x_2 + \frac{u_1}{h_1} \cdot x_1 = 0.$$

Wenn die Coordinaten des Punktes P gegeben, so enthält die Gleichung der Geraden T , welche durch P geht, die Gleichung des Punktes P ist daher

$$\frac{x_2}{h_2} \cdot u_2 + \frac{x_1}{h_1} \cdot u_1 = 0.$$

ieraus weiter: Jede homogene

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$
einer Geraden.

dieser Geraden finden sich aus d
hst

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = a_1 : a_2 : a_3.$$

zu noch die Gleichung No. 6, 6

$$\frac{\rho_1 u_1}{h_1} + \frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1,$$

$$\frac{a_1}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2} \cdot h_1, \quad u_2 = \frac{a_2}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3}$$

$$u_3 = \frac{a_3}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} \cdot h_3$$

ch: Jede homogene lineare
- $a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$ ist die Glei
ten dieses Punktes hat man die F

$$\frac{x_1}{h_1} : \frac{x_2}{h_2} : \frac{x_3}{h_3} = a_1 : a_2 : a_3$$

$$4, 4 \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1, \text{ wo}$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot h_1, \quad x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot h_2,$$

niss der Entfernungen der unendl
icht unendlich fern sind, ist der
ie Gerade hat also die Coordin
der Gleichung der unendlich fern
9, 5:

$$\frac{a_1 h_1}{\rho_1 a_1} = u_1 = 1, \quad \frac{a_2 h_2}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3}$$

$$\frac{a_3 h_3}{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3} = u_3 = 1$$

hungen folgt zunächst $a_1 h_1 = a$
same Werth dieses Produkts mit m

$$x_1 = \frac{m}{h_1}, \quad a_2 = \frac{m}{h_2}, \quad a_3 = \frac{m}{h_3}$$

eichung der unendlich ferner

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 0.$$

dass diese Gleichung mit der f

$$+ \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1 \text{ nur für unen}$$

bestehen kann.

den Formeln No. 9, 6: Die Gle

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

ines unendlich fernen Punkt

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Unter dieser Bedingung sind also alle Geraden, deren Coordinaten der Gleichung $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$ genügen, einer festen Richtung parallel. Die Richtung ergibt sich aus dem Verhältniss der Coordinaten des auf ihr liegenden unendlich fernen Punktes $x_1 : x_2 : x_3 = a_1 h_1 : a_2 h_2 : a_3 h_3$.

Zieht man durch A_3 eine Parallele G zu dieser Richtung, so geht sie durch diesen unendlich fernen Punkt; da nun für alle Punkte von G das Verhältniss $x_1 : x_2$ constant ist, so folgt die Gleichung dieser Parallelen zu

$$x_1 : x_2 = a_1 h_1 : a_2 h_2.$$

11. Die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden

$T \equiv a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$ und $T'' \equiv a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} & a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0, \\ & a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0, \\ 1. \quad & \frac{1}{h_1} x_1 + \frac{1}{h_2} x_2 + \frac{1}{h_3} x_3 = 1. \end{aligned}$$

Die Coordinaten der Geraden, welche durch die beiden Punkte geht $P \equiv a_1' u_1 + a_2' u_2 + a_3' u_3 = 0$, $P'' \equiv a_1'' u_1 + a_2'' u_2 + a_3'' u_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} & a_1' u_1 + a_2' u_2 + a_3' u_3 = 0, \\ & a_1'' u_1 + a_2'' u_2 + a_3'' u_3 = 0, \\ 2. \quad & \frac{\rho_1}{h_1} u_1 + \frac{\rho_2}{h_2} u_2 + \frac{\rho_3}{h_3} u_3 = 1. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte P und P'' geht, deren Coordinaten $x_1' x_2' x_3'$, $x_1'' x_2'' x_3''$ sind, ergibt sich wie in § 5 No. 3 in Determinantenform zu

$$3. \quad T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des Punktes, durch den die Geraden T' und T'' gehen, deren Coordinaten $u_1' u_2' u_3'$ und $u_1'' u_2'' u_3''$ sind, ist

$$4. \quad P \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

16. Wenn drei Gerade $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ durch einen Punkt gehen, so giebt es (§ 5 No. 11) drei Zahlen m_1 , m_2 , m , welche die Identität herstellen

$$mT \equiv m_1 T_1 + m_2 T_2.$$

Ist nun $T_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$, $T_2 \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$, so ist $mT \equiv (m_1 a_1 + m_2 b_1) x_1 + (m_1 a_2 + m_2 b_2) x_2 + (m_1 a_3 + m_2 b_3) x_3$.

Die Coordinaten von T sind daher:

$$u_1 = \frac{m_1 a_1 + m_2 b_1}{\sigma} h_1, \quad u_2 = \frac{m_1 a_2 + m_2 b_2}{\sigma} h_2, \quad u_3 = \frac{m_1 a_3 + m_2 b_3}{\sigma} h_3,$$

$$\sigma = (m_1 a_1 + m_2 b_1) \rho_1 + (m_1 a_2 + m_2 b_2) \rho_2 + (m_1 a_3 + m_2 b_3) \rho_3.$$

Die Coordinaten von T_1 und von T_2 sind

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{a_1 h_1}{\sigma'}, & u_2' &= \frac{a_2 h_2}{\sigma'}, & u_3' &= \frac{a_3 h_3}{\sigma'}, & \sigma' &= a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_3; \\ u_1'' &= \frac{b_1 h_1}{\sigma''}, & u_2'' &= \frac{b_2 h_2}{\sigma''}, & u_3'' &= \frac{b_3 h_3}{\sigma''}, & \sigma'' &= b_1 \rho_1 + b_2 \rho_2 + b_3 \rho_3. \end{aligned}$$

Daher hat man $u_x = \frac{m_1 \sigma' u_x' + m_2 \sigma'' u_x''}{\sigma}$; $x = 1, 2, 3$.

Nun ist $\sigma = m_1\sigma' + m_2\sigma''$, also folgt der Satz: Die Coordinaten jeder Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden T_1 und T_2 geht, ergeben sich aus den Coordinaten dieser Geraden nach den Formeln

$$u_x = \frac{\lambda_1 u_x' + \lambda_2 u_x''}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad x = 1, 2, 3.$$

Gehen vier Gerade T_1, T_2, T_3 und T_4 durch einen Punkt, und sind die Coordinaten von T_3 und T_4

$$u_{x3} = \frac{\lambda_1 u_x' + \lambda_2 u_x''}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad u_{x4} = \frac{\mu_1 u_x' + \mu_2 u_x''}{\mu_1 + \mu_2}, \quad x = 1, 2, 3,$$

so überzeugt man sich leicht (vergl. § 6, No. 6), dass das Doppelverhältniss der vier Geraden den Werth hat $(T_1 T_2 T_3 T_4) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Ist insbesondere

$$u_{x3} = \frac{\lambda_1 u_x' + \lambda_2 u_x''}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad u_{x4} = \frac{\lambda_1 u_x' - \lambda_2 u_x''}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad x = 1, 2, 3,$$

so sind die Geraden T_1, T_2, T_3, T_4 harmonisch.

12. A. Die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung in homogenen Punktcoordinaten ist im Allgemeinen

$$1. \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Geht die Curve durch den Eckpunkt A_3 des Coordinatendreiecks, so wird die Gleichung von den Coordinaten $x_1 = x_2 = 0, x_3 = h_3$ dieses Punktes erfüllt; es ist also $a_{33} = 0$.

Ein Kegelschnitt, der dem Achsendreieck umschrieben ist, hat daher die Gleichung

$$2. \quad a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0.$$

B. Die Gleichung einer Curve zweiter Klasse in Liniencoordinaten ist im Allgemeinen

$$3. \quad a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + a_{22}u_2^2 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0.$$

Wird die Curve von einer Achse, z. B. von A_1A_2 , berührt, so genügen der Gleichung die Coordinaten von A_1A_2 , nämlich $u_1 = u_2 = 0, u_3 = h_3 : \rho_3$; folglich ist $a_{33} = 0$.

Ein Kegelschnitt, der dem Achsendreieck eingeschrieben ist, hat daher die Gleichung

$$4. \quad a_{12}u_1u_2 + a_{13}u_1u_3 + a_{23}u_2u_3 = 0.$$

13. A. Die Coordinaten der Punkte, in welchen der Kegelschnitt $K \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$ die Achse A_1A_2 schneidet, bestimmen sich aus den drei Gleichungen

$$x_3 = 0, \quad K = 0, \\ 1. \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Setzt man aus der ersten in die zweite ein, so ergibt sich

$$2. \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \\ \text{und aus dieser Gleichung folgt das Verhältniss der Coordinaten } x_1 : x_2 \text{ der beiden Schnittpunkte.}$$

Wenn der Kegelschnitt K die Achse A_1A_2 berührt, so hat die Gleichung 2. zwei gleiche Wurzeln; die Bedingung hierfür ist

$$3. \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$$

Soll A_2 der Berührungspunkt sein, so muss die Gleichung 2. die Wurzeln

$= a_{22} = 0$ sein. Berührt der Kegelschnitt A_3 , so ist $a_{13} = a_{33} = 0$. Die Gleichung eines Kegelschnitts, der die Achsen A_1A_2 und A_1A_3 in A_2 und A_3 berührt, ist daher

$$4. \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

In jedem Kegelschnitt hat also das Produkt der Abstände jedes Punktes von zwei Tangenten des Kegelschnitts (A_1A_2 und A_1A_3) zum Quadrat des Abstandes von der Berührungssehne (A_2A_3) ein constantes Verhältniss ($-a_{11} : 2a_{23}$).

B. Die Coordinaten der durch A_3 gehenden Tangenten eines Kegelschnitts $\mathfrak{K} = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + a_{22}u_2^2 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0$ ergeben sich aus den Gleichungen:

$$u_3 = 0, \quad \mathfrak{K} = 0,$$

$$5. \quad \frac{\rho_1 u_1}{h_1} + \frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1.$$

Setzt man aus der ersten in die zweite ein, so ergibt zur Bestimmung des Verhältnisses der Coordinaten $u_1 : u_2$ der gesuchten Tangenten die quadratische Gleichung

$$6. \quad a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 = 0.$$

Geht \mathfrak{K} durch A_3 , so fallen beide Tangenten in eine zusammen, die Gleichung 6. hat daher zwei gleiche Wurzeln. Die Bedingung hierfür ist

$$7. \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$$

Soll A_3A_1 die Tangente in A_3 sein, so müssen beide Wurzeln der Gleichung 6. $u_1 = 0$ sein, es ist also $a_{12} = a_{22} = 0$.

Geht der Kegelschnitt auch durch A_2 und berührt A_1A_2 , so ist $a_{12} = a_{33} = 0$.

Die Gleichung eines Kegelschnitts in Liniencoordinaten, der die Achsen A_1A_2 und A_1A_3 in A_2 und A_3 berührt, ist also: $a_{11}u_1^2 + 2a_{23}u_2u_3 = 0$.

Multipliziert man diese Gleichung mit r^2 , so ergibt sich

$$a_{11}r_1^2 + 2a_{23}r_2r_3 = 0.$$

Für jede Tangente eines Kegelschnitts hat also das Produkt der Abstände von zwei Punkten (A_2 und A_3) zum Quadrate des Abstandes vom Schnittpunkte (A_1), der durch diese beiden Punkte gehenden Tangenten des Kegelschnitts ein constantes Verhältniss.

§ 13. Tangente, Tangentialpunkt, Polare und Pol an Curven zweiten Grades.

1. Wir verbinden einen beliebigen Punkt \mathfrak{P} der Ebene, der die Coordinaten x_1, x_2, x_3 hat, mit einem andern Punkte Π , dessen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind, durchschneiden mit der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ die Curve zweiten Grades

1. $f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$, und fragen nach dem Verhältnisse, in welchem die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von den beiden Schnittpunkten getheilt wird.

Der Punkt P der Strecke $\mathfrak{P}\Pi$, welcher dieselbe im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, hat bekanntlich die Coordinaten

$$2. \quad x_1 = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \xi_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x_2 = \frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 \xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x_3 = \frac{\lambda_1 x_3 + \lambda_2 \xi_3}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Setzt man diese Werthe in 1. ein, so erhält man nach Multiplication mit $(\lambda_1 + \lambda_2)^2$:

$$3. a_{11}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \xi_1)^2 + 2a_{12}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \xi_1)(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 \xi_2) + 2a_{13}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \xi_1)(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 \xi_3) + 2a_{23}(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 \xi_2)(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 \xi_3) + a_{33}(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 \xi_3)^2 = 0.$$

Löst man, die Klammern auf und ordnet, so erhält man:

$$4. \quad f_r \lambda_1^2 + 2(f_{1r} \xi_1 + f_{2r} \xi_2 + f_{3r} \xi_3) \lambda_1 \lambda_2 + f_\xi \lambda_2^2 = 0.$$

Hierbei ist

$$5. \quad f_r \equiv a_{11} r_1^2 + 2a_{12} r_1 r_2 + 2a_{13} r_1 r_3 + a_{22} r_2^2 + 2a_{23} r_2 r_3 + a_{33} r_3^2,$$

$$6. \quad f_\xi \equiv a_{11} \xi_1^2 + 2a_{12} \xi_1 \xi_2 + 2a_{13} \xi_1 \xi_3 + a_{22} \xi_2^2 + 2a_{23} \xi_2 \xi_3 + a_{33} \xi_3^2,$$

$$7. \quad f_{1r} \equiv a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + a_{13} r_3,$$

$$8. \quad f_{2r} \equiv a_{12} r_1 + a_{22} r_2 + a_{23} r_3,$$

$$9. \quad f_{3r} \equiv a_{13} r_1 + a_{23} r_2 + a_{33} r_3.$$

Multipliziert man die Ausdrücke 7. 8. 9. der Reihe nach mit ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , und addirt dann die Glieder columnenweis, so erhält man den Coefficienten von $2\lambda_1 \lambda_2$ der Gleichung 4. in anderer Ordnung, nämlich geordnet nach den Coordinaten des Punktes \mathfrak{P} ; man erhält die Identität

$$10. \quad f_{1r} \xi_1 + f_{2r} \xi_2 + f_{3r} \xi_3 \equiv f_{1\xi} r_1 + f_{2\xi} r_2 + f_{3\xi} r_3, \text{ wobei}$$

$$11. \quad f_{1\xi} \equiv a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3,$$

$$12. \quad f_{2\xi} \equiv a_{12} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{23} \xi_3,$$

$$13. \quad f_{3\xi} \equiv a_{13} \xi_1 + a_{23} \xi_2 + a_{33} \xi_3.$$

2. Liegt der Punkt \mathfrak{P} auf der Curve, so befriedigen die Coordinaten r_x die Gleichung $f = 0$, in der Gleichung 4. verschwindet also der Coefficient von λ_1^2 und es verbleibt die Gleichung

$$1. \quad 2(f_{1r} \xi_1 + f_{2r} \xi_2 + f_{3r} \xi_3) \lambda_1 \lambda_2 + f_\xi \lambda_2^2 = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\lambda_2 = 0$; ein Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ mit der Curve theilt also $\mathfrak{P}\Pi$ im Verhältniss Null; dieser Punkt ist \mathfrak{P} . Der zweite Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve bestimmt sich aus der Gleichung 1., nachdem der Faktor λ_2 unterdrückt worden ist

$$3. \quad 2(f_{1r} \xi_1 + f_{2r} \xi_2 + f_{3r} \xi_3) \lambda_1 + f_\xi \lambda_2 = 0.$$

Soll auch dieser zweite Schnittpunkt mit \mathfrak{P} zusammenfallen, soll also die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ die Curve tangiren, so muss sich diese Gleichung auf $\lambda_2 = 0$ reduciren. Dann müssen die Coordinaten von Π der Bedingung genügen

$$4. \quad f_{1r} \xi_1 + f_{2r} \xi_2 + f_{3r} \xi_3 = 0.$$

Diese Gleichung ist linear für die Coordinaten von Π , ist also die Gleichung einer Geraden. Diese Gerade geht durch \mathfrak{P} , denn es ist, wie man sich durch Ausrechnung leicht überzeugt,

$$5. \quad f_{1r} r_1 + f_{2r} r_2 + f_{3r} r_3 = f_r,$$

also gleich Null, da \mathfrak{P} auf $f = 0$ liegt.

Hieraus folgt, dass durch jeden Punkt \mathfrak{P} einer Curve zweiten Grades eine Tangente der Curve geht, und dass

$$6. \quad f_{1r} x_1 + f_{2r} x_2 + f_{3r} x_3 = 0$$

die Gleichung der Tangente im Punkte \mathfrak{P} an die Curve $f = 0$ ist.

3. Die Tangente wird nur dann unbestimmt, wenn es einen Punkt \mathfrak{P} auf der Curve giebt, für welchen zugleich

$$1. \quad f_{1r} = f_{2r} = f_{3r} = 0.$$

Denn dann verschwindet für diesen Punkt der Coefficient von λ_1 in der Gleichung No. 2, 3 unabhängig von ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 ; also haben dann die Verbindungsgeraden von \mathfrak{P} mit allen Punkten Π der Ebene, d. i. alle durch \mathfrak{P} gehenden Geraden, mit der Curve zwei in \mathfrak{P} zusammenfallende Punkte gemein.

Ein Punkt, für dessen Coordinaten $f_{1r} = f_{2r} = f_{3r} = 0$ liegt nach No. 2, 5 auf der Curve $f = 0$. Nun ist

$$f_{1r} \equiv a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + a_{13} r_3,$$

$$f_{2r} \equiv a_{12} r_1 + a_{22} r_2 + a_{23} r_3,$$

$$f_{3r} \equiv a_{13} r_1 + a_{23} r_2 + a_{33} r_3.$$

, r_3 , für welches diese drei homogenen identisch sind, so verschwindet die Determinante Δ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Eigenschaft hat, dass jede durch ihn hindurchgehende Gerade den Punkt zusammenfallenden Punkten enthält.

Determinante Δ , so besitzt die Curve einen Punkt.

Werte bestimmen sich aus zweien der drei

$$\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} = 1.$$

Werte werden unbestimmt, wenn $r_1 = r_2 = 0$ nicht zwei unabhängige sind,

sondern r_1, r_2 einander proportional sind, wenn also

$$a_{11} : a_{12} = a_{21} : a_{22} : a_{31} : a_{32}.$$

$$r_1 = \kappa a_{11} = \kappa^2 a_{11}, \quad a_{21} = \kappa a_{11}. \quad \text{Setzt}$$

$$r_2 = \lambda a_{11} = \kappa \lambda a_{11}, \quad a_{31} = \lambda a_{11} = \lambda^2 a_{11}.$$

Ein Function f ein, so erhalten alle Glieder den Factor f bleibt:

$$x_1^2 + \kappa^2 x_2^2 + 2\kappa\lambda x_1 x_2 + \lambda^2 x_3^2,$$

ist eine lineare Function, die Gleichung einer Geraden.

Alle Subdeterminanten von Δ . Wenn Subdeterminanten verschwinden, so ist der Punkt P verbunden mit einem andern auf Π , so ist in No. 1, 4 ausser $f_1 = 0$ und auch der Coefficient von λ_1^2 , nämlich f_1 , identisch, und wird für alle Werthe von λ_1 daher mit allen ihren Punkten der Curve

und nicht mit Π zusammenfällt, hat mit Π gemein, der nicht auf Π liegt. Verbindet man auch Π_1 (ebenso wie Π) einen Theil

von Π oder Π_1 gelegen sind, kann die Curve in einem Punkt Q der Ebene kann man immer Gerade Γ mit Π_1 schneiden. Liege nun Q auf der Curve, so haben die drei Punkte mit der Curve gemein, eine Curve zweiter Ordnung von einer Geraden in

zweiter Ordnung einen Doppelpunkt, so zerfällt die Curve in eine Gerade Γ und einen Punkt von Γ als Doppelpunkt zu betrachten, so ist ihr Schnittpunkt der

4. Es erübrigt nun noch, im Falle $\Delta = 0$ die beiden linearen Faktoren herzustellen, in welche die Function f zerfällt.

Sind dieselben $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ und $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, so hat man die Identität $f \equiv (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$.

Aus denselben folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & b_1c_1 = a_{11}, \quad b_2c_2 = a_{22}, \quad b_3c_3 = a_{33}, \\ 2. \quad & b_1c_2 + b_2c_1 = 2a_{12}, \quad b_1c_3 + b_3c_1 = 2a_{13}, \quad b_2c_3 + b_3c_2 = 2a_{23}. \end{aligned}$$

Aus 1. zieht man, wenn x, λ, μ noch unbestimmte Faktoren bedeuten

$$\begin{aligned} 3. \quad & b_1 = x\sqrt{a_{11}}, \quad b_2 = \lambda\sqrt{a_{22}}, \quad b_3 = \mu\sqrt{a_{33}}, \\ & c_1 = \frac{1}{x}\sqrt{a_{11}}, \quad c_2 = \frac{1}{\lambda}\sqrt{a_{22}}, \quad c_3 = \frac{1}{\mu}\sqrt{a_{33}}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in 2. ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4. \quad & \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x}\right)\sqrt{a_{11}a_{22}} = 2a_{12}, \\ 5. \quad & \left(\frac{x}{\mu} + \frac{\mu}{x}\right)\sqrt{a_{11}a_{33}} = 2a_{13}, \\ 6. \quad & \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda}\right)\sqrt{a_{22}a_{33}} = 2a_{23}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 4. und 5. genügen, um die Verhältnisse $\frac{\lambda}{x}$ und $\frac{\mu}{x}$ zu bestimmen. Man erhält

$$\begin{aligned} 7. \quad \frac{\lambda}{x} &= \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} (a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}), \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} (a_{12} \mp \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) \\ 8. \quad \frac{\mu}{x} &= \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} (a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}), \quad \frac{x}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} (a_{13} \mp \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}). \end{aligned}$$

Setzt man dies in 3. ein, so erhält man die Zerfällung der Function f :

$$\begin{aligned} 9. \quad f &= [\sqrt{a_{11}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})x_2 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} (a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}})x_3] \\ &[\sqrt{a_{11}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})x_2 + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} (a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}})x_3]. \end{aligned}$$

Hierbei mögen $\sqrt{a_{11}}$ und $\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$ positiv gerechnet werden.

Ueber das Vorzeichen von $\sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$ ist dann so zu verfügen, dass das Produkt der beiden linearen Faktoren mit der Function f übereinstimmt. Führt man die Multiplication aus, so erhält man unabhängig davon, ob man für $\sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}$ in beiden Faktoren den positiven oder den negativen Werth ansetzt, folgende Glieder $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$, übereinstimmend mit f ; es handelt sich also bloss noch darum, den Coefficienten von x_2x_3 im Produkt der linearen Faktoren mit $2a_{23}$ zu vergleichen. Dieser Coefficient ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} (a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \cdot (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} (a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}) \\ & = \frac{1}{a_{11}} (2a_{12}a_{13} - 2\sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})}). \end{aligned}$$

Der Radicand giebt ausgerechnet

$$10. \quad a_{12}^2a_{13}^2 - a_{13}^2a_{11}a_{22} - a_{12}^2a_{11}a_{33} + a_{11}^2a_{22}a_{33}.$$

nd Pol an Curven

0, so erhält m.
 $-a_{33}a_{12}^2 + 2a_{13}a_{23}a_{12}$
 das Produkt von
 $a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2 -$
 $a_{11}a_{23})^2$.

$a_{13} - a_{11}a_{23})$

bereinstimmt, m
 uss setzen

$-a_{11}a_{23}$ (und nic
 muss also m

Untersuchungen

lurchschneiden
 der Curve zweit

$\gamma = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$
 die durch den Schnittpunkt von \mathfrak{L} und T gehen.

Die Coordinaten von \mathfrak{L} seien u_1, u_2, u_3 ; die von T
 Coordinaten von T ergeben sich dann durch die Formeln

$$u_x = \frac{\lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x = 1, 2, 3.$$

Setzt man dies in φ ein und ordnet, so erhält man
 Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ die Gleichung

$$1. \quad \varphi_u \lambda_1^2 + 2(\varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3) \lambda_1 \lambda_2 + \varphi_v \lambda_2^2 = 0.$$

Hierbei ist

$$2. \quad \varphi_u = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + a_{22}u_2^2 + 2$$

$$3. \quad \varphi_v = a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + 2a_{13}v_1v_3 + a_{22}v_2^2 + 2$$

$$4. \quad \varphi_{1u} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3,$$

$$5. \quad \varphi_{2u} = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3,$$

$$6. \quad \varphi_{3u} = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3.$$

Multiplirt man 4., 5., 6. der Reihe nach mit v_1, v_2, v_3 ,
 man die Identität

$$7. \quad \varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3 = \varphi_{1v}u_1 + \varphi_{2v}u_2 + \varphi_{3v}u_3$$

$$8. \quad \varphi_{1v} = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3,$$

$$9. \quad \varphi_{2v} = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3,$$

$$10. \quad \varphi_{3v} = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3.$$

6. Berührt die Gerade \mathfrak{L} die Curve φ , so ist $\varphi_u = 0$;
 geht daher über in

$$1. \quad 2(\varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3) \lambda_1 \lambda_2 + \varphi_v \lambda_2^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $\lambda_2 = 0$; die dazu ge
 mit \mathfrak{L} zusammen. Die zweite Lösung der quadratischen
 sich aus der linearen Gleichung

$$2. \quad 2(\varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3) \lambda_1 + \varphi_v \lambda_2 = 0.$$

Soll auch diese Lösung mit \mathfrak{L} zusammenfallen, so r
 gewählt werden, dass der Coefficient von λ_1 verschwindet,

$$3. \quad \varphi_{1u}v_1 + \varphi_{2u}v_2 + \varphi_{3u}v_3 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Punktes P , derselbe $\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 = \varphi_u$, und dies verschwindet berührt. Mithin ist $\varphi_1 u v_1 + \varphi_2 u v_2 + \varphi_3 u v_3 = 0$ die Curventangente u_1, u_2, u_3 gelegenen Tangenti.

7. Der Punkt $\varphi_1 u v_1 + \varphi_2 u v_2 + \varphi_3 u v_3 = 0$ ist bestimmt; im Allgemeinen giebt es also auf jeder Curve einen Punkt, der so gelegen ist, dass ausser \mathfrak{Z} sich kein andrer Punkt legen lässt. Der Tangentialpunkt wird nur für eine Curve bestimmt, für deren Coordinaten die Coefficienten φ_{1u} des Tangentialpunktes verschwinden; giebt es eine Curve, für der φ_{2u} verschwinden, so ist dieselbe auch Curventangente, $\varphi_u = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3$ verschwindet.

Soll es ein Werthsystem u_1, u_2, u_3 geben, für welches

$$\varphi_{1u} = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3$$

$$\varphi_{2u} = \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{23} u_3$$

$$\varphi_{3u} = \alpha_{31} u_1 + \alpha_{32} u_2 + \alpha_{33} u_3$$

so muss die Determinante D dieser Gleichungen verschwinden

$$1. \quad D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$2. \quad D = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{11}$$

Eine Gerade, die so gelegen ist, dass durch jeden Punkt derselben zusammenfallende Tangenten einer Curve φ gehen, heisst eine Curve. Die Bedingung dafür, dass eine Curve Doppeltangente hat, ist also $D = 0$. Die Coordinaten der Doppeltangente bestimmen sich aus zwei der Gleichungen

$$\text{und aus} \quad \frac{\varphi_1 u_1}{h_1} + \frac{\varphi_2 u_2}{h_2} + \frac{\varphi_3 u_3}{h_3} = 1$$

Die Coordinaten der Doppeltangente werden durch die sämtlichen Subdeterminanten von D verschwinden, d. h.

$$1. \quad \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} = \alpha_{21} : \alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{31} : \alpha_{32} : \alpha_{33}$$

Wie in No. 3 wird bewiesen, dass φ alsdann eine Function ist. Die Curve besteht daher aus zwei zusammenfallenden Tangenten.

Verschwindet D , ohne dass sämtliche Subdeterminanten von D verschwinden, so ist die Doppeltangente \mathfrak{Z} eindeutig bestimmt. Legt man durch den Punkt der Doppeltangente \mathfrak{Z} und einer andern Curve T eine Gerade mit den Coordinaten

$$u_x = \frac{\lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x = 1, 2$$

so ist auch T eine Tangente der Curve, denn in der

$\varphi_u \lambda_1^2 + 2(\varphi_1 u v_1 + \varphi_2 u v_2 + \varphi_3 u v_3) \lambda_1 \lambda_2 + \varphi_v \lambda_2^2$ verschwinden φ_u, φ_v und der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$, welcher \mathfrak{Z} berührt und \mathfrak{Z} Doppeltangente ist; also ist die Gerade T eine Tangente der Curve.

Der Schnittpunkt \mathfrak{P} von \mathfrak{Z} und T bildet daher die Curve. Durch irgend einen Punkt der Geraden T geht auch eine Tangente T' ; es lässt sich nun für den Schnittpunkt \mathfrak{P} von T und T' beweisen, dass jede durch \mathfrak{P} gehende Gerade $\varphi = 0$ genügt, dass er also ebenfalls einen Tangentialpunkt hat.

n Curven zweite

$$\begin{vmatrix} x & \\ x & \\ s & \end{vmatrix} + f_x \cdot f_{1x} /$$

$$x f_x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

, da jede id
ie Werthe für
nanten. Man

$$\begin{vmatrix} a_{23} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} \\ \\ \end{vmatrix}$$

zwei identis
links stehende
erte Determin.
weite, dritte u

$$) = - \Delta \cdot f_x^3$$

7 dass die Gl

Curve zweiter
lt man durch
te geht, wenn
der Curve

$$\lambda_2 + \varphi_2 \lambda_2^2 +$$

ingung hierfür
 $v_3)^2 = 0.$
rhält man: Γ
 $(u_3 + u_3)^3 = 1$
kte der Cu

d bezeichnet c

$$2\beta_{23}u_2u_3 +$$

ie Determinant
 $= 0.$

e mit einem a
chen den Coc
eiter Ordnung
ionisch liegen
, deren Coord
n:

$$\frac{\xi_x}{\tau}; \quad x = 1,$$

hältnisse $\lambda_1 : \lambda$
 λ_2 für die Sc

Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve $f = 0$ folgen aus der Gleichung

$$f_x \lambda_1^2 + 2(f_{1x} \xi_1 + f_{2x} \xi_2 + f_{3x} \xi_3) \lambda_1 \lambda_2 + f_x \lambda_2^2 = 0.$$

Soll diese Gleichung entgegengesetzt gleiche Wurzeln haben, so muss sie rein quadratisch sein, es muss also der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$ verschwinden.

Die Bedingung dafür, dass die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve zweiter Ordnung $f = 0$ harmonisch zu \mathfrak{P} und Π sind, ist daher

$$1. \quad f_{3x} \xi_1 + f_{2x} \xi_2 + f_{1x} \xi_3 = f_{1x} \xi_1 + f_{2x} \xi_2 + f_{3x} \xi_3 = 0.$$

Zwei so gelegene Punkte heissen conjugirt in Bezug auf die Curve zweiter Ordnung.

B. Unter conjugirten Geraden einer Curve zweiten Grades versteht man zwei Gerade, die zu den durch ihren Schnittpunkt gehenden beiden Tangenten harmonisch sind.

Sind \mathfrak{Z} und T zwei Gerade, so sind die Coordinaten der durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten einer Curve zweiter Klasse

$$u_x = \frac{\lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad x = 1, 2, 3,$$

wenn sich λ_1 und λ_2 aus der Gleichung bestimmen

$$2. \quad \varphi_u \lambda_1^2 + 2(\varphi_{1u} v_1 + \varphi_{2u} v_2 + \varphi_{3u} v_3) \lambda_1 \lambda_2 + \varphi_v \lambda_2^2 = 0.$$

Sind \mathfrak{Z} und T conjugirt, so liefern die beiden Wurzeln der Gleichung 2. harmonisch zu \mathfrak{Z} und T conjugirte Gerade, sind also entgegengesetzt gleich, also ist die Gleichung 2. rein quadratisch; mithin verschwindet der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$. Wir erhalten daher den Satz: Die Bedingung dafür, dass zwei Gerade \mathfrak{Z} und T in Bezug auf eine Curve zweiten Grades $\varphi = 0$ conjugirt sind, ist

$$3. \quad \varphi_{1u} \cdot v_1 + \varphi_{2u} \cdot v_2 + \varphi_{3u} \cdot v_3 = \varphi_{1v} \cdot u_1 + \varphi_{2v} \cdot u_2 + \varphi_{3v} \cdot u_3 = 0.$$

12. A. Die Punkte Π , die einem gegebenen Punkte \mathfrak{P} in Bezug auf eine Curve zweiten Grades conjugirt sind, genügen der Gleichung

$$1. \quad f_{1x} \xi_1 + f_{2x} \xi_2 + f_{3x} \xi_3 = 0,$$

wobei nun f_{3x}, f_{1x}, f_{2x} gegebene Werthe haben. Diese Gleichung ist linear, also liegen diese Punkte auf einer Geraden. Diese Gerade heisst die Polare des Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Die Polare eines Punktes wird nur dann unbestimmt, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die drei Grössen f_{1x}, f_{2x}, f_{3x} zugleich verschwinden. Wir sehen daher: Bei jeder eigentlichen Curve zweiten Grades (Ellipse, Hyperbel, Parabel) ist die Polare jedes Punktes eindeutig bestimmt.

Besteht eine Curve zweiter Ordnung aus zwei getrennten Geraden, so ist die Polare des Schnittpunktes dieser Geraden unbestimmt; besteht die Curve aus zwei zusammenfallenden Geraden, so ist die Polare jedes Punktes der Geraden unbestimmt. In diesen beiden Fällen folgt aus der Identität

$$f_{1x} \xi_1 + f_{2x} \xi_2 + f_{3x} \xi_3 = f_{1x} \xi_1 + f_{2x} \xi_2 + f_{3x} \xi_3,$$

dass der Gleichung der Polaren jedes Punktes \mathfrak{P} durch die Coordinaten des Doppelpunktes genügt wird, da für diesen Punkt die Functionen f_{1x}, f_{2x}, f_{3x} verschwinden. Wir sehen also: Besteht eine Curve zweiter Ordnung aus zwei sich schneidenden Geraden, so geht die Polare jedes Punktes durch den Schnittpunkt der zwei Geraden; besteht die Curve aus zwei zusammenfallenden Geraden, so fällt die Polare jedes nicht auf der Geraden gelegenen Punktes mit den beiden Geraden zusammen.

Ferner ist aus der Gleichung der Polaren sofort ersichtlich: Liegt ein Punkt auf der Curve $f = 0$, so ist seine Polare die durch ihn gehende Curventangente.

, Polare und Pol an Curven zweiten Gr

gehenden (realen oder conjugirt
canntlich

$$+ f_{2\tau} x_2 + f_{3\tau} x_3)^2 = 0.$$

Tangenten die Curve berühren,
lie Coordinaten dieser Punkte auc
 $f_{1\tau} \cdot x_1 + f_{2\tau} \cdot x_2 = 0.$

re eines Punktes \mathfrak{P} in Bezu
urch die Berührungspunkte
angenten.

owie aus der Identität:

$$\xi_3 = f_{1\xi} \cdot x_1 + f_{2\xi} \cdot x_2 + f_{3\xi}$$

lare des Punktes \mathfrak{P} durch de
durch \mathfrak{P} .

er gegebenen Geraden \mathfrak{E} in
jugirt sind, genügen der Gleich

$$u \cdot u_2 + \varphi_{3u} \cdot u_3 = 0,$$

Dieser Punkt heisst der Pol de

indeutig bestimmt, ausser wenn

Doppelgeraden ist unbestimmt,
steht die Curve nur aus einem Pu
Gerade der Pol unbestimmt.

auch geschrieben werden

$$r \cdot u_2 + \varphi_{3u} \cdot u_3 = 0.$$

aus zwei getrennten oder vereinte
durch die Coordinaten einer Do
 $\varphi_{1u} = \varphi_{2u} = \varphi_{3u} = 0$. Wir se
asse aus zwei getrennten Pu
e nicht durch einen der beid
len Punkte; besteht die Curve
üllt der Pol jeder Geraden,
em Punkte P zusammen.

folgt: Der Pol einer Tange
ngentialpunkt. Aus der Ident

$$v_3 = \varphi_{1v} \cdot u_1 + \varphi_{2v} \cdot u_2 + \varphi_{3v}$$

n \mathfrak{E} auf T , so liegt auch der
egenden Tangentialpunkte ist
 $(\varphi_{2u} \cdot u_2 + \varphi_{3u} \cdot u_3)^2 = 0.$

diese beiden Punkte gehen und
Gleichung

$$u \cdot u_2 + \varphi_{3u} \cdot u_3 = 0,$$

den. Der Pol einer Geraden
r der Schnittpunkt der Gerade
en mit \mathfrak{E} berühren.

it dem analogen Satze in A. zeig
einen Kegelschnitt gehören zusam
ines Punktes B , so ist auch

die

Tangenten eines Kegelschnitts zu construiren, desselben gegeben sind.

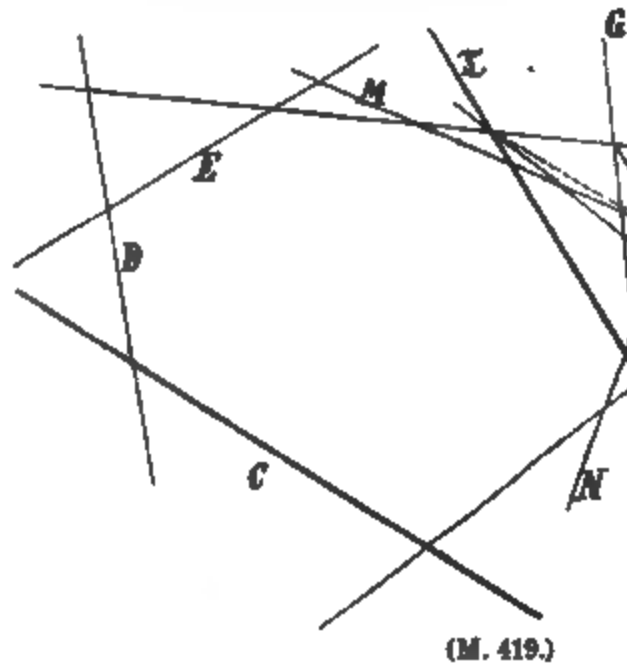
Sind $ABCDE$ die gegebenen fünf Punkte, so ziehe man $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ und bestimme nach dem PASCAL'schen Satze die Punkte F und G , in welchen diese Gerade den Kegelschnitt zum zweiten Male treffen. Hierauf bestimme man den Schnitt H der Geraden AB und FG , sowie den Schnitt J der Geraden AG und BF . Zieht man nun HJ , so sind nach dem Satze über das vollständige Viereck die Punkte L und K die vierten harmonischen Punkte zu $AF\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}BG$, also ist LK die gesuchte Polare.



Construirt man nun die Punkte M und N , welche die Polare von \mathfrak{P} mit dem Kegelschnitte gemein hat, so sind $\mathfrak{P}M$ und $\mathfrak{P}N$ die durch \mathfrak{P} gehenden Tangenten des Kegelschnitts und M und N sind ihre Tangentialpunkte.

B. Den Pol einer Geraden \mathfrak{L} und die auf \mathfrak{L} liegenden Punkte eines Kegelschnitts zu construiren, wenn fünf ben gegeben sind.

Sind $ABCDE$ die gegebenen fünf Tangenten, so construirt man zunächst nach dem BRIANCHON'schen Satze die Tangenten F und G des Kegelschnitts, welche durch die Schnittpunkte der Geraden \mathfrak{L} mit zweien der gegebenen Geraden, z. B. mit A und B ,



(M. 419.)

gehen. Zieht man nun die Gerade H , welche den Schnittpunkt von F und G verbindet, sowie die Gerade J , die durch die Schnittpunkte von AG und BF geht, so sind nach dem Satze über das vollständige Viereck die Punkte K und L harmonisch zugeordnet zu den Schnittpunkten von AF und BE mit \mathfrak{L} , also ist ihr Schnittpunkt \mathfrak{P} der gesuchte Pol.

Construirt man die durch \mathfrak{P} gehenden Tangenten des Kegelschnitts M und N , so treffen diese \mathfrak{L} in den auf \mathfrak{L} liegenden Punkten des Kegelschnitts.

14. A. Einen Kegelschnitt zu construiren, von dem drei Punkte, sowie ein Paar Pol und Polare gegeben sind.

Sind A, B, C die gegebenen Punkte und ist T die Polare von P , so verbinde man P mit zweien der gegebenen drei



hat die Coordinaten

$$x = 1, 2, 3.$$

$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

$$x = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3, \\ x_2 + a_{23}x_3$$

$$f_{2x} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_1 f_{2\xi} + \lambda_2 f_{2\eta})$$

$$f_{2\xi} + \lambda_2 f_{2\eta}.$$

P ist demnach

$$f_{2\xi} x_2 + (\lambda_1 f_{2\xi} + \lambda_2 f_{2\eta}) x_3 = 0. \\ x_2 + f_{2\xi} x_3, \\ x_2 + f_{2\eta} x_3.$$

n der Polaren der Punkte \mathfrak{P} und Π ,
e Polare des Punktes von P . Hieraus
dass die Polare von P durch den
id dass das von den Polaren P ge-
unkte P projectiv ist. Wir haben
: eine geradlinige Punktreihe,
büschel, das mit der Punktreihe
trahlbüschels ist der Pol der

len $\mathfrak{P}\Pi$ ist der Ort der zu P conjugir-
 P conjugirten Punkte Q der Geraden
zu dem Büschel der T projectiv ist,
unkte Q projectiv. Nun ist aber der
prok: Ist Q conjugirt zu P , so ist
6, No. 21), dass die auf einander
id der Q involutorisch liegen. Wir
jugirter Punkte, die auf einer
ische Involution. Die Doppel-
chnittpunkte der Geraden und

nitt zweier Geraden \mathfrak{E} und T geht,

$$c = 1, 2, 3.$$

aden T in Bezug auf den Kegelschnitt

$$x_{22}u_2^2 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0$$

WIII

$$+ \varphi_{2u} \cdot u_2 \quad \text{und}$$

$$+ \varphi_{2v} \cdot u_3,$$

igen der Pole der Geraden \mathfrak{E} und T
Gerade T um einen Punkt, so
Polare des Punktes; das Strahl-
anktreihe der Pole P projectiv.

ven zw

nd du
sehne
rader
entru

$$_2 + \alpha_1$$

ich d
en f

$$\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{vmatrix}$$

ig $\varphi =$
chung

$\alpha_{33} =$
nten d
eichun
en u_1
abel
 β ka

0.
sind r

$$\begin{aligned} &+ a_{13} \\ &+ a_{23} \\ &+ a_{33} \end{aligned}$$

n man
0.

$$d u_x =$$

in, so
 $+ a_{11}$
 $+ a_{21}$
 $+ a_{31}$
n Fur

$_1$, die
der l
die G

$$_3^2 =$$

gleich
ig dei

$$^2 = ($$

21. Ist \mathfrak{L}_1 die Polare eines Punktes A_1 , und gelegenen Punktes A_2 , so geht \mathfrak{L}_2 durch A_1 ; die P, welchem \mathfrak{L}_1 und \mathfrak{L}_2 sich schneiden, geht durch d erhalten somit ein Dreieck, dessen Seiten die Poli Ecken sind. Ein solches Dreieck heisst ein Polare

Eine Ecke eines Polarendreiecks (A_1) kann ga die zweite Ecke (A_2) kann auf der Polaren von A_1 beliebig gewählt werden; die dritte ist durch die beiden andern bestimmt.

Wählt man ein Polarendreieck zum Achsendreieck, so gewinnt die Gleichung des Kegelschnitts eine sehr einfache Gestalt. Die drei Functionen f_{1x}, f_{2x}, f_{3x} (No. 19 A) reduciren sich jetzt der Reihe nach auf $a_{11}x_1, a_{22}x_2, a_{33}x_3$, es is also $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Die Gleichung eines Kegelschnitts in Punktcoordinaten in Bezug auf ein Polarendreieck ist daher

$$1. \quad f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung der Polaren eines nicht auf f gelegenen Punktes \mathfrak{P} und die Gleichung der Tangente in einem auf f gelegenen Punkte \mathfrak{P} ist

$$2. \quad \mathfrak{L} = a_{11}r_1 \cdot x_1 + a_{22}r_2 \cdot x_2 + a_{33}r_3 \cdot x_3 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangente bestimmen sich daher aus der Proportion

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = a_{11}r_1 : a_{22}r_2 : a_{33}r_3.$$

Hieraus folgt weiter

$$3. \quad r_1 : r_2 : r_3 = \frac{u_1}{a_{11}h_1} : \frac{u_2}{a_{22}h_2} : \frac{u_3}{a_{33}h_3}.$$

Da \mathfrak{P} auf \mathfrak{L} liegt, so besteht die Gleichung

$$\frac{r_1 u_1}{h_1} + \frac{r_2 u_2}{h_2} + \frac{r_3 u_3}{h_3} = 0.$$

Setzt man hier die Werthe aus der Proportion 3. ein, so erhält man die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten, indem man nun die Veränderlichen u_1, u_2, u_3 mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet

$$4. \quad \varphi = \frac{u_1^2}{a_{11}h_1^2} + \frac{u_2^2}{a_{22}h_2^2} + \frac{u_3^2}{a_{33}h_3^2} = 0.$$

Schreibt man dafür

$$5. \quad \varphi = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 = 0,$$

so gelten die Beziehungen:

$$6. \quad a_{11}a_{11} = \frac{1}{h_1^2}, \quad a_{22}a_{22} = \frac{1}{h_2^2}, \quad a_{33}a_{33} = \frac{1}{h_3^2}.$$

Die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten 5. findet man auch leicht ohne Benutzung der Gleichung $f = 0$ aus dem Umstande, dass die Ecken A_1, A_2, A_3 die Pole der gegenüberliegenden Seiten sind.

Die Gleichung des Poles einer die Curve φ nicht tangirenden Geraden und die Gleichung des Tangentialpunkts einer Tangente \mathfrak{L} ergibt sich aus 5. zu:

$$7. \quad \mathfrak{L} = a_{11}u_1 \cdot u_1 + a_{22}u_2 \cdot u_2 + a_{33}u_3 \cdot u_3 = 0.$$

22. Die Gleichung des Centrums in Bezug auf ein Polarendreieck folgt hieraus für $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ zu

$$1. \quad a_{11}u_1 + a_{22}u_2 + a_{33}u_3 = 0.$$

Für die Coordinaten des Centrums hat man daher

$$2. \quad r_1 = \frac{a_{11}h_1}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}, \quad r_2 = \frac{a_{22}h_2}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}, \quad r_3 = \frac{a_{33}h_3}{a_{11} + a_{22} + a_{33}}.$$

23. Die drei Coefficienten $a_{11}a_{22}a_{33}$ können nicht dasselbe Zeichen haben,

zu überschreiten, so folgt, dass für alle Punkte eines dasselbe Zeichen hat. Man kann also je nach dem V. jedes Gebiet als ein positives oder als ein negatives. Punkten in Gebieten gleichen Vorzeichens können wir derselben Seite der Curve liegen.

Zwei Ecken des Polarendreiecks $A_1 A_2$ liegen also Ecke A_3 auf der andern Seite der Curve. Für das Cer

$$\frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} \cdot \alpha_1^4 h_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} \cdot \alpha_2^4 h_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} \cdot \alpha_3^4 h_3^2 = \alpha$$

folglich liegt das Centrum auf derselben Seite mit A_1 Gebiet der Ebene, durch welches unbegrenzte Geraden werden können, die die Curve nicht schneiden.

Hierdurch ist die Curve als Hyperbel charakterisirt. Wir sehen daher: Jedes Polarendreieck einer Hyperbel hat zwei Ecken auf derselben Seite, wie das Centrum, die dritte auf der andern; das Centrum liegt in dem durch die Seiten des Polarendreiecks begrenzten zweieckigen Felde, welches der mit dem Centrum nicht auf derselben Seite liegenden Ecke gegenüberliegt.

Rückt das Centrum in eine der Ecken eines Polarendreiecks, in die es überhaupt nur gelangen kann, d. i. in A_1 oder A_2 , z. B. in A_1 , so wird die Seite $A_2 A_3$ unendlich fern und für das endliche Gebiet wird x_1 zu einer unendlich grossen Constanten; soll die Gleichung der Hyperbel durch endliche Werthe der Coordinaten x_2, x_3 erfüllbar sein, so muss α_1 ebenfalls unendlich gross werden, so dass $(1 : \alpha_1^2) x_1^2$ eine endliche Constante γ^2 wird; die beiden andern Seiten des Polarendreiecks $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ sind dann conjugirte Diameter. Sind die Höhenverhältnisse $h_1 : h_2 : h_3 = 1 : m : n$, so ist die Gleichung der Hyperbel

$$\gamma^2 + \frac{1}{\alpha_2^2 m^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 n^2} x_3^2 = 0.$$

Führt man statt x_2 und x_3 schiefwinkelige Parallelcoordinaten x und y ein und setzt $A_2 A_1 A_3 = \omega$, so ist $x_2 = x \sin \omega$, $x_3 = y \sin \omega$, also wird die Gleichung der Hyperbel, nach Division durch γ^2 und passende Umstellung:

$$\frac{\sin^2 \omega}{\gamma^2 \alpha_2^2 m^2} \cdot x^2 - \frac{\sin^2 \omega}{\gamma^2 \alpha_3^2 n^2} \cdot y^2 - 1 = 0$$

in Uebereinstimmung mit § 9, No. 13.

b) Sind zwei Coefficienten negativ, der dritte positiv, so kann die Curvengleichung in Liniencoordinaten geschrieben werden

$$\varphi = \alpha_1^2 u_1^2 - \alpha_2^2 u_2^2 - \alpha_3^2 u_3^2 = 0;$$

woraus die Gleichung in Punktcoordinaten folgt:

$$f = \frac{1}{\alpha_1^2 h_1^2} x_1^2 - \frac{1}{\alpha_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} x_3^2 = 0.$$

Die Coordinaten des Centrums ergeben sich jetzt zu:

$$r_1 = \alpha_1^2 h_1, \quad r_2 = -\alpha_2^2 h_2, \quad r_3 = -\alpha_3^2 h_3.$$

Die Function f erhält für die Ecken des Coordinatendreiecks, für das Centrum und für irgend einen Punkt von $A_2 A_3$ die Werthe:

$$\begin{array}{ll} \text{Für den Punkt } A_1: & f = \frac{1}{\alpha_1^2}, \text{ also positiv;} \\ \text{„ „ „ } A_2: & f = -\frac{1}{\alpha_2^2}, \text{ „ negativ;} \\ \text{„ „ „ } A_3: & f = -\frac{1}{\alpha_3^2}, \text{ „ negativ;} \end{array}$$

nd Pol an Curven zweiten Gr

$$- \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = +1, \text{ auf} \\ \frac{1}{h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha_3^2 h_3^2} x_3^2,$$

derselben Seite der Cu
lie Ecke A_1 und das Ce
rch das Centrum nach e
Centrum gehende Gerac
1 und der Geraden A_2A

Strecke findet ein Vorzeichenwechsel der Function f statt.

Hierdurch wird die Curve als Ellipse charakterisirt.

In jedem Polarendreieck einer Ellipse liegen eine Ec
Centrum der Curve auf der Seite derselben Curve, nämlich
ringsum begrenzten, endlichen Gebiete; die andern bei
und die sie verbindende Gerade liegen auf dem andern,
grossen Gebiete; da zwei Coordinaten des Centrums ne
so liegt das Centrum im Scheitelwinkel desjenigen Dreie
dessen Scheitel mit dem Centrum auf derselben Seite der C

Rückt das Centrum in den Punkt A_1 , so wird A_2A_3 un
wenn der Gleichung durch endliche Werthe von x_2 und x_3 genügt
so muss $(1 : \alpha_1^2) x_1^2$ eine endliche Constante γ^2 werden, und die Ver
Höhen $h_1 : h_2 : h_3$ müssen endliche Werthe $1 : n : m$ annehmen;
 A_1A_2 und A_1A_3 werden conjugirte Durchmesser. Führt man die
dinaten ein, wie unter a), so erhält man die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\sin^2 \omega}{\gamma^2 \alpha_2^2 m^2} x^2 + \frac{\sin^2 \omega}{\gamma^2 \alpha_3^2 n^2} y^2 - 1 = 0.$$

Durch die Schlussbetrachtungen von a) und b) ist angedeutet,
zweiachsiges Coordinatensystem (wobei es unwesentlich ist, ob die
parallel oder normal zu den Achsen gemessen werden) als eine Au
dreiachsigen Systems betrachten kann, nämlich als ein dreiachsiges
welchem eine Achse die unendlich ferne Gerade ist.

24. A. Wenn von einer Curve zweiter Ordnung ein Pola
 $A_1A_2A_3$ und ein Punkt B gegeben sind, so sind noch w
Punkte der Curve bekannt; dieselben liegen auf den Geraden,
 A_1 , A_2 und A_3 verbinden und sind die vierten harmonischen Pu
beiden Schnitten einer solchen Geraden und des Perimeter des Po
und zu B ; sie bilden mit B die Ecken eines vollständigen Vierecks
 $A_1A_2A_3$ die Diagonalepunkte sind, und können durch Ziehen ein
in bekannter Weise leicht gefunden werden.

Durch ein Polarendreieck und durch zwei Punkte, die aber ni
Ecke des Polarendreiecks auf einer Geraden liegen dürfen, ist d
stimmt; denn es sind dann im ganzen acht Punkte der Curve bekan
als nöthig zur Construction mit Hülfe des PASCAL'schen Satzes.

B. Wenn von einer Curve zweiter Ordnung ein Pola
 $A_1A_2A_3$ und eine Tangente B gegeben ist, so kennt man ne
drei Tangenten; diese sind die vierten harmonischen Strahlen
Seite des Achsendreiecks, dem Strahl, welcher die Spur von B au
mit dem Pole dieser Seite verbindet, und von B , und können dabe
struirt werden. Sie bilden die Seiten eines vollständigen Vierseits,
gonalen die Seiten des Achsendreiecks sind.

Kennt man von einer Curve zweiter Ordnung ein Polarendreieck und zwei Tangenten, deren Schnittpunkt aber nicht auf einer Seite des Achsendreiecks liegen darf, so ist die Curve bestimmt; denn man kennt dann im Ganzen acht Tangenten und kann die Curve daher nach dem BRIANCHON'schen Satze construiren.

25. Wir untersuchen nun, ob zwei Kegelschnitte ein gemeinsames Paar Pol und Polare haben.

Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte seien in Punktcoordinaten:

$$f' = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$$f'' = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0,$$

in Liniencoordinaten:

$$\varphi' = \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0;$$

$$\varphi'' = \beta_{11}u_1^2 + 2\beta_{12}u_1u_2 + 2\beta_{13}u_1u_3 + \beta_{22}u_2^2 + 2\beta_{23}u_2u_3 + \beta_{33}u_3^2 = 0.$$

Für die Coordinaten der Polaren eines Punktes x_1, x_2, x_3 in Bezug auf den ersten Kegelschnitt gilt die Proportion

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = f_1x' : f_2x' : f_3x',$$

und für die Coordinaten der Polaren desselben Punktes in Bezug auf f''

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = f_1x'' : f_2x'' : f_3x''.$$

Sollen beide Polaren zusammenfallen, so muss die Proportion erfüllt werden:

$$f_1x' : f_2x' : f_3x' = f_1x'' : f_2x'' : f_3x'',$$

also giebt es dann eine Zahl λ , für welche

$$f_1x' = \lambda f_1x'', \quad f_2x' = \lambda f_2x'', \quad f_3x' = \lambda f_3x''.$$

Reducirt man diese drei Gleichungen auf Null, so erhält man

$$1. \quad (a_{11} - \lambda b_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda b_{12})x_2 + (a_{13} - \lambda b_{13})x_3 = 0,$$

$$2. \quad (a_{12} - \lambda b_{12})x_1 + (a_{22} - \lambda b_{22})x_2 + (a_{23} - \lambda b_{23})x_3 = 0,$$

$$3. \quad (a_{13} - \lambda b_{13})x_1 + (a_{23} - \lambda b_{23})x_2 + (a_{33} - \lambda b_{33})x_3 = 0.$$

Der Verein dieser drei Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$4. \quad L = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{12} - \lambda b_{12} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{13} - \lambda b_{13} & a_{23} - \lambda b_{23} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung für λ .

Ist λ_0 eine reale Wurzel der Gleichung $L = 0$, so setze man dieselbe in zwei der drei Gleichungen 1., 2., 3., z. B. in die ersten beiden ein; aus

$$(a_{11} - \lambda_0 b_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda_0 b_{12})x_2 + (a_{13} - \lambda_0 b_{13})x_3 = 0,$$

$$\text{und} \quad (a_{12} - \lambda_0 b_{12})x_1 + (a_{22} - \lambda_0 b_{22})x_2 + (a_{23} - \lambda_0 b_{23})x_3 = 0,$$

erhält man dann die Verhältnisse der Coordinaten des zu λ_0 gehörigen Punktes, dessen Polaren für beide Kegelschnitte zusammenfallen.

Man kann bei dieser Untersuchung auch von den Gleichungen in Liniencoordinaten ausgehen. Ist T eine Gerade, deren Pole für beide Kegelschnitte zusammenfallen, und sind $u_1u_2u_3$ die Coordinaten von T , so gilt die Proportion

$$\frac{u_1}{h_1} : \frac{u_2}{h_2} : \frac{u_3}{h_3} = \varphi_1u' : \varphi_2u' : \varphi_3u' = \varphi_1u'' : \varphi_2u'' : \varphi_3u'',$$

also giebt es eine Zahl μ , für welche die Gleichungen bestehen

$$\varphi_1u' - \mu\varphi_1u'' = 0, \quad \varphi_2u' - \mu\varphi_2u'' = 0, \quad \varphi_3u' - \mu\varphi_3u'' = 0, \quad \text{oder}$$

$$5. \quad (\alpha_{11} - \mu\beta_{11})u_1 + (\alpha_{12} - \mu\beta_{12})u_2 + (\alpha_{13} - \mu\beta_{13})u_3 = 0,$$

$$6. \quad (\alpha_{12} - \mu\beta_{12})u_1 + (\alpha_{22} - \mu\beta_{22})u_2 + (\alpha_{23} - \mu\beta_{23})u_3 = 0,$$

$$7. \quad (\alpha_{13} - \mu\beta_{13})u_1 + (\alpha_{23} - \mu\beta_{23})u_2 + (\alpha_{33} - \mu\beta_{33})u_3 = 0.$$

1. wird durch das Verschwinden der Deter-

$$\begin{vmatrix} x_{12} - \mu\beta_{12} & \alpha_{12} - \mu\beta_{12} \\ x_{22} - \mu\beta_{22} & \alpha_{22} - \mu\beta_{22} \\ x_{32} - \mu\beta_{32} & \alpha_{32} - \mu\beta_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

ischen Gleichung für μ entspringt ein reales gemeinsames Paar Pol und Polare der beiden Kegelschnitte. Die Verhältnisse der Coordinaten der Polaren bestimmen sich, wenn μ_0 eine reale Wurzel von $M = 0$ ist, aus zweien der Gleichungen 5. 6. 7. z. B. aus

$$\begin{aligned} & (\alpha_{11} - \mu_0\beta_{11})u_1 + (\alpha_{12} - \mu_0\beta_{12})u_2 + (\alpha_{13} - \mu_0\beta_{13})u_3 = 0, \\ \text{und} & (\alpha_{12} - \mu_0\beta_{12})u_1 + (\alpha_{22} - \mu_0\beta_{22})u_2 + (\alpha_{23} - \mu_0\beta_{23})u_3 = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ haben also immer die gleiche Anzahl realer Wurzeln.

Haben die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ drei reale Wurzeln, so giebt es drei Punkte $P_1P_2P_3$, die für beide Kegelschnitte dieselben Polaren $T_1T_2T_3$ haben. Hieraus folgt dann weiter, dass die Ecken des Dreiecks $T_1T_2T_3$ die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ für beide Kegelschnitte zu Polaren haben. Da aber nicht mehr als die drei Punkte $P_1P_2P_3$ existiren, deren Polaren für beide Kegelschnitte zusammenfallen, so folgt, dass die Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $T_1T_2T_3$ zusammenfallen. Haben also die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ drei reale Wurzeln, so besitzen die beiden Kegelschnitte ein reales gemeinsames Polarendreieck.

Durch Transformation zu diesem gemeinsamen Polarendreieck als Achsendreieck wird jede der quadratischen Formen f' , f'' , φ' und φ'' in eine Summe von drei Quadraten transformirt.

Haben die Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ zwei conjugirt complexe Wurzeln, so kann man immer noch von einem gemeinsamen Polarendreiecke der beiden Kegelschnitte sprechen; nur sind jetzt zwei Ecken und die ihnen gegenüberliegenden Seiten imaginär, während die dritte Ecke und Seite real sind.

26. A. Sind P_1, P_2, \dots, P_6 Punkte eines Kegelschnitts und x_{1v}, x_{2v}, x_{3v} die Coordinaten von P_v , so verschwindet die Determinante (§ 11, No. 2)

$$1. \quad \begin{vmatrix} x_{11}^2 & x_{11}x_{21} & x_{11}x_{31} & x_{11}^2 & x_{21}x_{31} & x_{31}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{16}^2 & x_{16}x_{26} & x_{16}x_{36} & x_{26}^2 & x_{26}x_{36} & x_{36}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt, dass es sechs Zahlen $\mu_1 \dots \mu_6$ giebt, die nicht sämmtlich verschwinden, und für welche

$$\begin{aligned} & x_{11}^2\mu_1 + x_{12}^2\mu_2 + \dots + x_{16}^2\mu_6 = 0, \\ & x_{11}x_{21}\mu_1 + x_{12}x_{22}\mu_2 + \dots + x_{16}x_{26}\mu_6 = 0, \\ & x_{11}x_{31}\mu_1 + x_{12}x_{32}\mu_2 + \dots + x_{16}x_{36}\mu_6 = 0, \\ 2. & x_{21}^2\mu_1 + x_{22}^2\mu_2 + \dots + x_{26}^2\mu_6 = 0, \\ & x_{21}x_{31}\mu_1 + x_{22}x_{32}\mu_2 + \dots + x_{26}x_{36}\mu_6 = 0, \\ & x_{31}^2\mu_1 + x_{32}^2\mu_2 + \dots + x_{36}^2\mu_6 = 0. \end{aligned}$$

Es seien u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer willkürlichen Geraden. Multiplicirt man 2. der Reihe nach mit

$$\frac{u_1^2}{h_1^2}, \frac{u_1u_2}{h_1h_2}, \frac{u_1u_3}{h_1h_3}, \frac{u_2^2}{h_2^2}, \frac{u_2u_3}{h_2h_3}, \frac{u_3^2}{h_3^2}$$

und addirt, so erhält man die Identität

$$3. \quad \mu_1P_1^2 + \mu_2P_2^2 + \mu_3P_3^2 + \mu_4P_4^2 + \mu_5P_5^2 + \mu_6P_6^2 = 0,$$

wobei
$$P_x \equiv \frac{1}{h_1} x_{1x} u_1 + \frac{1}{h_2} x_{2x} u_2 + \frac{1}{h_3} x_{3x} u_3 = 0$$

die Gleichung des Punktes P_x ist. Wenn also sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so erfüllen sie die Identität 2., wobei die Verhältnisse der Zahlen μ_x eindeutig bestimmt sind.

B.*) Wenn sechs Gerade $T_1 \dots T_6$ einen Kegelschnitt berühren, so erfüllen ihre Gleichungen eine Identität von der Form

4.
$$\mu_1 T_1^2 + \mu_2 T_2^2 + \dots + \mu_6 T_6^2 = 0,$$

wobei die Verhältnisse der μ_x eindeutig bestimmt sind.

27. A. Sind $T_1, T_2, \dots T_n$ willkürliche Gerade, so ist

1.
$$\sum a_{ik} T_i T_k = 0,$$

wobei für ik jede Variation zweiter Klasse der Zahlen $1 \dots n$ und $a_{ik} = a_{ki}$ vorausgesetzt werde, die Gleichung eines Kegelschnitts. Die Bedingungsgleichung dafür, dass die Punkte P und Π in Bezug auf 1. conjugirt sind, ergibt sich aus No. 11, 1A ohne Schwierigkeit zu

2.
$$\sum (a_{1i} T_{1x} + a_{2i} T_{2x} + a_{3i} T_{3x} + \dots + a_{ni} T_{nx}) T_{i\xi} = 0, i = 1 \dots n.$$

B. Sind $P_1, P_2, \dots P_n$ willkürliche Punkte, so ist

3.
$$\sum a_{ik} P_i P_k = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts in Linienkoordinaten. Die Bedingung dafür, dass T und \mathfrak{T} in Bezug auf denselben conjugirt sind, ist (No. 11, 1B)

4.
$$\sum (a_{1i} P_{1u} + a_{2i} P_{2u} + \dots + a_{ni} P_{nu}) P_{iu} = 0, i = 1 \dots n.$$

28. A. Für den Kegelschnitt

1.
$$K \equiv a_{11} T_1^2 + a_{22} T_2^2 + a_{33} T_3^2 = 0$$

wird die Gleichung No. 27, 2

2.
$$a_{11} T_{1x} T_{1\xi} + a_{22} T_{2x} T_{2\xi} + a_{33} T_{3x} T_{3\xi} = 0.$$

Dem Punkte $T_{1x} = T_{2x} = 0$ ist daher jeder Punkt von $T_{3\xi} = 0$ conjugirt u. s. w.; folglich ist $T_1 T_2 T_3$ ein Polarendreieck von K .

Für den Kegelschnitt

3.
$$K \equiv a_{11} T_1^2 + a_{22} T_2^2 + a_{33} T_3^2 + a_{44} T_4^2 = 0$$

geht No. 27, 2 über in

4.
$$a_{11} T_{1x} T_{1\xi} + a_{22} T_{2x} T_{2\xi} + a_{33} T_{3x} T_{3\xi} + a_{44} T_{4x} T_{4\xi} = 0.$$

Ist i, k, l, m eine Permutation von 1 2 3 4, so lehrt diese Gleichung, dass dem Punkte $T_{ix} = T_{kx} = 0$ der Punkt $T_{l\xi} = T_{m\xi} = 0$ conjugirt ist; das Viereck $T_1 T_2 T_3 T_4$ ist daher dem Kegelschnitte K conjugirt, d. h. je zwei Gegenecken sind conjugirt.

Umgekehrt: Wenn für einen Kegelschnitt K zwei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierecks conjugirt sind, so ist es auch das dritte Paar. Denn sind A, B und C, D Punktpaare zweier Diagonalen des Vierecks, die den Gegenecken, die mit ihnen auf derselben Diagonale liegen, harmonisch zugeordnet sind, und beschränkt man die Coefficienten a_{ii} in $K = 0$ so, dass der Gleichung durch A und C genügt wird, so sind nach dem soeben bewiesenen Satze auch B und D auf K enthalten. Man kann nun die Verhältnisse $a_{11} : a_{22} : a_{33} : a_{44}$ immer so wählen, dass K noch einen beliebigen fünften Punkt enthält, es lässt sich also die Gleichung jedes durch A, B, C und D gehenden Kegelschnitts in der Form 4. darstellen, w. z. b. w.

B. Der Kegelschnitt $K \equiv \sum a_{xx} P_x^2 = 0$ hat, wenn $x = 3$, das Polarendreieck $P_1 P_2 P_3$; ist $x = 4$, so ist er dem Vierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$ conjugirt,

*) Die Beweise der unter B mitgetheilten Sätze sind denen unter A leicht nachzubilden.

d. h. jedes Paar Gegenseiten dieses Vierecks ist conjugirt. Umgekehrt: Wenn zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks einem Kegelschnitte conjugirt sind, so ist es auch das dritte Paar.

29. Die Identität No. 26, 3 kann geschrieben werden

$$1. \quad \mu_1 P_1^2 + \mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 = -\mu_4 P_4^2 - \mu_5 P_5^2 - \mu_6 P_6^2.$$

Alle Geraden, für welche $\mu_1 P_1^2 + \mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 = 0$, berühren einen Kegelschnitt, für welchen $P_1 P_2 P_3$ ein Polarendreieck ist; nach 1. ist für diesen Kegelschnitt auch $\mu_4 P_4^2 + \mu_5 P_5^2 + \mu_6 P_6^2 = 0$, es ist also auch $P_4 P_5 P_6$ ein Polarendreieck desselben. Wir erkennen daher: Wenn zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben sind, so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt, für den sie Polarendreiecke sind.

Umgekehrt: Zwei Polarendreiecke desselben Kegelschnitts sind einem andern Kegelschnitte eingeschrieben. Denn sind $P_1 P_2 P_3$ und $P_4 P_5 P_6$ Polarendreiecke eines Kegelschnitts, so kann die Gleichung desselben in den beiden Formen geschrieben werden

$$a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2 = 0, \quad a_4 P_4^2 + a_5 P_5^2 + a_6 P_6^2 = 0.$$

Daher giebt es eine Zahl n , durch welche die Identität hergestellt wird

$$a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2 - n a_4 P_4^2 - n a_5 P_5^2 - n a_6 P_6^2 = 0,$$

folglich liegen die Punkte $P_1 \dots P_6$ auf einem Kegelschnitte.

B. Wenn zwei Dreiecke demselben Kegelschnitte umschrieben sind, so sind sie Polarendreiecke für einen bestimmten andern Kegelschnitt; und umgekehrt: Zwei Polarendreiecke desselben Kegelschnitts sind einem andern Kegelschnitte umschrieben.

§ 14. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

1. A. Die Gesamtheit aller Kegelschnitte, deren Gleichungen in Punktcoordinaten aus den Gleichungen zweier gegebener Kegelschnitte $f' = 0$ und $f'' = 0$ in der Weise abgeleitet werden

$$f = \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0,$$

heisst ein Kegelschnittbüschel. Man erhält alle Kegelschnitte des Büschels, indem man dem Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ der Reihe nach alle möglichen Werthe giebt.

Die Kegelschnitte $f' = 0$ und $f'' = 0$ gehören zum Büschel; sie gehen aus f hervor, wenn man $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, bez. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ setzt.

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels. Sind nämlich f'_x und f''_x die Werthe, welche die Functionen f' und f'' für einen gegebenen Punkt \mathfrak{P} der Ebene erhalten, so nehme man $\lambda_1 = f''_x, \lambda_2 = -f'_x$, bilde also den Kegelschnitt $f = f''_x \cdot f' - f'_x \cdot f'' = 0$.

Setzt man in f' und f'' statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten des Punktes \mathfrak{P} , so verschwindet f identisch, also liegt \mathfrak{P} auf $f = 0$.

Hiervon machen nur solche Punkte eine Ausnahme, für welche zugleich $f'_x = 0$ und $f''_x = 0$, die also den Kegelschnitten f' und f'' gemein sind. Für dieselben verschwindet auch die Function $f = \lambda_1 f' + \lambda_2 f''$, sie gehören also allen Kegelschnitten des Büschels an; sie heissen die Träger des Büschels.

B. Die Gesamtheit aller Kegelschnitte, deren Gleichung in Liniencoordinaten aus den Gleichungen zweier gegebenen Kegelschnitte $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ in der Weise abgeleitet werden

$$\varphi = \lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \varphi'' = 0,$$

heisst eine Kegelschnittschaar. Man erhält alle Kegelschnitte der Schaar, wenn man dem Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ der Reihe nach alle möglichen Werthe beilegt.

Die gegebenen Kegelschnitte gehören zur Schaar, denn ihre Gleichungen gehen aus φ hervor, wenn man $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, bez. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ setzt.

Jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitte der Schaar berührt. Denn sind φ_u' und φ_u'' die Werthe, welche die Functionen φ' und φ'' für die Coordinaten einer gegebenen Geraden \mathfrak{L} annehmen, so wähle man

$$\lambda_1 = \varphi_u'', \quad \lambda_2 = -\varphi_u',$$

bilde also den Kegelschnitt der Schaar

$$\varphi \equiv \varphi_u'' \cdot \varphi' - \varphi_u' \cdot \varphi'' = 0.$$

Ersetzt man die laufenden Coordinaten u_x in φ' und φ'' durch die Coordinaten u_x der gegebenen Geraden \mathfrak{L} , so verschwindet φ identisch, also berührt \mathfrak{L} den Kegelschnitt $\varphi = 0$.

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die gegebene Gerade die beiden gegebenen Kegelschnitte berührt; denn dann ist $\varphi_u' = \varphi_u'' = 0$. Für die Coordinaten jeder solchen Geraden verschwindet auch die Function $\varphi \equiv \lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \varphi''$, also wird diese Gerade von allen Kegelschnitten der Schaar berührt. Eine solche Gerade heisst Träger der Schaar.

2. A. Ist ein Punkt zwei Kegelschnitten des Büschels gemein, so ist er allen Kegelschnitten des Büschels gemein.

Beweis. Sind $f''' \equiv \lambda_{13} f' + \lambda_{23} f'' = 0$ und $f'''' \equiv \lambda_{14} f' + \lambda_{24} f'' = 0$ zwei verschiedene Kegelschnitte, so sind die Verhältnisse $\lambda_{13} : \lambda_{23}$ und $\lambda_{14} : \lambda_{24}$ ungleich, folglich ist die Differenz $\lambda_{13} \lambda_{24} - \lambda_{23} \lambda_{14}$ von Null verschieden. Aus

$$\lambda_{13} f' + \lambda_{23} f'' = f''', \quad \lambda_{14} f' + \lambda_{24} f'' = f''''$$

$$\text{folgt} \quad f' = \frac{1}{\lambda_{13} \lambda_{24} - \lambda_{23} \lambda_{14}} (\lambda_{24} f''' - \lambda_{23} f'''),$$

$$f'' = \frac{1}{\lambda_{13} \lambda_{24} - \lambda_{23} \lambda_{14}} (-\lambda_{14} f''' + \lambda_{13} f''').$$

Diese Formeln zeigen, dass jeder Punkt, dessen Coordinaten den Gleichungen $f''' = 0$, $f'''' = 0$ genügt, auch auf $f' = 0$ und $f'' = 0$ liegt; sowie, dass man die Functionen f' und f'' und damit auch alle linear aus f' und f'' zusammengesetzten quadratischen Functionen f , die gleich Null gesetzt die Gleichungen der Büschelkegelschnitte ergeben, linear durch f''' und f'''' , d. i. durch die linken Seiten der Gleichungen von irgend zwei Büschelkegelschnitten ausdrücken kann.

B. Ebenso ergibt sich: Ist eine Tangente zwei Kegelschnitten einer Schaar gemein, so ist sie allen Kegelschnitten der Schaar gemein.

3. A. Die linearen Functionen f_{1r} , f_{2r} , f_{3r} (§ 13, No. 1) für die quadratische Form $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f''$ sind

$$f_{1r} = \lambda_1 f_{1r}' + \lambda_2 f_{1r}'', \quad f_{2r} = \lambda_1 f_{2r}' + \lambda_2 f_{2r}'', \quad f_{3r} = \lambda_1 f_{3r}' + \lambda_2 f_{3r}''.$$

Die Gleichung der Polaren eines Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf den Büschelkegelschnitt $f = 0$ ist also

$$\mathfrak{L} \equiv (\lambda_1 f_{1r}' + \lambda_2 f_{1r}'') x_1 + (\lambda_1 f_{2r}' + \lambda_2 f_{2r}'') x_2 + (\lambda_1 f_{3r}' + \lambda_2 f_{3r}'') x_3 = 0.$$

Setzt man

$$\mathfrak{L}' \equiv f_{1r}' x_1 + f_{2r}' x_2 + f_{3r}' x_3, \quad \mathfrak{L}'' \equiv f_{1r}'' x_1 + f_{2r}'' x_2 + f_{3r}'' x_3,$$

so sind $\mathfrak{L}' = 0$ und $\mathfrak{L}'' = 0$ die Gleichungen der Polaren des Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' und man hat $\mathfrak{L} \equiv \lambda_1 \mathfrak{L}' + \lambda_2 \mathfrak{L}''$.

Hieraus folgt, dass die Polare des Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf den Kegelschnitt f durch den Schnittpunkt der Polaren von \mathfrak{P} in Bezug auf die Kegelschnitte f' und f'' geht; dies ergibt den Satz: Die Polaren eines Punktes A in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels gehen durch einen

α sind conjugirt in Bezug auf alle Kegelschnitte daher auch die Polaren des Punktes α im Büschel durch A .

Bezug auf f' und f'' in eine Gerade \mathfrak{L} zusammen, so liegt auf irgend einen Kegelschnitt f des Büschels also mit \mathfrak{L} zusammen. Es giebt daher ein Kegelschnitt eines Büschels gemeinsam mit einer Ecke und die gegenüberliegende Seite real.

Die Polaren des Punktes β in Bezug auf Strahlenbüschel S_a, S_b, S_c, \dots welche durch die Punkte A, B, C, \dots der Ebene in Bezug auf Strahlenbüschel gebildet werden, sind projectiv; es ist also die Reihe der Punkte A, B, C, \dots in Bezug auf

Strahlenbüschel S_a in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels S_b von A und B , also der Schnitt zweier entgegengesetzten Polarenbüschel S_a und S_b . Hieraus folgt, dass die Pole der Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels projectiv sind. Dieser Kegelschnitt geht durch den Schnittpunkt der Geraden S_a und S_b , d. i. durch die Punkte a und b , in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels projectiv, welcher die Pole einer Geraden T des Büschels enthält, ist also auch die Reihe der Punkten der Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte conjugirt sind.

Die Gerade T mit einer Seite α des Polarendreiecks ist conjugirt mit der gegenüberliegenden Ecke A conjugirt, also folgt, dass die Pole einer Geraden in Bezug auf Strahlenbüschel, sowie die Conjugirten der Punkte des Büschels enthält, ist dem gemeinsamen Polarsystem umschrieben.

Die Gerade AB eine Ecke des Polarendreiecks des Büschels S_a des Polarenbüschels von A in eine Gerade durch den Punkt A gegenüberliegende Seite α des Polarenbüschels, die Pole jeder durch einen Eckpunkt A des Polarendreiecks fallenden Geraden fallen in die A gegenüberliegende Seite α . Um zu erfahren, wo die Punkte liegen, die den Büschel in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind, betrachten wir die Punkte der Reihe AB in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels bilden, deren Träger auf der Seite α des Polarendreiecks liegen. Da nun α die Gerade f' und f'' ist, so fallen in α zwei entsprechende Strahlenbüschel zusammen; die beiden Büschel sind daher conjugirt in Bezug auf Strahlen, d. i. die den Punkten von AB conjugirt sind, daher in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt, folglich auf einer Geraden T . Dem auf α gegenüberliegenden Punkt A conjugirt, folglich geht T durch A . Wir betrachten eine Reihe von Punkten einer Geraden, die durch eine

emeinsamen Polarendreiecks geht, sind in Bezug auf alle te des Büschels die Punkte einer andern durch dieselbe Polarendreiecks gehenden Geraden conjugirt.

Kegelschnitt, auf dem im Allgemeinen die Conjugirten der Punkte einer Schaar liegen, zerfällt in diesem Falle in die Geraden T und α ; die Conjugirten der Punkte von AB liegen auf T , ausgenommen für den Punkt A , denn alle Punkte der Geraden α conjugirt.

linearen Functionen φ_{1u} , φ_{2u} , φ_{3u} für die quadratische Form $\lambda_2 \varphi''$ sind

$\varphi_{1u} = \lambda_1 \varphi_{1u'} + \lambda_2 \varphi_{1u''}$, $\varphi_{2u} = \lambda_1 \varphi_{2u'} + \lambda_2 \varphi_{2u''}$, $\varphi_{3u} = \lambda_1 \varphi_{3u'} + \lambda_2 \varphi_{3u''}$.
Gleichung des Poles einer Geraden \mathfrak{L} in Bezug auf den Kegelschnitt aber

$(\lambda_1 \varphi_{1u'} + \lambda_2 \varphi_{1u''}) u_1 + (\lambda_1 \varphi_{2u'} + \lambda_2 \varphi_{2u''}) u_2 + (\lambda_1 \varphi_{3u'} + \lambda_2 \varphi_{3u''}) u_3 = 0$.
in

$\varphi' = \varphi_{1u'} u_1 + \varphi_{2u'} u_2 + \varphi_{3u'} u_3$, $\varphi'' = \varphi_{1u''} u_1 + \varphi_{2u''} u_2 + \varphi_{3u''} u_3$,
 $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ die Gleichungen der Pole der Geraden \mathfrak{L} in Bezug auf die Kegelschnitte $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ und man hat

$$\mathfrak{P} = \lambda_1 \mathfrak{P}' + \lambda_2 \mathfrak{P}''.$$

liegt der Pol von \mathfrak{P} auf der Geraden $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$. Wir schliessen daher: Der Pol einer Geraden A in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar liegt auf der Geraden α ; die Geraden A und α sind daher in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar conjugirt; es liegen daher auch die Pole der Geraden α in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar auf der Geraden A .

Die Ausnahme hiervon tritt nur dann ein, wenn die Pole für die Kegelschnitte φ' und φ'' zusammenfallen; dann fallen die Pole von A in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar zusammen. Hieraus ergibt sich: Die Kegelschnitte einer Schaar haben ein gemeinsames Polarendreieck; von dem ist entweder eine Seite und die gegenüberliegende Ecke reell, oder das ganze Dreieck ist real.

Die Gleichung des Poles einer Geraden \mathfrak{L} für einen Kegelschnitt der Schaar $\varphi = 0$ ergibt sich ferner: Die Pole der Geraden A , B , Γ , Δ auf den Kegelschnitten einer Schaar bilden projective Punktreihen Σ_A , und zwar entsprechen sich die Pole derselben Geraden in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte der Schaar.

Die Geraden des Schnittpunktes zweier Geraden AB in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar sind die Geraden, welche die Pole der Geraden A und B in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar verbinden; sind also die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der den Geraden A und B zugehörigen projectiven Polreihen Σ_A und Σ_B ; dies ergibt: Der Ort eines Punktes P in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar, wenn man denselben durch P gehenden Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar conjugirt sind.

Die Ausnahme von diesen beiden Sätzen tritt nur ein, wenn der Punkt auf der Geraden A des gemeinsamen Polarendreiecks der Schaar liegt. Denn die zu A gehörende Reihe schrumpft in einen Punkt zusammen, nämlich in den A gegenüberliegenden Eckpunkt a des Polarendreiecks. Hieraus folgt: Die Pole der Geraden einer Schaar auf einer Seite A des Polarendreiecks der Schaar liegen auf der Geraden α , den A gegenüberliegenden Eckpunkt a des Polarendreiecks.

e a des der Schaar gemeinsamen Polaren-
 ch a gehenden Geraden, die gegenüber-
 der Schaar conjugirt.

Polaren eines Punktes, sowie die
 Punkt gehenden Strahlen, in Bezug
 ar umhüllen, ist dem gemeinsamen
 schrieben.

für Kegelschnittbüschel ergibt sich ferner:
 essen Träger auf einer Seite A des
 legt, sind in Bezug auf alle Kegel-
 n eines andern Büschels conjugirt,
 teite des Polarendreiecks liegt. Der
 : Conjugirten der Strahlen eines Büschels
 n zwei Strahlbüschel (zwei Punkte); den
 der Geraden A zusammenfallen, sind die
 ; dem Strahl A ist das ganze Strahlbüschel
 rliegende Eckpunkt des Polarendreiecks ist.
 nte eines Büschels oder einer Schaar sind

Daher folgt (No. 3): Die Mittelpunkte
 als liegen auf einem Kegelschnitte,
 schels umgeschrieben ist. Die Mittel-
 ichaar liegen auf einer Geraden.

r Kegelschnitte eines Büschels, die
 conjugirt sind, gehen durch einen
 elschnitte einer Schaar, die einer
 t sind, umhüllen einen Kegelschnitt.
 n Doppelpunkten der Kegelschnitte
 Kegelschnitten eines Büschels, die

$+ \lambda_2 f'' = 0$ einen Doppelpunkt, und ist
 $x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2,$
 $x_1 x_3 + b_{22} x_2^2 + 2b_{23} x_2 x_3 + b_{33} x_3^2,$
 13, No. 3)

$$\begin{vmatrix}
 + \lambda_2 b_{12}, & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} \\
 + \lambda_2 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\
 + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33}
 \end{vmatrix} = 0.$$

n des Doppelpunkts bestimmen sich aus

$$\begin{aligned}
 &+ (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12}) x_2 + (\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13}) x_3 = 0, \\
 &+ (\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}) x_2 + (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}) x_3 = 0, \\
 &+ (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}) x_2 + (\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33}) x_3 = 0.
 \end{aligned}$$

— $\lambda_2 : \lambda_1$ durch λ , so werden die Deter-
 ., 4. mit der Determinante Z und den
 15 identisch. Wir haben daher den Satz:
 ischel drei (reale oder imaginäre) Kegel-
 zerfallen; die Doppelpunkte dieser
 s gemeinsamen Polarendreiecks.

oben werden, dass aus der Realität eines
 n kann, dass auch das zugehörige Geraden-

paar real ist. Wählt man einen realen Eckpunkt des gemeinsamen Polarendreiecks zur Ecke A_1 und die gegenüberliegende Seite zur Seite A_2A_3 des Coordinatendreiecks, so wird (§ 13, No. 20)

$$f' = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$$f'' = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 = 0.$$

Die Gleichung 1. wird jetzt

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}, & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ 0 & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11}) \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung, die dem Doppelpunkte A_1 entspricht, ist $\lambda_1 : \lambda_2 = b_{11} : -a_{11}$; das zugehörige Geradenpaar hat die Gleichung:

$$5. f = b_{11}f' - a_{11}f'' = (b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22})x_2^2 + 2(b_{11}a_{23} - a_{11}b_{23})x_2x_3 + (b_{11}a_{33} - a_{11}b_{33})x_3^2 = 0.$$

Ist das ganze Polarendreieck real, so wird in Bezug auf dasselbe

$$f' = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2,$$

$$f'' = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2.$$

Die Determinante 1. reducirt sich jetzt auf das Produkt der Diagonalglieder

$$6. (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})(\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22})(\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33}) = 0$$

und liefert für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ die drei realen Wurzeln $b_{11} : (-a_{11})$, $b_{22} : (-a_{22})$, $b_{33} : (-a_{33})$; diesen entsprechen die drei Geradenpaare

$$7. (a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})x_2^2 - (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})x_3^2 = 0,$$

$$8. -(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})x_1^2 + (a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})x_3^2 = 0,$$

$$9. (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})x_1^2 - (a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})x_3^2 = 0.$$

Sind die Grössen $(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})$, $(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})$, $(a_{33}b_{22} - a_{22}b_{33})$ alle drei positiv, oder alle drei negativ, so sind die drei Geradenpaare 7., 8., 9. real; sind zwei der Grössen positiv (z. B. die erste und zweite) und die dritte negativ, oder sind zwei negativ (die erste und die zweite) und die dritte positiv, so ist ein Geradenpaar real (in beiden Fällen das Geradenpaar 7.), die andern beiden sind conjugirt complex. Wenn ein Kegelschnittbündel ein reales Polarendreieck hat, so ist entweder ein, oder es sind drei reale Geradenpaare im Büschel enthalten.

B. Der Kegelschnitt $\varphi = \lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \varphi'' = 0$ hat eine Doppeltangente, zerfällt also in zwei Punkte, wenn die Determinante verschwindet

$$10. \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 \beta_{11}, & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 \beta_{12}, & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 \beta_{13} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 \beta_{12}, & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 \beta_{22}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 \beta_{23} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 \beta_{13}, & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 \beta_{23}, & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 \beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten der Doppeltangente bestimmen sich aus zweien der drei Gleichungen:

$$11. (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 \beta_{11})u_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 \beta_{12})u_2 + (\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 \beta_{13})u_3 = 0,$$

$$12. (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 \beta_{12})u_1 + (\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 \beta_{22})u_2 + (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 \beta_{23})u_3 = 0,$$

$$13. (\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 \beta_{13})u_1 + (\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 \beta_{23})u_2 + (\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 \beta_{33})u_3 = 0.$$

Ersetzt man $\lambda_2 : \lambda_1$ durch $-\mu$, so werden die Determinante 10. und die Gleichungen 11., 12., 13. mit der Determinante M und mit den Gleichungen 5., 6., 7. in § 13, No. 25 identisch. Hieraus folgt: Unter den Kegelschnitten einer Schaar giebt es drei Punktpaare; die Doppeltangenten derselben sind die Seiten des den Kegelschnitten der Schaar gemeinsamen Polarendreiecks.

: Ist das ganze Polarendreieck real, so
tpaare real, oder es ist eines real und

■ die andern beiden sind conjugirt complex.

6. A. Mögen nun die drei Geradenpaare, welche einem Kegelschnittbüschel angehören, aus realen Geraden bestehen, oder mögen imaginäre unter ihnen sein, in jedem Falle schneiden sich zwei dieser drei Paare in vier realen oder imaginären Punkten; folglich gehen die Geraden des andern Paares und alle Kegelschnitte des Büschels durch dieselben vier Punkte. Heben wir insbesondere irgend zwei Kegelschnitte des Büschels hervor, so haben wir den Satz: Zwei Kegelschnitte haben vier reale oder complexe Schnittpunkte.

Sind vier reale Schnittpunkte vorhanden, so hat das zu diesen beiden Kegelschnitten gehörige Büschel drei reale Geradenpaare, nämlich die drei Paare Gegenseiten des durch die vier Schnittpunkte bestimmten vollständigen Vierecks, — und ein reales Polarendreieck, dessen Ecken die Diagonalepunkte dieses Vierecks sind.

Um über die Realität der zum Büschel der beiden Kegelschnitte gehörenden Geradenpaare und über die complexen Schnittpunkte weiter zu entscheiden, wollen wir uns die Gleichungen der Kegelschnitte f' und f'' auf ein rechtwinkeliges System bezogen denken. Die Gleichung von f' sei

$$f' = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + k = 0.$$

Wird dieser Gleichung durch den imaginären Punkt genügt, der die Coordinaten hat $x = \xi + i\tau$, $y = \eta + i\vartheta$, so ist

$$x^2 = \xi^2 - \tau^2 + 2i\xi\tau, \quad xy = \xi\eta - \tau\vartheta + i(\tau\eta + \xi\vartheta), \quad y^2 = \eta^2 - \vartheta^2 + 2i\eta\vartheta.$$

Setzt man diese Werthe in $f' = 0$ ein, so erhält man:

$$a(\xi^2 - \tau^2) + 2b(\xi\eta - \tau\vartheta) + c(\eta^2 - \vartheta^2) + 2d\xi + 2e\eta + k + 2i(a\xi\tau + b\eta\tau + b\xi\vartheta + c\eta\vartheta + d\tau + e\vartheta) = 0.$$

Also sind die beiden Gleichungen einzeln erfüllt

$$1. \quad a(\xi^2 - \tau^2) + 2b(\xi\eta - \tau\vartheta) + c(\eta^2 - \vartheta^2) + 2d\xi + 2e\eta + k = 0,$$

$$2. \quad a\xi\tau + b(\eta\tau + \xi\vartheta) + c\eta\vartheta + d\tau + e\vartheta = 0.$$

Ersetzt man hierin τ und ϑ durch $-\tau$ und $-\vartheta$, so bleibt die Gleichung 1. ungeändert, und in 2. wechseln alle Glieder die Vorzeichen. Wir schliessen daher: Wenn ein complexer Punkt auf einem Kegelschnitte liegt, so liegt auch der conjugirt complexe auf dem Kegelschnitte. Hieraus folgt weiter: Die complexen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sind paarweise conjugirt.

Da nun zwei conjugirt complexe Punkte immer auf einer realen Geraden enthalten sind, so folgt: Sind die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte complex, so zerfallen sie in zwei Paar conjugirte und das Büschel der beiden Kegelschnitte enthält ein reales Geradenpaar.

Bestehen die vier Schnittpunkte aus den beiden Paaren conjugirt complexer Punkte P_1P_1' und P_2P_2' , welche die Coordinaten haben $\xi_1 + i\tau_1$, $\eta_1 + i\vartheta_1$, $\xi_1 - i\tau_1$, $\eta_1 - i\vartheta_1$; $\xi_2 + i\tau_2$, $\eta_2 + i\vartheta_2$; $\xi_2 - i\tau_2$, $\eta_2 - i\vartheta_2$, so sind die Geraden P_1P_1' und P_2P_2' real; die Gleichungen der Geraden P_1P_2 und $P_1'P_2'$ sind:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi_1 + i\tau_1 & \eta_1 + i\vartheta_1 & 1 \\ \xi_2 + i\tau_2 & \eta_2 + i\vartheta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi_1 - i\tau_1 & \eta_1 - i\vartheta_1 & 1 \\ \xi_2 - i\tau_2 & \eta_2 - i\vartheta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Geraden sind, wie man sieht, conjugirt complex, haben also einen realen Schnittpunkt. Ebenso sind die Geraden P_1P_2' und P_2P_1' conjugirt complex, denn sie haben die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 + i\eta_1, & \eta_1 + i\eta_1, & 1 \\ \xi_2 + i\eta_2, & \eta_2 + i\eta_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_1 - i\eta_1, & \eta_1 - i\eta_1, & 1 \\ \xi_2 - i\eta_2, & \eta_2 - i\eta_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir schliessen hieraus: Wenn zwei Kegelschnitte keinen realen Schnittpunkt haben, so sind alle drei Ecken des gemeinsamen Polarendreiecks real. Hieraus und aus § 13, 24 A folgt weiter: Haben zwei Kegelschnitte ein reales Polarendreieck, so haben sie entweder vier reale Schnittpunkte oder zwei Paare conjugirt complexe.

Ist nur eine Ecke des Polarendreiecks real und haben die Kegelschnitte einen realen Schnittpunkt, so haben sie (§ 13, No. 14 A) noch einen realen Schnittpunkt; beide Schnittpunkte liegen auf einer durch die reale Ecke des Polarendreiecks gehenden Geraden, und diese Gerade ist ein Theil eines in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitts. Ein dritter realer Schnittpunkt kann nicht existiren, da sonst noch ein zu diesen gehöriger vierter, also ein reales Polarendreieck vorhanden wäre, im Widerspruche mit der Voraussetzung.

Da die Gleichung des Geradenpaares, das zu dem Büschel der beiden Kegelschnitte gehört, und den realen Eckpunkt des Polarendreiecks zum Doppelpunkte hat, reale Coefficienten hat und im Falle zweier realen Schnittpunkte eine Gerade des Paares real ist, so folgt, dass auch die andere Gerade real ist. Die andern beiden Geradenpaare können reale Gerade nicht enthalten, da dieselben weitere reale Schnittpunkte mit dem realen Geradenpaare erzeugen würden.

Wenn also nur eine Ecke des zwei Kegelschnitten gemeinsamen Polarendreiecks real ist, so haben die beiden Kegelschnitte zwei reale Schnittpunkte. In jedem Falle ist in einem Kegelschnittbüschel wenigstens ein reales Geradenpaar enthalten.

B. Ebenso ergeben sich die dual entsprechenden Sätze: Zwei Kegelschnitte haben vier reale oder paarweis conjugirt complexe gemeinsame Tangenten. — Wenn die vier gemeinsamen Tangenten real sind, so enthält die zu den beiden Kegelschnitten gehörige Schaar drei Paare realer Punkte, die Gegenecken des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits, und ein reales Polarendreieck, dessen Seiten die Diagonalen dieses Vierseits sind. — Haben die beiden Kegelschnitte ein reales Polarendreieck, so haben sie entweder vier reale gemeinsame Tangenten, oder keine reale gemeinsame Tangente. Ist nur eine Seite des Polarendreiecks real, so haben die Kegelschnitte zwei reale gemeinsame Tangenten, die sich auf der realen Seite des Polarendreiecks schneiden. In jedem Falle gehört zu der von zwei Kegelschnitten bestimmten Schaar ein reales Punktpaar.

7. A. Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden jede Gerade in Punktpaaren einer quadratischen Involution.

Beweis. Nimmt man die Gerade zur Seite A_2A_3 eines Coordinatendreiecks, so bestimmen sich die Coordinaten der Schnittpunkte des Kegelschnitts $f \equiv \lambda_1 f' + \lambda_2 f'' = 0$ und der Achse A_2A_3 aus den Gleichungen

$$x_1 = 0, \quad f = 0, \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1,$$

also aus den beiden Gleichungen

$$1. \quad \lambda_1(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + \lambda_2(b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) = 0.$$

$$2. \quad \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Setzt man aus der zweiten in die erste

$$\frac{x_3}{h_3} = 1 - \frac{x_2}{h_2},$$

so geben die trinomischen Faktoren von λ_1 und λ_2 quadratische Functionen von x_2 allein; bezeichnet man den Abstand eines Punktes P der Geraden A_2A_3 von A_2 mit z , und den Winkel $A_2A_3A_1$ mit α , so kann man durch die Substitution $x_2 = z \sin \alpha$ die Faktoren von λ_1 und λ_2 in quadratische Functionen von z überführen. Ersetzt man nun in § 7, No. 1 und 2 die Grössen λ , r_1 , r_2 durch z , λ_1 , λ_2 , so folgt die Richtigkeit des behaupteten Satzes.

B. Die Tangentenpaare, die von einem Punkte aus an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden, bilden eine quadratische Involution.

Wählt man den Punkt als die Ecke A_1 eines Coordinatendreiecks, so erhält man die Coordinaten der von A_1 an den Kegelschnitt $\varphi \equiv \lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \varphi'' = 0$ gelegten Tangenten aus den Gleichungen

$$3. (\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 \beta_{22}) u_2^2 + 2(\lambda_1 a_{23} + \lambda_2 \beta_{23}) u_2 u_3 + (\lambda_1 a_{33} + \lambda_2 \beta_{33}) u_3^2 = 0,$$

$$4. \frac{\rho_2 u_2}{h_2} + \frac{\rho_3 u_3}{h_3} = 1.$$

Ersetzt man in 3. u_2 und u_3 durch $r_2 : r$ und $r_3 : r$ (§ 12, No. 10, 1), so erhält man die Gleichung

$$5. \lambda_1 (a_{22} r_2^2 + 2a_{23} r_2 r_3 + a_{33} r_3^2) + \lambda_2 (\beta_{22} r_2^2 + 2\beta_{23} r_2 r_3 + \beta_{33} r_3^2) = 0.$$

Bezeichnet man die Strecken A_1A_2 und A_1A_3 mit g_1 und g_2 , und die Winkel g_1T und g_2g_1 mit ψ und α , so hat man

$$6. r_2 = g_1 \sin \psi, \quad r_3 = g_2 \sin(\psi - \alpha) = g_2 \cos \alpha \cdot \sin \psi - g_1 \sin \alpha \cdot \cos \psi.$$

Durch diese Substitution geht eine homogene quadratische Function von r_2 und r_3 in eine homogene quadratische Function von $\sin \psi$ und $\cos \psi$ über. Dividirt man die durch die Formeln 6. transformirte Gleichung 5. durch $\cos^2 \psi$, so werden die mit λ_1 und λ_2 multiplicirten Trinome quadratische Functionen von $\tan \psi$. Aus § 7, No. 2 ergibt sich nun die Richtigkeit des Lehrsatzes.

8. A. Von zwei Kegelschnitten f' und f'' sind zwei Schnittpunkte und ausserdem noch von jedem drei Punkte gegeben; man soll die andern beiden Schnittpunkte construiren.

Sind A, B die beiden gegebenen Schnittpunkte und C, D, E die drei andern gegebenen Punkte von f' , C_1, D_1, E_1 die des andern Kegelschnitts f'' , so ziehe man die Gerade CC_1 und bestimme (nach PASCAL) die beiden andern Schnittpunkte C' und C'_1 dieser Geraden und der Kegelschnitte f' und f'' . Durch die beiden Paare CC' und $C_1C'_1$ ist nun die quadratische Involution J bestimmt, welche die Schnittpunkte der Geraden CC_1 und des Curvenbüschels $f'f''$ bilden. Zu diesem Curvenbüschel gehört auch das Geradenpaar, welches aus der Geraden AB und der Verbindungslinie T der unbekannten beiden andern Schnittpunkte besteht; dieses Geradenpaar schneidet die Transversale CC_1 in einem Punktpaare der Involution J ; da nun von diesem Punktpaare ein Punkt — der Schnittpunkt von CC_1 und AB — bekannt ist, so kann man nach § 7, No. 5 den andern Punkt dieses Paares, d. i. den Schnitt von CC_1 und T , construiren. Nachdem man so einen Punkt von T gefunden hat, zieht man eine andere Transversale, z. B. DD_1 , und bestimmt in gleicher Weise ihren Schnittpunkt mit T . Nun hat man T , und es erübrigt nur noch, nach § 11, No. 13 die Schnittpunkte der Geraden T mit f' oder f'' zu construiren; diese sind die gesuchten Punkte.

Die Auflösung bleibt dieselbe, wenn A und B nicht real, sondern conjugirt

complex (etwa die complexen Doppelpunkte einer auf einer gegebenen Geraden liegenden quadratischen Involution) sind.

B. Die Auflösung der dual entsprechenden Aufgabe: Von zwei Kegelschnitten sind zwei gemeinsame Tangenten und ausserdem von jedem drei Tangenten gegeben, man soll die beiden andern gemeinsamen Tangenten construiren, ist an der Hand der soeben mitgetheilten Construction leicht aufzufinden.

9. A. Den Kegelschnitt eines Büschels zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt P geht.

α) Hat das Büschel vier reale Träger A, B, C, D , so sind von dem gesuchten Kegelschnitte fünf reale Punkte bekannt, also kann derselbe (nach PASCAL) construirt werden.

β) Hat das Büschel nur zwei reale Träger A, B , so bestimme man zunächst nach No. 8 A die Gerade T , auf welcher die beiden conjugirt complexen Träger liegen. Projicirt man drei weitere Punkte C, D, E eines Büschelkegelschnitts f' von A und von B aus auf T , so sind die beiden imaginären Träger die Doppelpunkte der durch die Projectionen $C'D'E'$ und $C''D''E''$ bestimmten projectiven Reihen. Der gesuchte Kegelschnitt kann nun aus den drei realen Punkten P, A, B und den beiden conjugirt complexen nach § 11, No. 14 construirt werden.

γ) Ist keiner der Träger gegeben, so verbinde man den gegebenen Punkt P mit einem gegebenen Punkte A des einen Büschelkegelschnitts f' und bestimme den zweiten Schnittpunkt A_1 der Geraden PA und der Curve f' , sowie die beiden Schnittpunkte B und B_1 von PA und einer zweiten Büschelcurve f'' . Hierauf construirt man den Punkt Q so, dass das Paar PQ zu der durch die Paare AA_1 und BB_1 bestimmten Involution gehört. Alsdann ist Q ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Wenn man nun P mit drei weiteren Punkten C, D, E von f' verbindet, und dieselbe Construction wiederholt ausführt, so bekommt man weitere drei Punkte R, S, T des gesuchten Kegelschnitts und kann denselben nun aus den fünf realen Punkten P, Q, R, S, T construiren.

Wenn eine der Geraden, z. B. PA den Kegelschnitt f'' nicht in realen Punkten schneidet, sondern die Schnittpunkte als die conjugirt complexen Doppelpunkte zweier auf einander liegenden projectiven Punktreihen auftreten, so hat man von der Involution, in welcher PA das Kegelschnittbüschel schneidet, ein reales Punktpaar AA_1 und ein conjugirt complexes, und es kommt nun zur Ergänzung dieser Involution darauf an, durch dieses complexe Punktpaar und einen ausserhalb PA liegenden beliebig angenommenen realen Punkt F einen Kreis zu legen.

Sind $G'HJ \propto G'H'J'$ drei Paare entsprechender Punkte der projectiven Punktreihen, durch deren Doppelpunkte der gesuchte Kreis gehen soll, so verbinde man F mit G, H und J ; construire den Kreis, in welchem der auf der Sehne $G'H'$ stehende Peripheriewinkel dem Winkel GFH gleich ist, sowie den Kreis, der HJ zur Sehne und auf derselben einen Peripheriewinkel gleich HFJ hat. Diese beiden Kreise haben ausser H' noch einen realen Punkt K gemein. Da nun in den beiden Büscheln F und K die entsprechenden Winkel gleich sind, so liegen die Punkte F und K und die Schnittpunkte der drei Paar entsprechenden Strahlen auf einem Kreise, und die Strahlen, welche von F und von K aus die Punkte dieses Kreises projiciren, treffen die Gerade GG' in entsprechenden Punkten der beiden projectiven Punktreihen. Also ist dieser Kreis der gesuchte.

B. Die Construction des Kegelschnitts einer Schaar, der eine gegebene Gerade berührt, lässt sich der soeben mitgetheilten leicht nachbilden.

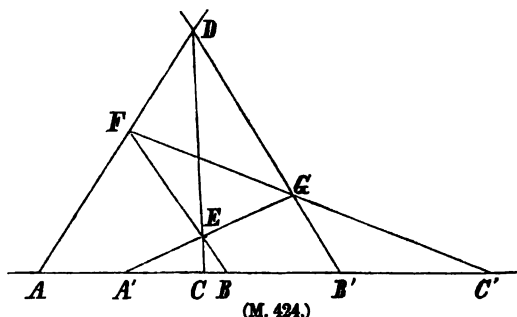
10. A. Wenn eine Gerade T ein Büschelkegelschnitt f berührt, so fallen in den Berührungspunkt die beiden Schnittpunkte von f und T , also zwei Punkte eines Paares der Involution zusammen, welche auf T von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird, folglich ist der Berührungspunkt ein Doppelpunkt dieser Involution. Umgekehrt: Bestimmt man auf einer Geraden T die Involution, in welcher sie die Kegelschnitte eines Büschels durchsetzt, und legt einen Kegelschnitt f des Büschels durch einen Doppelpunkt Δ dieser Involution, so fällt auch der andere Schnittpunkt von f und T in den Punkt Δ , der Kegelschnitt f berührt also die Gerade T .

Hieraus sieht man, dass es zwei Kegelschnitte (die beide real oder beide imaginär sind) eines Büschels giebt, die eine gegebene Gerade berühren; und zugleich, wie man diese Kegelschnitte construirt.

B. Construirt man in der Strahleninvolution der Tangentenpaare, welche von einem Punkte P an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden, die Doppelstrahlen, und construirt den Kegelschnitt φ der Schaar, welcher einen dieser Doppelstrahlen Δ berührt, so kann durch P ausser Δ keine weitere Tangente an φ gezogen werden, also ist P der Berührungspunkt, also geht φ durch P . Hieraus folgt: Es giebt zwei Kegelschnitte einer Schaar, die durch einen gegebenen Punkt gehen, sie berühren die Doppelstrahlen der Strahleninvolution, welche die von dem Punkte an die Kegelschnitte der Schaar gelegten Tangentenpaare bilden.

11. Wenn ein Kegelschnittbüschel die Ecken D, F, E, G eines Vierecks zu Trägern hat, so sind die drei Paare Gegenseiten DE und FG , DF und EG , DG und EF besondere Kegelschnitte des Büschels. Hieraus folgt: Die drei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden in drei Punktpaaren einer Involution geschnitten.

Dies giebt eine Methode, eine quadratische Involution linear zu ergänzen: Sind A und A' , B und B' zwei Paare und soll man den zu C gehörigen Punkt construiren, so verbinde man A, B und C mit einem Punkte D ausserhalb AB' , projicire einen Punkt E der Geraden CD von A' und B aus auf DB' und DA , und durchschneide AB' mit der Geraden FG ; dann ist CC' ein Paar der Involution.



12. Wir knüpfen hieran die Frage nach den Parabeln, die in einem Kegelschnittbüschel enthalten sind und beschränken uns auf den Fall, dass die Kegelschnitte des Büschels vier reale Schnittpunkte B_1, B_2, B_3, B_4 haben. (Vergl. § 11, No. 6).

Wählt man das gemeinsame Polarendreieck zum Achsendreieck, so enthält jeder Kegelschnitt $K \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$, der durch einen der vier Punkte B geht, auch die drei andern; werden die Coordinaten von B_i mit x_i, x_j, x_k bezeichnet, so folgt daher für diese Coordinaten die Proportion:

$$x_{11}^2 : x_{21}^2 : x_{31}^2 = x_{12}^2 : x_{22}^2 : x_{32}^2 = x_{13}^2 : x_{23}^2 : x_{33}^2 = x_{14}^2 : x_{24}^2 : x_{34}^2.$$

Bezeichnet man die positiven Wurzeln aus x_{11}^2 , x_{21}^2 , x_{31}^2 der Reihe nach mit b_1 , b_2 , b_3 , so haben daher die Coordinaten der Punkte B_i die Werthe

$$\begin{aligned} 1. \quad & x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad x_3 = b_3, \\ 2. \quad & x_1 = \frac{b_1}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{-b_3}{\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}}, \\ 3. \quad & x_1 = \frac{b_1}{\frac{b_1}{h_2} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{-b_2}{\frac{b_1}{h_2} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{b_3}{\frac{b_1}{h_2} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \\ 4. \quad & x_1 = \frac{-b_1}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_2 = \frac{b_2}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}, \quad x_3 = \frac{b_3}{-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3}}. \end{aligned}$$

Die erste Coordinatengruppe enthält lauter positive Werthe; von jedem Viereck liegt also ein Eckpunkt im Innern des Dreiecks der Diagonalepunkte. Dieser Punkt werde mit B_1 bezeichnet.

Die Gleichungen der drei Paare Gegenseiten des Vierecks $B_1 B_2 B_3 B_4$ sind

$$\begin{aligned} b_3 x_2 - b_2 x_3 &= 0, & b_3 x_2 + b_2 x_3 &= 0, \\ b_1 x_3 - b_3 x_1 &= 0, & b_1 x_3 + b_3 x_1 &= 0, \\ b_2 x_1 - b_1 x_2 &= 0, & b_2 x_1 + b_1 x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Als Gebilde zweiter Ordnung haben das erste und das zweite Paar die Gleichungen: $(b_3 x_2 - b_2 x_3)(b_3 x_2 + b_2 x_3) = b_3^2 x_2^2 - b_2^2 x_3^2 = 0$,

$$(b_1 x_3 - b_3 x_1)(b_1 x_3 + b_3 x_1) = b_1^2 x_3^2 - b_3^2 x_1^2 = 0.$$

Die Gleichung jedes durch die Punkte B gehenden Kegelschnitts wird daher in der Form erhalten: $(b_3^2 x_2^2 - b_2^2 x_3^2) + \lambda(b_1^2 x_3^2 - b_3^2 x_1^2) = 0$, oder geordnet

$$-\lambda b_3^2 x_1^2 + b_3^2 x_2^2 + (\lambda b_1^2 - b_2^2) x_3^2 = 0.$$

Ist diese Curve eine Parabel, so ist (§ 13, No. 18 und 23):

$$-\frac{1}{\lambda b_3^2 h_1^2} + \frac{1}{b_3^2 h_2^2} + \frac{1}{(\lambda b_1^2 - b_2^2) h_3^2} = 0.$$

Hieraus ergibt sich für λ die quadratische Gleichung

$$1. \quad \frac{b_1^2}{h_2^2} \lambda^2 - \left(\frac{b_1^2}{h_2^2} + \frac{b_2^2}{h_2^2} - \frac{b_3^2}{h_3^2} \right) \lambda + \frac{b_2^2}{h_1^2} = 0.$$

Je nachdem diese Gleichung zwei reale, eine reale, oder zwei conjugirt complexe Wurzeln für λ liefert, hat das Büschel zwei Parabeln, eine Parabel oder keine Parabel.

Die Gleichung hat complexe Wurzeln, wenn

$$\left(\frac{b_1^2}{h_2^2} + \frac{b_2^2}{h_2^2} - \frac{b_3^2}{h_3^2} \right)^2 - 4 \frac{b_1^2}{h_2^2} \cdot \frac{b_2^2}{h_1^2} < 0.$$

Diese Differenz ist bekanntlich das Produkt aus vier linearen Faktoren; man erhält somit als Bedingung für complexe Wurzeln:

$$2. \quad \left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} \right) \left(\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3} \right) \left(\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} \right) \left(-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} \right) > 0.$$

Der erste Faktor ist der positiven Einheit gleich. Von den andern drei Faktoren haben je zwei eine positive Summe, es können also nicht zwei von ihnen negativ sein; die Bedingung 2. erfordert daher, dass jedes der Trinome

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3} &\equiv 1 - \frac{2b_3}{h_3}, \\ \frac{b_1}{h_1} - \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} &\equiv 1 - \frac{2b_2}{h_2}, \\ -\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} &\equiv 1 - \frac{2b_1}{h_1}, \end{aligned}$$

positiv ist, dass mithin b_1 , b_2 , b_3 kleiner sind, als $\frac{1}{2}h_1$, $\frac{1}{2}h_2$, $\frac{1}{2}h_3$.

it, dass in diesem Falle die drei andern Punkte
 seiten des Achsendreiecks anliegenden zweieckigen
 lass B_1 im Innern des Dreiecks $B_2 B_3 B_4$ liegt.
 wenn ein Eckpunkt B_1 eines Vierecks im Innern
 liegt, dieser Punkt positive Coordinaten in Bezug
 lpunkte hat, und daher die Gleichung 2. erfüllt
 Durch vier im Endlichen liegende Punkte
 Parabeln legen, wenn keiner sich im Drei-
 endet.

vier Punkte nur eine Parabel möglich ist, tritt ein,

$$-\frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} \left(-\frac{b_1}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} + \frac{b_3}{h_3} \right) = 0, \quad \text{also}$$

chungen gilt:

$$1, \quad b_2 = \frac{1}{2}h_2, \quad b_3 = \frac{1}{2}h_3.$$

dann einer der Punkte $B_2 B_3 B_4$ unendlich fern.
 hen und einen (in bestimmter Richtung) unend-
 ist eine Parabel eindeutig bestimmt.

$= 0, \quad K_2 = \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 = 0$ die Gleichungen
 dreier Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar, so kann man bei geeigneter
 Wahl des Verhältnisses $r_1 : r_2$ die Gleichung jedes vierten Kegelschnitts des
 Büschels oder der Schaar in der Form schreiben $K = r_1 \gamma_1 K_1 + r_2 \gamma_2 K_2 = 0$.

Der Quotient $r_1 : r_2$ heisst das Doppelverhältniss der vier Kegel-
 schnitte $K_1 K_2 K_3 K_4$ und wird durch $(K_1 K_2 K_3 K_4)$ bezeichnet.

Auf Grund dieser Definition können Kegelschnittbüschel und Kegelschnitt-
 schaaen in den Kreis projectiver Gebilde gezogen werden: Sind $R_1 R_2 R_3$ und
 $R_1' R_2' R_3'$ die Gleichungen für je drei Punkte einer Geraden, oder
 Strahlen eines Büschels, oder Punktpaare einer Punktinvolution,
 oder Strahlenpaare einer Strahleninvolution, oder Kegelschnitte
 eines Büschels oder einer Schaar, und werden je zwei Elemente
 (Punkte, Strahlen, Punktpaare, Strahlenpaare, Kegelschnitte) der beiden Ge-
 bilde auf einander bezogen, für welche $(R_1 R_2 R_3 R_4) = (R_1' R_2' R_3' R_4')$,
 so heissen die beiden Gebilde projectiv.

Beachtet man die Gleichungen der Polaren eines Punktes für die Kegel-
 schnitte eines Büschels $K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K = 0$, so findet
 man sofort: Das Polarenbüschel, welches die Polaren eines Punktes
 in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels bilden, ist mit dem
 Kegelschnittbüschel projectiv. Insbesondere: Das Büschel der Tan-

welche die Kegelschnitte eines Büschels in einem Träger
 chels berühren, ist mit dem Kegelschnittbüschel projectiv.
 lgt aus No. 7: Ein Kegelschnittbüschel und alle die Punkt-
 onen, in denen das Büschel von den Geraden einer Ebene
 ten wird, sind projectiv, und zwar entspricht einem Kegel-
 des Büschels das Punktpaar jeder Involution, das auf dem
 hnitte liegt.

Punktreihe, in welcher eine durch einen Träger gehende
 die Kegelschnitte eines Büschels schneidet, ist mit dem
 projectiv.

so findet man: Die geradlinige Punktreihe, welche die Pole
 eraden in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar bilden,

ist mit der Schaar projectiv. — Die Reihe der Punkte, in welchen die Kegelschnitte einer Schaar einen Träger der Schaar berühren, ist mit der Schaar projectiv. — Die Strahleninvolutionen, welche von den Tangentenpaaren gebildet werden, die man von den Punkten der Ebene an die Kegelschnitte einer Schaar legt, sind mit der Schaar projectiv. — Das Tangentenbüschel, welches von einem Punkte eines Trägers an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden kann, ist mit der Schaar projectiv.

14. Die Aufgabe: Drei Paare entsprechende Elemente einer Punktreihe und eines projectiven Kegelschnittbüschels sind gegeben; man soll zu einem Punkte der Reihe den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels construiren — wird auf folgendem Wege gelöst.

Es seien P_1, P_2, P_3 die gegebenen Punkte, und K_1, K_2, K_3 die gegebenen entsprechenden Kegelschnitte.

a) Ist ein realer Träger des Büschels bekannt, so ziehe man durch denselben eine Gerade und bestimme die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 , in welchen diese Gerade die Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 schneidet. Hierauf construire man den Punkt Q der Punktreihe Q_1, Q_2, Q_3 so, dass $(Q_1, Q_2, Q_3, Q) = (P_1, P_2, P_3, P)$. Dann ist Q ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Führt man diese Construction an vier durch den Träger gezogenen Geraden aus, so hat man mit dem Träger fünf reale Punkte und kann dann nach PASCAL weiter construiren.

β) Ist kein realer Träger bekannt, so construire man die Polaren T_1, T_2, T_3 eines beliebigen Punktes A in Bezug auf die Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 und construire den Strahl T so, dass $(T_1, T_2, T_3, T) = (P_1, P_2, P_3, P)$. Ferner construire man die Schnittpunktpaare B_1, C_1 und B_2, C_2 einer durch A gehenden Geraden a und der Kegelschnitte K_1 und K_2 . Man hat nun das Punktpaar XY der durch B_1, C_1 und B_2, C_2 bestimmten Involution aufzusuchen, das zu dem Punkte A und zu dem Schnittpunkte A' der Geraden a und T harmonisch liegt; dieses Paar ist der Durchschnitt der Geraden a und des gesuchten Kegelschnitts.

Alle Paare, welche zu AA' harmonisch sind, bilden eine Involution, welche A und A' zu Asymptotenpunkten hat. Construirt man zwei in realen Punkten D und E sich schneidende Kreise, welche a in A und A' berühren, so bestimmen dieselben das Kreisbüschel, welches die Gerade a in den Punktpaaren der zu A und A' gehörenden Involution schneidet. Construirt man ferner zwei Kreise, von denen einer durch B_1, C_1 , der andere durch B_2, C_2 geht, und die beide den Punkt D enthalten, so haben diese Kreise noch einen realen Punkt F gemein. Der durch die drei Punkte D, E, F bestimmte Kreis trifft alsdann a in dem gesuchten Punktpaare XY . Wiederholt man diese Construction an noch zwei durch A gehenden Geraden, so hat man dann sechs reale Punkte des gesuchten Kegelschnitts.

Die Auflösung der dual entsprechenden Aufgabe: Von einem Strahlenbüschel und einer projectiven Kegelschnittschaar sind drei Strahlen und die entsprechenden Kegelschnitte gegeben; man soll den Kegelschnitt construiren, der einem Strahle des Büschels entspricht — lässt sich der soeben mitgetheilten Construction leicht nachbilden.

15. Wir schliessen noch einige Betrachtungen über das System von Kegelschnitten einer Ebene an, die zwei Punkte gemein haben, sowie über das dual entsprechende System von Kegelschnitten, die zwei Tangenten gemein haben. Die Gesammtheit der Kegelschnitte einer Ebene, die zwei Punkte gemein haben,

wollen wir als ein System mit zwei Trägern, oder kürzer als punktiges System (von Kegelschnitten) bezeichnen.

Die Kreise einer Ebene haben die beiden imaginären Kreispunkte bilden also einen besonderen Fall eines zweipunktigen Systems.

Die Gerade, welche die realen oder conjugirt complexen Grundpunkte enthält, heiße die Achse des Systems. Je zwei Kegelschnitte des Systems ausser der Achse noch eine gemeinsame Secante; sie mag die zweite der beiden Kegelschnitte heissen.

Wählt man die Träger zu Ecken A_2 und A_3 des Coordinatendreiecks, genügen die Coordinaten $x_1 = x_2 = 0$, und $x_1 = x_3 = 0$ der jedes Systemkegelschnitts; also ist die allgemeine Form der Gleichung

$$1. \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Soll der Kegelschnitt nicht in die Achse und eine weitere Gerade zerfallen, so muss a_{23} von Null verschieden sein, und man kann der Gleichung die Form geben

$$2. \quad K = a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

Ein zweiter Kegelschnitt des Systems habe die Gleichung

$$3. \quad K' = b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

Hieraus folgt

$$4. \quad K - K' = x_1[(a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (a_3 - b_3)x_3] = 0.$$

Hieraus schliessen wir, dass

$$5. \quad L = (a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (a_3 - b_3)x_3 = 0$$

die Gleichung der zweiten Secante von K und K' ist.

Die zweiten gemeinsamen Secanten der drei Paare Kegelschnitte K_1K_2 , K_2K_3 , K_3K_1 seien ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 ; dann ist

$$x_1\ell_1 = K_2 - K_3, \quad x_1\ell_2 = K_3 - K_1, \quad x_1\ell_3 = K_1 - K_2.$$

Hieraus folgt die Identität $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$. Dies ergibt der drei zweiten Secanten dreier Kegelschnitte eines zweipunktigen Systems schneiden sich in einem Punkte.

16. Ein Kegelschnitt K des durch zwei Kegelschnitte K_1, K_2 bestimmten Büschels hat die Gleichung $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$, ohne Beschränkung $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ voraussetzen können.

Die Gleichung irgend eines andern Systemkegelschnitts sei $K' = 0$. Die Gleichung der zweiten Secante L' von K und K' ist alsdann

$$x_1 L' = K - K' = 0.$$

Nun ist $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$; da $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, so kann man schreiben $(\lambda_1 + \lambda_2) K'$; hierdurch erhält man

$$x_1 L' = \lambda_1 (K_1 - K') + \lambda_2 (K_2 - K').$$

Sind $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ die zweiten Secanten von K_1, K' und K_2, K' so ist daher

$$L' = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2.$$

Hieraus folgt, dass der Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels liegt. Da nun der Schnittpunkt von L_1 und L_2 nach No. 14 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels liegt, so haben wir den Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels. Hieraus folgt, dass der Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels liegt. Hieraus folgt, dass der Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels liegt. Hieraus folgt, dass der Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 auf der zweiten Secante des durch die Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmten Büschels liegt.

17. Der soeben entwickelte Satz lehrt die Construction der Kegelschnitte eines Büschels, die einen Kegelschnitt K' berühren, der durch zwei Träger des Büschels geht. Es seien $ABCD$ die Träger des Büschels, und K' gehe durch A und B . Man construirt die zweite Secante L eines Büschelkegelschnitts und des Kegelschnitts K' ; vom Schnittpunkte der Geraden L und CD aus lege man Tangenten an K' ; und construirt die Büschelkegelschnitte, welche durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehen.

18. Die Gesamtheit der Kegelschnitte einer Ebene, die zwei gemeinsame Tangenten haben, heisse ein System mit zwei Grundlinien, oder kürzer ein zweiliniges System. In ähnlicher Weise, wie die analogen Sätze für das zweipunktige System, findet man für das zweilinige System:

Legt man ein Coordinatendreieck zu Grunde, in welchem die gemeinsamen Tangenten die durch A_1 gehenden Seiten sind, so ist die Gleichung eines Systemkegelschnitts $\mathfrak{K} = a_1 u_1^2 + a_2 u_1 u_2 + a_3 u_1 u_3 + u_2 u_3 = 0$.

Die Gleichung des Schnittpunktes des zweiten gemeinsamen Tangentenpaares M der Systemcurven \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 ist

$$M = \frac{1}{u_1} (\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2) = 0.$$

In einem zweilinigen System liegen die drei Schnittpunkte der drei zweiten gemeinsamen Tangentenpaare dreier Kegelschnitte auf einer Geraden; die Schnittpunkte der zweiten gemeinsamen Tangentenpaare eines Kegelschnitts mit den Kegelschnitten einer Schaar liegen auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt des zweiten gemeinsamen Tangentenpaares der Schaar geht.

Mit Hülfe dieser Sätze kann man die beiden Kegelschnitte einer Schaar finden, die einen Kegelschnitt tangiren, der von zwei Grundlinien der Schaar berührt wird.

§ 15. Curven dritter Ordnung. Construction derselben aus neun gegebenen Punkten.

1. Wir geben in den folgenden Abschnitten eine Reihe von Entwicklungen aus der Geometrie der Curven dritter Ordnung, die sich an das bisher Mitgetheilte zunächst anschliessen.

Unter einer Curve n ter Ordnung versteht man eine Curve, deren Gleichung in Punktcoordinaten vom Grade n ist.

Die allgemeine Form der Gleichung einer Curve dritter Ordnung in Bezug auf ein homogenes Coordinatensystem ist

$$f = a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Bildet man die Summe $\sum a_{ikh}x_ix_kx_l$, indem man für jeden der Indices i, k, l der Reihe nach die Nummern 1, 2, 3 nimmt, und setzt dann die Coefficienten a_{ikh} einander gleich, die sich nur durch die Anordnung der Indices unterscheiden, so erhält man die Function f ; es mag daher unter dieser Voraussetzung die Function f durch die Summe $\sum a_{ikh}x_ix_kx_l$ bezeichnet werden.

Soll eine Curve dritter Ordnung durch einen gegebenen Punkt P' gehen, so sind die Coefficienten a_{ikh} so zu wählen, dass der Gleichung $\sum a_{ikh}x_i'x_k'x_l' = 0$ genügt wird; dies ist eine homogene lineare Gleichung für die zehn Grössen a_{ikh} . Durch neun solcher Gleichungen sind die Verhältnisse

$a_{111} : a_{112} : a_{113} : a_{122} : a_{123} : a_{133} : a_{222} : a_{223} : a_{233} : a_{333}$
bestimmt. Hieraus folgt: Eine Curve dritter Ordnung ist durch neun Punkte bestimmt.

Die Gleichung einer durch neun Punkte $P_1, P_2, P_3 \dots P_9$ gehenden Curve dritter Ordnung ist die Bedingung dafür, dass der veränderliche Punkt derselben cubischen Gleichung genügt, wie die gegebenen, dass also die zehn Gleichungen vereint sind

$$\sum a_{ijk} x_i x_j x_k = 0,$$

$$\sum a_{ijk} x_{i1} x_{j1} x_{k1} = 0,$$

$$\sum a_{ijk} x_{i2} x_{j2} x_{k2} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum a_{ijk} x_{i9} x_{j9} x_{k9} = 0.$$

Die Bedingung für den Verein dieser zehn Gleichungen ist

$$f = \begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1^2 x_3 & x_1 x_2^2 & x_1 x_2 x_3 & x_1 x_3^2 & x_2^3 & x_2^2 x_3 & x_2 x_3^2 & x_3^3 \\ x_{11}^3 & x_{11}^2 x_{21} & x_{11}^2 x_{31} & x_{11} x_{21}^2 & x_{11} x_{21} x_{31} & x_{11} x_{31}^2 & x_{21}^3 & x_{21}^2 x_{31} & x_{21} x_{31}^2 & x_{31}^3 \\ x_{12}^3 & x_{12}^2 x_{22} & x_{12}^2 x_{32} & x_{12} x_{22}^2 & x_{12} x_{22} x_{32} & x_{12} x_{32}^2 & x_{22}^3 & x_{22}^2 x_{32} & x_{22} x_{32}^2 & x_{32}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{19}^3 & x_{19}^2 x_{29} & x_{19}^2 x_{39} & x_{19} x_{29}^2 & x_{19} x_{29} x_{39} & x_{19} x_{39}^2 & x_{29}^3 & x_{29}^2 x_{39} & x_{29} x_{39}^2 & x_{39}^3 \end{vmatrix} = 0,$$

also ist $f = 0$ die gesuchte Curvengleichung.

2. Die Coordinaten der Punkte, in denen sich zwei Curven dritter Ordnung schneiden, werden auf folgendem Wege ermittelt:

Die Gleichungen der beiden Curven seien

1. $f' = \sum a_{ijk} x_i x_j x_k = 0,$ 2. $f'' = \sum b_{ijk} x_i x_j x_k = 0.$

Die Coordinaten der Schnittpunkte von f' und f'' sind die Werthe von x_1, x_2, x_3 , die den Gleichungen 1. und 2. und der Gleichung

3. $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$

genügen. Aus 3. zieht man

4. $x_3 = h_3 \left(1 - \frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2} \right)$

und setzt dies in 1. und 2. ein; dann erhält man zwei nicht homogene cubische Gleichungen zwischen x_1 und x_2 , die nach Potenzen von x_2 geordnet in der Form erscheinen

5. $F' = A_0 x_2^3 + A_1 x_2^2 + A_2 x_2 + A_3 = 0,$

6. $F'' = B_0 x_2^3 + B_1 x_2^2 + B_2 x_2 + B_3 = 0.$

Hierin sind $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ Ausdrücke von demselben Grade in x_1 , den der Index angiebt; A_0 und B_0 sind von den Coordinaten unabhängige Zahlen.

Um aus diesen beiden Gleichungen x_2 zu eliminiren, multipliciren wir die Gleichungen 5. und 6. der Reihe nach mit x_2 und x_2^2 und erhalten so im Ganzen die sechs Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl} F' & = & A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0, \\ x_2 F' & = & A_3 x_2 + A_2 x_2^2 + A_1 x_2^3 + A_0 x_2^4 = 0, \\ x_2^2 F' & = & A_3 x_2^2 + A_2 x_2^3 + A_1 x_2^4 + A_0 x_2^5 = 0, \\ F'' & = & B_3 + B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 = 0, \\ x_2 F'' & = & B_3 x_2 + B_2 x_2^2 + B_1 x_2^3 + B_0 x_2^4 = 0, \\ x_2^2 F'' & = & B_3 x_2^2 + B_2 x_2^3 + B_1 x_2^4 + B_0 x_2^5 = 0. \end{array}$$

Betrachtet man diese sechs Gleichungen als homogene lineare Gleichungen der sechs Grössen $x_2^0, x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^5$, so folgt

$$8. \quad R = \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Denkt man sich statt R zunächst eine andere Determinante R' , welche aus R hervorgeht, indem man die Nullen jeder Zeile durch Symbole A und B ersetzt, die man derart mit Indices versieht, dass die absteigende Folge der Indices in jeder Zeile nicht gestört wird (so dass man also die Nullen der ersten Zeile der Reihe nach durch A_{-1} und A_{-2} , die der letzten durch B_3 und B_4 ersetzt), und bezeichnet dann das Element, welches der i ten Zeile und der k ten Colonne angehört, mit c_{ik} , so überzeugt man sich leicht, dass in den Elementenpaaren $c_{ik}c_{rs}$ und $c_{is}c_{rk}$, wenn man die c wieder durch die Elemente von R' ersetzt, die Summe der unteren Indices dieselbe ist; z. B. ist $c_{23}c_{46} = A_2B_{-2}$, und $c_{26}c_{43} = A_{-1}B_1$, die Summe der Indices also in beiden Paaren gleich Null.

Hieraus folgt sofort, dass in der Determinante R' die Summe der Indices aller Glieder gleich der Indexsumme des Diagonalgliedes, also $= 9$ ist. Diese Thatsache wird nicht geändert, wenn man $A_5 = A_4 = A_{-1} = A_{-2} = B_5 = B_4 = B_{-1} = B_{-2} = 0$ setzt, und dadurch zur Determinante R zurückkehrt. Da nun der Index an A oder B den Grad dieser Function in Bezug auf die Coordinate x_1 angiebt, so folgt: Die Determinante R ist vom neunten Grade bezüglich der Unbekannten x_1 .

Wählt man nun für x_1 eine der neun Wurzeln der Gleichung $R = 0$, und setzt diese in die beiden Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$ ein, so lässt sich zeigen, dass diese beiden Gleichungen wenigstens eine gemeinsame Wurzel x_2 haben. Denn multiplicirt man die Colonnen in R der Reihe nach mit $x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_2^5$ und addirt die zweite etc. zur ersten Colonne, so erhält man

$$R = \begin{vmatrix} F', & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ x_2 F', & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ x_2^2 F', & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ F'', & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ x_2 F'', & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ x_2^2 F'', & 0 & B_3 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = PF' + QF''.$$

Hierin sind P und Q quadratische Functionen von x_2 . Nimmt man nun für x_1 eine der neun Wurzeln von $R = 0$, sowie für x_2 der Reihe nach die zugehörigen Wurzeln von $F'' = 0$, so wird $R \equiv PF' + QF'' = 0$, und $F'' = 0$, also auch $PF' = 0$. Da nun P vom zweiten Grade ist, so muss für wenigstens eine der drei Wurzeln x_2 die Function F' verschwinden.

Um diese Wurzel zu bestimmen geht man auf die Gleichungen zurück

$$\begin{aligned} F' &\equiv A_3 + A_2x_2 + A_1x_2^2 + A_0x_2^3 = 0, \\ x_2F' &\equiv A_3x_2 + A_2x_2^2 + A_1x_2 + A_0 = 0, \\ F'' &\equiv B_3 + B_2x_2 + B_1x_2^2 + B_0x_2^3 = 0, \\ x_2F'' &\equiv B_3x_2 + B_2x_2^2 + B_1x_2^3 + B_0 = 0. \end{aligned}$$

Man schliesst aus ihnen das Verschwinden der Determinante

$$9. \quad S = \begin{vmatrix} A_3 + A_2x_2, & A_1 & A_0 & 0 \\ A_3x_2, & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_3 + B_2x_2, & B_1 & B_2 & 0 \\ B_3x_2, & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} \equiv S_0 + S_1x_2 = 0,$$

und erhält die gesuchte Wurzel $x_2 = -S_0 : S_1$.

Haben die Gleichungen F' und F'' zu der Wurzel x_1 zwei gemeinsame Wurzeln für x_2 , so verschwindet S identisch, und zur Berechnung der beiden Wurzeln genügen die beiden Gleichungen

$$F' \equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0,$$

$$F'' \equiv B_3 + B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 = 0,$$

aus denen man durch Elimination von x_2^3 die quadratische Gleichung erhält

$$A_0(B_3 + B_2 x_2 + B_1 x_2^2) - B_0(A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2) = 0,$$

welche die beiden gemeinsamen Wurzeln x_2 ergibt.

Im Allgemeinen gehört zu jeder Wurzel x_1 der Gleichung $R = 0$ eine gemeinsame Wurzel $x_2 = -S_0 : S_1$ der Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$. Wir schliessen hieraus: Zwei Curven dritter Ordnung haben neun Schnittpunkte; davon ist wenigstens einer real.

3. Soll eine Curve III. O. durch acht Punkte P_1, P_2, \dots, P_8 gelegt werden, so stelle man die neun Gleichungen auf

$$1. \quad a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{113}x_1^2x_3 + \dots + a_{333}x_3^3 = 0,$$

$$2. \quad a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_{21} + 3a_{113}x_1^2x_{31} + \dots + a_{333}x_{31}^3 = 0,$$

$$3. \quad a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_{22} + 3a_{113}x_1^2x_{32} + \dots + a_{333}x_{32}^3 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$9. \quad a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_{28} + 3a_{113}x_1^2x_{38} + \dots + a_{333}x_{38}^3 = 0.$$

Man schliesst hieraus das Verschwinden der Determinante

$$10. f \equiv \begin{vmatrix} a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2, & x_1^2x_3, & x_1x_2^2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_{21}, & x_1^2x_{31}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{31}^3 \\ a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_{22}, & x_1^2x_{32}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{32}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_{28}, & x_1^2x_{38}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{38}^3 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante zerfällt in die Summe zweier Determinanten

$$11. \quad f \equiv a_{111}f' + 3a_{112}f'',$$

wobei f' und f'' die Functionen dritten Grades sind

$$12. \quad f' = \begin{vmatrix} x_1^3, & x_1^2x_3, & x_1^2x_2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ x_1^3, & x_1^2x_{31}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{31}^3 \\ x_1^3, & x_1^2x_{32}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{32}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^3, & x_1^2x_{38}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{38}^3 \\ x_1^2x_2, & x_1^2x_3, & x_1^2x_2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ x_1^2x_{21}, & x_1^2x_{31}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{31}^3 \\ x_1^2x_{22}, & x_1^2x_{32}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^2x_{28}, & x_1^2x_{38}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{38}^3 \end{vmatrix},$$

$$13. \quad f'' = \begin{vmatrix} x_1^3, & x_1^2x_3, & x_1^2x_2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ x_1^3, & x_1^2x_{31}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{31}^3 \\ x_1^3, & x_1^2x_{32}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{32}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^3, & x_1^2x_{38}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{38}^3 \\ x_1^2x_2, & x_1^2x_3, & x_1^2x_2, & x_1x_2x_3, & x_1x_3^2, & x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2x_3^2, & x_3^3 \\ x_1^2x_{21}, & x_1^2x_{31}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{31}^3 \\ x_1^2x_{22}, & x_1^2x_{32}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^2x_{28}, & x_1^2x_{38}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{38}^3 \end{vmatrix}.$$

Die Gesammtheit der durch die gegebenen acht Punkte gehenden Curven dritter Ordnung ergibt sich, wenn man in 11. dem Verhältniss der beiden unbestimmt gebliebenen Coefficienten $a_{111} : 3a_{112}$ alle möglichen Werthe giebt.

Aus 11. folgt, dass alle Punkte, für welche $f' = 0$ und $f'' = 0$ ist, auch auf der Curve $f = 0$ liegen. Nun sind $f' = 0$ und $f'' = 0$ zwei völlig bestimmte Curven dritter Ordnung, haben also neun bestimmte Schnittpunkte. Unter diesen sind die acht gegebenen Punkte, da für jeden derselben die erste Zeile in f' und f'' mit einer der übrigen identisch wird, und daher f' und f'' verschwinden. Wir schliessen daher: Alle Curven dritter Ordnung, die durch acht gegebene Punkte gehen, haben noch einen durch die gegebenen Punkte bestimmten neunten realen Punkt gemein.

Oder: Wenn zwei Curven III. O. A und B durch acht Punkte einer Curve III. O. C gehen, so liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C .

4. Die Coordinaten der Schnittpunkte der Curve $\sum a_{ikh} x_i x_k x_l = 0$ und der Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

$$1. \sum a_{ikh} x_i x_k x_l = 0, \quad 2. a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad 3. \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Aus den Gleichungen 2. und 3. kann man x_2 und x_3 linear durch x_1 ausdrücken. Setzt man diese Werthe in 1., so erhält man eine cubische Gleichung für x_1 ; zu jeder der drei Wurzeln folgen dann aus 2. und 3. die zugehörigen Werthe von x_2 und x_3 . Wir sehen daher: Eine Curve dritter Ordnung hat mit einer Geraden drei Schnittpunkte, von denen wenigstens einer real ist.

Legt man eine Gerade durch zwei Punkte PP_1 einer Curve III. O. C''' , so hat dieselbe mit C''' noch einen Punkt Q gemein. Rückt man P_1 an P , bis der Abstand PP_1 verschwindet, so bleibt Q im Allgemeinen in endlicher Entfernung von P_1 und die Gerade PP_1 wird zur Tangente der Curve. Wir finden daher: Eine Gerade, die eine Curve dritter Ordnung in einem Punkte P berührt, schneidet die Curve noch in einem realen Punkte Q .

Dieser Punkt Q wird der Begleiter des Punktes P genannt.

Um die Coordinaten der Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung und eines Kegelschnittes zu finden, setze man

$$4. \quad x_3 = h_3 \left(1 - \frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2} \right)$$

in die Gleichung der C''' und des Kegelschnittes ein und ordne die nun entstehenden Gleichungen nach Potenzen von x_2 . Man erhält aus den Gleichungen der C''' und des Kegelschnittes

$$5. \quad F \equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0,$$

$$6. \quad G \equiv B_2 + B_1 x_1 + B_0 x_2^2 = 0,$$

wobei für die A und B dasselbe gilt wie in No. 2.

Aus dem Verein der Gleichungen

$$F \equiv A_3 + A_2 x_2 + A_1 x_2^2 + A_0 x_2^3 = 0,$$

$$x_2 F \equiv A_3 x_2 + A_2 x_2^2 + A_1 x_2^3 + A_0 x_2^4 = 0,$$

$$G \equiv B_2 + B_1 x_2 + B_0 x_2^2 = 0,$$

$$x_2 G \equiv B_2 x_2 + B_1 x_2^2 + B_0 x_2^3 = 0,$$

$$x_2^2 G \equiv B_2 x_2^2 + B_1 x_2^3 + B_0 x_2^4 = 0,$$

folgt das Verschwinden der Determinante

$$7. \quad R \equiv \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sieht leicht, dass R sechsten Grades für x_1 ist.

Multiplicirt man die Colonnen in R von der zweiten an der Reihe nach mit x_2 , x_2^2 , x_2^3 , x_2^4 und addirt sie dann zur ersten, so entsteht

$$8. \quad R \equiv \begin{vmatrix} F & A_2 & A_1 & A_0 & 0 \\ x_2 F & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ G & B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ x_2 G & B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ x_2^2 G & 0 & B_2 & B_1 & B_0 \end{vmatrix} \equiv PF + QG,$$

x_2 ist. Setzt man nun in $PF + QG$ für x_1 eine Wurzel der Gleichung 7. und alsdann für x_2 der Reihe nach die beiden zugehörigen Wurzeln der Gleichung $G = 0$ ein, so folgt, dass auch $PF = 0$ ist; da nun P linear in x_2 ist, so muss wenigstens für einen der beiden Werthe von x_2 die Function F verschwinden. Diese gemeinsame Wurzel der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ findet man durch Zusammenstellung der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} F &= A_3 + A_2x_2 + A_1x_2^2 + A_0x_2^3 = 0, \\ G &= B_3 + B_2x_2 + B_1x_2^2 + B_0x_2^3 = 0, \\ x_2G &= B_3x_2 + B_2x_2^2 + B_1x_2^3 + B_0x_2^4 = 0, \end{aligned}$$

aus deren Verein sich ergibt

$$S = \begin{vmatrix} A_3 + A_2x_2, & A_1 & A_0 \\ B_3 + B_2x_2, & B_1 & B_0 \\ B_3x_2, & B_2 & B_1 \end{vmatrix} = S_0 + S_1x_2 = 0.$$

Hieraus folgt die gesuchte Wurzel $x_2 = -S_0 : S_1$. Verschwinden S_0 und S_1 identisch, so haben F und G zu der ausgewählten Wurzel x_1 der Gleichung $R = 0$ zwei zugehörige gemeinsame Wurzeln x_2 , nämlich die Wurzeln der Gleichung $G = 0$. Im Allgemeinen gehört zu jeder der sechs Wurzeln x_1 (der Gleichung 7) eine gemeinsame Wurzel $x_2 = -S_0 : S_1$ der Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$; berechnet man zu jedem dieser Werthe von x_1 und x_2 noch die Coordinate x_3 nach der Gleichung 4., so hat man die Coordinaten eines Schnittpunktes. Wir haben also gefunden: Eine Curve dritter Ordnung und ein Kegelschnitt haben sechs Schnittpunkte.

5. Schneidet man eine C''' durch eine Gerade T_1 in den Punkten 1, 2, 3 und durch eine andere Gerade T_2 in 4, 5, 6, verbindet diese Punkte paarweis durch die drei Geraden S_1, S_2, S_3 , und verbindet die dritten Schnittpunkte 7 und 8 der Geraden S_1 und S_2 mit C''' durch eine Gerade T_3 , so hat man zwei Curven III. O., nämlich die Geradentripel T_1, T_2, T_3 und S_1, S_2, S_3 , die acht Schnittpunkte, nämlich die Punkte 1...8, auf C''' haben; also liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C''' , d. i. T_3 geht durch den Punkt 9, in welchem C''' von S_3 geschnitten wird. Werden also die Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung und zweier Geraden paarweis durch drei Gerade verbunden, so schneiden diese die Curve in drei Punkten einer Geraden.

Rückt T_3 unendlich nahe an T_1 , so werden S_1, S_2, S_3 zu Tangenten der Curve, und 7, 8, 9 werden die Begleiter von 1, 2, 3. Liegen drei Punkte einer Curve dritter Ordnung auf einer Geraden, so liegen auch ihre Begleiter auf einer Geraden.

Es kann sich ereignen, dass eine Gerade mit einer Curve dritter Ordnung drei zusammenfallende Punkte gemein hat. Eine solche Gerade heisst Wendetangente der Curve, der Punkt heisst Wendepunkt. Denkt man sich jeden von zwei Wendepunkten in drei unendlich nahe Punkte aufgelöst, so schneiden die drei Geraden, welche diese Punkte paarweis verbinden, die Curve wieder in drei unendlich nahen Punkten; da nun diese auf einer Geraden liegen, so folgt: Eine Gerade, die zwei Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung verbindet, trifft die Curve noch in einem dritten Wendepunkte.

6. Verbindet man die sechs Schnittpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer Curve dritter Ordnung C''' und eines Kegelschnitts K paarweis durch drei Gerade T_1, T_2, T_3 , durchschneidet mit diesen C''' in den Punkten 7 8 9 und verbindet 7 und 8 durch eine Gerade S , so hat man zwei Curven dritter Ordnung, nämlich das Geradentripel T_1, T_2, T_3 und den Verein des Kegelschnitts K und der Geraden S ,

welche acht Schnittpunkte 1 ... 8 auf C''' haben; also liegt auch der neunte Schnittpunkt auf C''' , d. i. S geht durch 9. Wir schliessen daher: Die drei Geraden, welche die sechs Schnittpunkte eines Kegelschnitts und einer Curve III. O. paarweis verbinden, schneiden die Curve in drei Punkten einer Geraden. Wenn ein Kegelschnitt eine Curve III. O. in drei Punkten berührt, so liegen die Begleiter der Berührungspunkte in einer Geraden.

Legt man durch die Schnittpunkte 1, 2, 3 einer Curve III. O. und einer Geraden S drei Gerade $T_1 T_2 T_3$, welche die C''' in den sechs weiteren Punkten 4, 5, 6, 7, 8, 9 treffen, und legt durch die fünf Punkte 4, 5, 6, 7, 8 einen Kegelschnitt K , so haben das Geradentripel $T_1 T_2 T_3$ und der Verein von S und K acht Schnittpunkte 1 ... 8 auf C''' ; also liegt auch der neunte auf C''' , d. i. K geht durch 9. Hieraus folgen die Sätze: Liegen von den neun Punkten, in welchen eine Curve III. O. von drei Geraden geschnitten wird, drei auf einer Geraden, so liegen die andern sechs auf einem Kegelschnitte. — Zieht man durch jeden dreier auf einer Geraden liegenden Punkte einer C''' eine Tangente an dieselbe, so wird sie in diesen drei Punkten von einem Kegelschnitte berührt. — Zwei durch einen Punkt einer C''' gezogene Gerade und eine durch den Begleiter gehende treffen die C''' in sechs Punkten eines Kegelschnitts. — Drei durch einen Wendepunkt einer C''' gehende Gerade treffen die C''' in sechs Punkten eines Kegelschnitts.

7. Legt man durch vier Punkte $ABCD$ einer C''' einen Kegelschnitt K_1 , und verbindet die beiden fernen Schnittpunkte 5, 6 von K_1 und C''' durch eine Gerade T_1 ; legt man ferner durch $ABCD$ einen andern Kegelschnitt K_2 , und zieht die Gerade T_2 durch die ferneren beiden Schnittpunkte 7, 8 der Curven C''' und K_2 ; so hat man zwei Curven III. O. nämlich den Verein von K_1 und T_1 und den von K_2 und T_2 , welche die acht Schnittpunkte $ABCD$ 5 6 7 8 auf der Curve C''' haben; mithin liegt auch ihr neunter Schnittpunkt auf C''' , also schneiden sich T_1 und T_2 in einem Punkte E der Curve C''' .

Dieser Punkt E ist nur von K_1 abhängig; denn durch K_1 sind die Punkte 5 und 6, also die Gerade T_1 , also ihr weiterer Schnittpunkt E mit C''' bestimmt. Setzt man nun für K_2 nach einander alle Kegelschnitte des Büschels mit den Trägern $ABCD$, so ändert T_2 seine Lage, geht aber immer durch E , beschreibt also ein Strahlbüschel, dessen Träger E auf C''' liegt. Wir haben daher: Liegen die Träger eines Kegelschnittbüschels auf einer Curve III. O. so bilden die Geraden, welche die weiteren zwei Schnittpunkte jedes Büschelkegelschnitts und der Curve verbinden, ein Strahlbüschel, dessen Träger auf der Curve liegt.

8. Die Gleichung jeder Curve III. O. C''' , die durch die neun Punkte $ABCD$ 5 6 7 8 E geht, ist unter der Form enthalten

$$1. \quad f = a_1 K_1 T_2 + a_2 K_2 T_1 = 0;$$

denn man kann das Verhältniss $a_1 : a_2$ immer so bestimmen, dass der Gleichung $f = 0$ durch einen beliebigen Punkt P_0 der Curve C''' genügt wird, der mit keinem der Punkte $A \dots E$ zusammenfällt. Bezeichnet man nämlich die Werthe, welche die Functionen $K_2 K_1 T_2 T_1$ für die Coordinaten von P_0 annehmen, mit $K_{20} K_{10} T_{20} T_{10}$, so nehme man $a_1 : a_2 = K_{20} T_{10} : -K_{10} T_{20}$, also

$$2. \quad f = K_{20} T_{10} \cdot K_1 T_2 - K_{10} T_{20} \cdot K_2 T_1 = 0;$$

diese wird durch die Coordinaten von P_0 identisch. Da nun die Curve f mit

lich $ABCD5678EP_0$, so ist f mit C'''

chels $ABCD$ hat die Gleichung

$$K_1 + \lambda_2 K_2 = 0.$$

egelschnitts mit f zu erhalten, ersetzen wir
ichung 1. die Grösse K_2 durch $-\lambda_1 K_1 : \lambda_2$

$$\lambda_1 a_2 T_1) K_1 = 0.$$

befriedigen also theils $K_1 = 0$, theils die

$$T_2 - \lambda_1 a_2 T_1 = 0;$$

Kegelschnittbüschels; die letztere Gleichung,
mittpunkten der Curven K und f erfüllt wird,

Strahlbüschels $T_2 T_1$, dessen Träger E ist.
iebt sich sofort:

essen Träger auf einer Curve III. O.
Strahlen, welche die beiden übrigen
gelschnitts und der Curve III. O. ent-

so auf unendlich vielfache Weise als
egelschnittbüschels und eines projec-
t werden. Man kann dabei die Träger
 D beliebig auf der Curve auswählen;
s ist durch $ABCD$ eindeutig bestimmt.
unkten $ABCD$ gegenüberliegende Punkt.
gezeigt worden, wie man bei einem Strahl-
schnittbüschel zu jedem Strahle T den zuge-
rd früher wurde gezeigt, wie man die Schnitt-
gelschnitte findet.

ritter Ordnung aus neun gegebenen
er gelöst, sobald man im Stande ist, aus
Curve dritter Ordnung zu vierten der-
1 Punkt zu construiren.

enen Punkte, und nimmt man wieder $ABCD$

so kommt es darauf an, zu den fünf Kegel-
ls, die der Reihe nach durch die Punkte 5, 6,
onstruiren, so dass die Strahlen $T_5 T_6 T_7 T_8 T_9$,
ch 5, 6, 7, 8, 9 gehen, mit den Kegelschnitten
it erreicht, wenn die beiden Doppelverhältniss-

$$= (K_5 K_6 K_7 K_8) \text{ und}$$

$$= (K_5 K_6 K_7 K_9).$$

Kegelschnitten eines Büschels ist dem Doppel-
welche die Kegelschnitte in einem Träger
uns daher durch die Forderungen 1. und 2.

Den Ort der Punkte zu construiren,

Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch Strahlen pro-
erhältniss von vier gegebenen Strahlen

Diese Aufgabe haben wir bereits gelöst; wir haben in § 11, No. 15 A gefunden, dass dieser Ort ein Kegelschnitt ist, der durch die vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geht. Construiert man nun die Tangenten $S_5 S_6 S_7 S_8 S_9$, welche die Kegelschnitte $K_5 K_6 K_7 K_8 K_9$ z. B. in A berühren, und hierauf den Kegelschnitt H_1 , auf dem die Punkte liegen, von denen aus die Punkte 5, 6, 7, 8 unter dem Doppelverhältniss $(S_5 S_6 S_7 S_8)$ projectirt werden; sowie den Kegelschnitt H_2 , auf dem die Punkte liegen, von denen aus die Punkte 5, 6, 7, 9 unter dem Doppelverhältniss $(S_5 S_6 S_7 S_9)$ projectirt werden, so geht H_1 durch 5, 6, 7, 8 und H_2 durch 5, 6, 7, 9; H_1 und H_2 haben die drei gegebenen Punkte 5, 6, 7 gemein, und schneiden sich daher in einem vierten realen Punkte; die Strahlen, welche denselben mit 5, 6, 7, 8, 9 verbinden, genügen den beiden Gleichungen

$$(T_5 T_6 T_7 T_8) = (S_5 S_6 S_7 S_8), \quad (T_5 T_6 T_7 T_9) = (S_5 S_6 S_7 S_9),$$

also auch den Gleichungen 1. und 2. Der vierte Schnittpunkt, den die Kegelschnitte H_1 und H_2 ausser den Punkten 5, 6, 7 gemein haben, ist daher der gesuchte Punkt E , der den Punkten A, B, C, D gegenüberliegt.

Hiermit ist die Aufgabe, eine Curve dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten zu construiren, erledigt.

10. Diese Entwicklungen lassen noch einige brauchbare Folgerungen zu:

Der Ort der Punkte, welche vier Punkten $ABCD$ von acht gegebenen Punkten $ABCD 5 6 7 8$ in allen durch diese acht Punkte gehenden Curven dritter Ordnung gegenüberliegen, ist der Kegelschnitt H_1 , von dem aus die Punkte 5, 6, 7, 8 durch Strahlen projectirt werden, die dasselbe Doppelverhältniss haben, wie die durch diese Punkte gehenden Kegelschnitte des Büschels $ABCD$.

Ist 9 der neunte Schnittpunkt aller durch $ABCD 5 6 7 8$ gehenden Curven dritter Ordnung, sind E und E_1 Punkte des Kegelschnitts H_1 , und bezeichnet man die von E aus durch 5, 6 . . . gehenden Strahlen durch $E(5, 6 \dots)$, sowie die durch $ABCD$ nach 5, 6 . . . gehenden Kegelschnitte durch $ABCD(5, 6 \dots)$, so ist $ABCD(5, 6, 7, 8, 9) \asymp E(5, 6, 7, 8, 9)$, $ABCD(5, 6, 7, 8, 9) \asymp E'(5, 6, 7, 8, 9)$, mithin hat man die projective Beziehung $E(5, 6, 7, 8, 9) \asymp E'(5, 6, 7, 8, 9)$, also liegen die Punkte $5 6 7 8 E E'$ und 9 auf demselben Kegelschnitte. Der neunte Schnittpunkt aller durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung liegt also auf dem Kegelschnitte der Punkte, die vierten von den acht Punkten in allen diesen Curven gegenüberliegen.

Construiert man den Kegelschnitt J der Punkte, die den Punkten $A, B, C, 5$ in den durch $A, B, C, D, 5, 6, 7, 8$ gehenden Curven III. O. gegenüberliegen, so liegt der neunte Schnittpunkt 9 dieser Curven auch auf J . Die Kegelschnitte H_1 und J haben die gegebenen Punkte 6, 7, 8 gemein, mithin ist 9 der vierte Schnittpunkt von H_1 und J . Hierdurch ist die Aufgabe gelöst: Den neunten Punkt zu construiren, in dem sich alle durch acht gegebene Punkte gehenden Curven dritter Ordnung schneiden.

11. Die Aufgabe: Von den sechs Schnittpunkten eines Kegelschnitts K und einer Curve dritter Ordnung sind vier gegeben, man soll die beiden andern construiren, ist nun leicht zu lösen. Man sucht den Punkt E , der den vier gegebenen Punkten $ABCD$ in C''' gegenüberliegt, und construiert den Strahl T des Büschels E , der dem Kegelschnitt K des Büschels $ABCD$ entspricht; die Schnittpunkte von T und K sind die gesuchten Punkte.

in derselben aus neun gegebenen Punkten

3CD zweier Curven dritte C''' und Γ''' gegeben, und von jeder noch fünf Punkte, so den Kegelschnitt construiren, auf dem die übrigen fünf Schritte 5, 6, 7, 8, 9 liegen.

Man construire die Punkte E und E' , die den Punkten $ABCD$ Γ''' gegenüberliegen. Die Strahlbüschel E und E' , die mit dem Kegelschnitt die Curven C''' und Γ''' erzeugen, sind projectiv mit dem Kegelschnitt, also auch unter einander projectiv; die Schnittpunkte entsprechender Strahlen bilden also einen Kegelschnitt K . Die Strahlen beider Büschel durch 5, 6, 7, 8, 9 gehen, entsprechen den durch diese Punkte gehen den Strahlen Γ''' , sind also entsprechende Strahlen; also liegen diese fünf Punkte dem Kegelschnitt K .

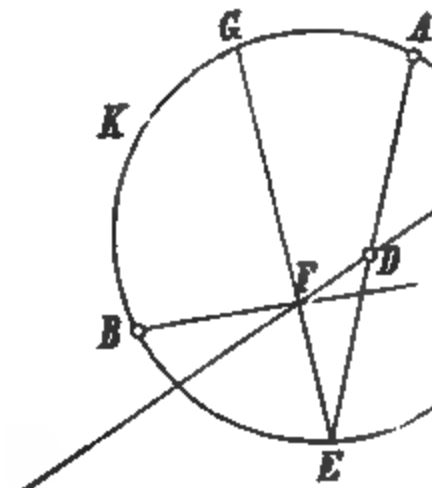
Die Construction der fehlenden vier Schnittpunkte 6, 7, 8, 9 Curven dritter Ordnung C''' und Γ''' , von denen fünf Schritte $A, B, C, D, 5$ gegeben sind, kann auf die Construction der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zurückgeführt werden; denn construirt man zu den Schnittpunkten $ABCD$ den Kegelschnitt K , auf dem die Punkte 5, 6, 7, 8, 9 liegen, sowie zu den gegebenen Punkten $ABC5$ den Kegelschnitt K' , so sind die unbekannten vier Punkte die gemeinsamen Punkte von K und K' .

Sind sechs von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung gegeben, so construirt man zu fünf von ihnen den Kegelschnitt K und K' ; diese haben dann den sechsten bekannten Punkt gemein. Die Aufgabe ist daher darauf reducirt, die drei unbekannten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu construiren, die einen gegebenen Kegelschnitt gemein haben.

Sind sieben von den neun Schnittpunkten gegeben, so ist die Aufgabe von den Kegelschnitten K und K' bereits zwei Schnittpunkte bekannt; kann daher die beiden andern Schnittpunkte der Curven mit Lineal und Zirkel construiren.

13. Die Aufgabe: Zu drei gegebenen Schnittpunkten einer Geraden mit einem Kegelschnitt und einer Curve dritter Ordnung die fehlenden drei Schnittpunkte zu construiren, kann zugleich mit der Aufgabe gelöst werden: Die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einer C''' zu finden, wenn ein Schnittpunkt gegeben ist.

Besteht eine Curve III. O. C''' aus einem Kegelschnitt K und einer Geraden T , so kann der Punkt, der drei Punkten ABC des Kegelschnitts und einem Punkte D der Geraden gegenüberliegt, in einfachster Weise dadurch gefunden werden, dass man aus dem Kegelschnittbüschel $ABCD$ einen möglichst einfachen Kegelschnitt, ein Geradenpaar, herausgreift. Wählt man z. B. das Geradenpaar AD, BC , und durchschneidet K mit AD in E , und T mit BC in F , so ist der Schnittpunkt G von K und EF der gesuchte Punkt. Führt man die gleiche Construction mit dem



(M. 425.)

paaren DB , AC und DC , AB aus, so bestimmt man dadurch zugleich die projective Beziehung des Strahlbüschels G und des Kegelschnittbüschels $ABCD$.

Ist nun eine Curve dritter Ordnung Γ''' durch die Punkte A , B , C , D und fünf weitere Punkte bestimmt, und soll man den Kegelschnitt construiren, der die fünf übrigen Schnittpunkte von C''' und Γ''' enthält, so bestimme man den Punkt H , der $ABCD$ in Γ''' gegenüberliegt, sowie die Strahlen des Büschels H , die den drei Geradenpaaren des Büschels $ABCD$ entsprechen; dadurch ist die projective Beziehung der Strahlbüschel G und H bestimmt, und mithin der von ihnen erzeugte, gesuchte Kegelschnitt gefunden.

Dieser Kegelschnitt enthält die drei fehlenden Schnittpunkte von Γ''' und K , sowie die beiden fehlenden von Γ''' und T .

Hierdurch ist die zweite der gestellten beiden Aufgaben gelöst, und die erste ist auf das Fundamentalproblem cubischer Aufgaben zurückgeführt: Ein Schnittpunkt zweier Kegelschnitte (G) ist gegeben, man soll die drei andern finden.

14. Zwei Strahlenpaare, welche einen gemeinsamen Träger haben, sind Ausartungen von Curven zweiter Ordnung, und können ebenso, wie zwei eigentliche Kegelschnitte, zur Erzeugung eines Kegelschnittbüschels dienen.

Sind T und T' die Strahlen des einen Paares, so sind die Gleichungen der Strahlen des andern Paares von der Form $aT + a'T' = 0$, $bT + b'T' = 0$, mithin sind die Gleichungen der beiden Paare

$$1. \quad TT' = 0 \quad \text{und} \quad (aT + a'T')(bT + b'T') = 0.$$

Die Gleichung irgend eines Kegelschnitts des von den beiden Paaren bestimmten Kegelschnittbüschels ist

$$2. \quad K = \lambda_1 TT' + \lambda_2 (aT + a'T')(bT + b'T') = 0.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so erhält man

$$K = \lambda_2 ab \cdot T^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 a'b + \lambda_2 ab') TT' + \lambda_2 a'b' \cdot T'^2 = 0.$$

Die Function K ist eine homogene quadratische Function der Grössen T und T' , und kann daher in zwei in Bezug auf T , T' homogene lineare Faktoren zerlegt werden, die sich durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$3. \quad \lambda_2 ab \left(\frac{T'}{T} \right)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 a'b + \lambda_2 ab') \frac{T'}{T} + \lambda_2 a'b' = 0$$

in Bezug auf die Unbekannte $T': T$ ergeben; findet man aus 3. die Wurzeln α und β , so zerfällt K , abgesehen von einem constanten Faktor, in das Produkt der linearen Functionen $T - \alpha T'$ und $T - \beta T'$, also zerfällt der Kegelschnitt $K = 0$ in die beiden Geraden $T - \alpha T' = 0$ und $T - \beta T' = 0$.

Das Kegelschnittbüschel besteht daher aus lauter Geradenpaaren. Da nun diese Geradenpaare eine Transversale in einer quadratischen Punktinvolution schneiden, so folgt, dass dieselben die Strahlenpaare einer quadratischen Strahleninvolution bilden. Wir finden daher: Die Strahlenpaare einer quadratischen Involution sind als die Kegelschnitte eines ausgearteten Kegelschnittbüschels zu betrachten.

Eine Strahleninvolution und ein projectives Strahlenbüschel erzeugen eine Curve III. O. C''' von besonderer Art; jede durch den Träger D der Involution gehende Gerade T hat nämlich mit C''' ausser D nur noch einen Punkt gemein, nämlich den Schnitt von T mit dem Strahl des projectiven Büschels, welches dem Strahlenpaare der Involution entspricht, zu welchem T gehört. Bei allen durch D gehenden Geraden fallen daher zwei Schnittpunkte derselben mit der Curve C''' in D zusammen; folglich hat C''' in D einen Doppelpunkt.

olution und ein projectives Strahl-
e dritter Ordnung, welche den Träger
te hat.

Strahlbüschel derart auf einander bezogen,
ger der Strahleninvolution geht, das Strahlen-
Strahl gehört, so sagt man, das Büschel

und die Involution sind in reducirter Lage. Ist T_1 die Gerade, die
mit T ein Strahlenpaar der Involution bildet, so entspricht bei reducirter Lage
der Strahl T dem Paare TT_1 . Ist ferner $(aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0$ ein
anderes Paar der Involution und entspricht ihm der Strahl \mathfrak{Z} , entspricht ferner
dem Strahle $aT + a_1\mathfrak{Z} = 0$ das Paar

$$\beta TT_1 + \beta_1(aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0,$$

so entsprechen sich allgemein

$$\lambda_1 aT + \lambda_2 a_1 \mathfrak{Z} = 0 \text{ und } \lambda_1 \beta TT_1 + \lambda_2 \beta_1(aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen λ_1 und λ_2 , so erhält man die
Gleichung der Curve, welche durch das Strahlbüschel und die Involution erzeugt
wird, nämlich

$$\alpha_1 \beta \cdot \mathfrak{Z} TT_1 - \alpha \beta_1 T(aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in ein Produkt:

$$T[\alpha_1 \beta \mathfrak{Z} T_1 - \alpha \beta_1(aT + a_1T_1)(bT + b_1T_1)] = 0.$$

Die Curve III. O., welche eine quadratische Strahleninvolution
und ein dazu projectives Strahlbüschel in reducirter Lage erzeugen,
zerfällt also in eine Gerade und einen Kegelschnitt.

Umgekehrt schliesst man: Liegt der Träger einer quadratischen
Strahleninvolution auf einem Kegelschnitte K , so gehen die Geraden,
welche die Schnittpunkte jedes Paares der Involution verbinden,
durch einen Punkt und bilden ein mit der Involution projectives
Strahlbüschel. Sind nämlich M_1 und M_2 zwei Paare der Involution und
 S_1 und S_2 die Geraden, welche die Schnittpunkte der Paare M_1 und M_2 und
des Kegelschnitts K verbinden, ist ferner A der Träger der Involution, B der
Schnitt von S_1 und S_2 und T der Strahl AB , und bezieht man das Büschel B
projectiv auf die Involution, so dass $S_1, S_2 \asymp M_1, M_2$ und T dem Paare
entspricht, zu welchem T gehört, so befinden sich die Involution und das pro-
jective Büschel in reducirter Lage; sie erzeugen also einen Kegelschnitt K' , der
durch A und durch die vier Punkte geht, in denen K von S_1 und S_2 geschnitten
wird. Da nun K' diese fünf Punkte mit K gemein hat, so ist K' mit K identisch.

Hieraus folgt eine einfache Construction der Aufgabe, eine quadratische
Strahleninvolution zu ergänzen. Man construirt einen Kreis K , der den
Träger A der Involution enthält, und zwei Sehnen, deren jede die Schnittpunkte
eines Strahlenpaares der Involution mit K enthält. Legt man durch den Schnitt-
punkt dieser Sehnen eine Gerade, die K in B und B_1 schneidet, so ist AB ,
 AB_1 ein Strahlenpaar der Involution.

16. Mit Hülfe dieser Sätze kanu die Aufgabe: Die drei Schnittpunkte
einer Curve dritter Ordnung C''' und einer geraden Linie T zu con-
struiren, auf das cubische Fundamentalproblem zurückgeführt werden.

Wir construiren ein Kegelschnittbüschel und ein projectives Strahlenbüschel,
welche die Curve C''' erzeugen. Dieselben schneiden T in einer quadratischen
Punkinvolution und einer dazu projectiven Punktreihe. Die Schnittpunkte von
 T und C''' sind nun die Punkte der Reihe, welche mit einem Punkte des ent-

sprechenden Punktpaars zusammenfallen. Unsere Aufgabe ist daher auf die folgende reducirt: Auf einer Geraden T liegen eine quadratische Punktinvolution und eine dazu projective Punktreihe; man soll die Punkte X der Reihe finden, die mit einem Punkte des entsprechenden Paares zusammenfallen.

Wir projeciren von einem willkürlich gewählten Punkte A aus die Punktinvolution und die Punktreihe und erhalten so in A eine Strahleninvolution J und ein dazu projectives Strahlbüschel S ; die Strahlen des Büschels, welche nach einem der gesuchten Punkte X gehen, fallen mit einem Strahle des entsprechenden Paares der Strahleninvolution zusammen. Legen wir einen Kreis K durch A , und verbinden die Punkte, in welchem der Kreis von jedem Strahlenpaare der Involution getroffen wird, so bilden diese Verbindungsgeraden ein Strahlbüschel Σ , welches mit der Involution J projectiv ist. Die projectiven Büschel S und Σ erzeugen einen Kegelschnitt C , der durch den Träger A des Büschels geht, und daher den Kreis K in drei weiteren Punkten Y_1, Y_2, Y_3 schneidet. Der Strahl des Büschels S und das Paar der Involution J , auf denen einer dieser Punkte Y liegt, entsprechen dem durch Y gehenden Strahle des projectiven Büschels Σ , sind also einander entsprechend. Die gesuchten Punkte der Geraden T sind daher die Punkte, in denen T von den Strahlen AY_1, AY_2, AY_3 geschnitten wird.

17. Hat man ein Kegelschnittbüschel und das dazu projective Strahlbüschel bestimmt, durch welches eine Curve III. O. erzeugt wird, und rückt ein Strahl T des Strahlbüschels unendlich nahe an einen Träger A des Kegelschnittbüschels heran, so hat der entsprechende Kegelschnitt K des Büschels mit C''' in A zwei unendlich nahe benachbarte Punkte gemein; mithin haben C''' und K in A eine gemeinsame Tangente. Die Tangente, die eine Curve dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte A derselben berührt, wird daher in folgender Weise gefunden. Man construirt den Punkt E der C''' , der dem Punkte A und drei weiteren Punkten der C''' gegenüberliegt, ziehe EA und construirt in A die Tangente des Kegelschnitts, der diesem Strahle entspricht.

§ 16. Tangente und Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung.

1. Wir verbinden zwei Punkte \mathfrak{P} und Π und bestimmen die Verhältnisse, in welchen die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von den Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$ und der Curve dritter Ordnung geschnitten wird:

$$1. \quad f = \sum a_{ikl} x_i x_k x_l = 0; \quad i, k, l = 1, 2, 3.$$

Zu diesem Zwecke setzen wir in 1.

$$x_i = \frac{\lambda_1 r_i + \lambda_2 \xi_i}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad i = 1, 2, 3$$

und erhalten für das gesuchte Theilverhältniss $\mu = \lambda_2 : \lambda_1$ die Gleichung:

$$f(x) + 3[f_1(x) \cdot \xi_1 + f_2(x) \cdot \xi_2 + f_3(x) \cdot \xi_3] \cdot \mu \\ 2. + 3[f_{11}(x) \cdot \xi_1^2 + 2f_{11}(x) \cdot \xi_1 \xi_2 + 2f_{13}(x) \cdot \xi_1 \xi_3 + f_{22}(x) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(x) \cdot \xi_2 \xi_3 + f_{33}(x) \cdot \xi_3^2] \cdot \mu^2 \\ + f(\xi) \cdot \mu^3 = 0.$$

Hierin bedeuten $F(x)$ und $F(\xi)$ die Werthe, welche eine Function F erhält, wenn man die x_i durch die r_i bez. ξ_i ersetzt; ferner bedeuten

$$f_1 = a_{111} x_1^2 + 2a_{112} x_1 x_2 + 2a_{113} x_1 x_3 + a_{122} x_2^2 + 2a_{123} x_2 x_3 + a_{133} x_3^2 = \sum a_{1ik} x_i x_k \\ 3f_2 = a_{112} x_1^2 + 2a_{122} x_1 x_2 + 2a_{123} x_1 x_3 + a_{222} x_2^2 + 2a_{223} x_2 x_3 + a_{233} x_3^2 = \sum a_{2ik} x_i x_k \\ f_3 = a_{113} x_1^2 + 2a_{123} x_1 x_2 + 2a_{133} x_1 x_3 + a_{223} x_2^2 + 2a_{233} x_2 x_3 + a_{333} x_3^2 = \sum a_{3ik} x_i x_k$$

eine Curve d

$$\begin{aligned} & f_{12}x_1 + \\ & f_{13}x_1 + \\ & f_{23}x_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{11}x_1, \\ & f_{22}x_2, \\ & f_{33}x_3, \end{aligned}$$

$$6. \quad f = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + 2f_{13}x_1x_3 + f_{22}x_2^2 + 2f_{23}x_2x_3 + f_{33}x_3^2$$

2. Wir nehmen zunächst an, \mathfrak{P} sei auf f gelegen; alsdann die Gleichung 2. hat die selbstverständliche Wurzel $\mu = 0$, we entspricht. Die beiden andern Wurzeln der Gleichung 2. er quadratischen Gleichung:

$$1. \quad 3[f_1(x) \cdot \xi_1 + f_2(x) \cdot \xi_2 + f_3(x) \cdot \xi_3] + 3[f_{11}(x) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(x) \cdot \xi_1 + f_{22}(x) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(x) \cdot \xi_2\xi_3 + f_{33}(x) \cdot \xi_3^2] \cdot \mu + f(\xi) \cdot \mu^2 =$$

Liegt Π auf der Geraden $T = f_1(x) \cdot \xi_1 + f_2(x) \cdot \xi_2 + f_3(x) \cdot \xi_3$ die Gleichung 1. eine Wurzel $\mu = 0$; die Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ hat zusammenfallende Punkte mit der Curve f gemein, berührt als Die Gerade T geht durch \mathfrak{P} , denn setzt man in T für die Ver Coordinaten x_x des Punktes \mathfrak{P} , so erhält man

$$2. \quad f_1(x) \cdot x_1 + f_2(x) \cdot x_2 + f_3(x) \cdot x_3,$$

und dies ist nach 6. identisch mit $f(x)$, also gleich Null, da \mathfrak{P} gibt daher nur eine Gerade, welche eine Curve III. O. in Punkte derselben berührt, und die Gleichung der Tang $f = 0$ im Punkte \mathfrak{P} ist

$$3. \quad T = f_1(x) \cdot x_1 + f_2(x) \cdot x_2 + f_3(x) \cdot x_3 = 0.$$

3. Die Gleichung der Tangente in einem Curvenpunkte unbestimmt, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die f_1, f_2, f_3 zugleich verschwinden. Aus der Identität No. 1, 6 dieser Bedingung \mathfrak{P} auf der Curve f liegt.

Ist für die Coordinaten von \mathfrak{P} $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, so wird identisch und jede durch \mathfrak{P} gehende Gerade schneidet die Cur in zwei zusammenfallenden Punkten; hierdurch ist der Punkt punkt charakterisirt.

Die drei Gleichungen $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ sind homogen q unbekannten Coordinaten x_x des Doppelpunktes, haben dahe kein gemeinsames System von Wurzeln; eine Curve III. O. l gemeinen keinen Doppelpunkt. Mehr als einen Doppe eigentliche Curve dritter Ordnung nicht haben; denn eine z verbindende Gerade würde mit der Curve vier Schnittpunkte l

4. Zwischen $f, f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33}$ be t ten No. 1, 5; dieselben lehren sofort: Wenn es einen Pa t lichen $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, so verschwindet für diesen Punkt auch

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante heisst die HESSE'sche Determinant l unction f . Sie ist homogen dritten Grades in den Coeffici i den Coordinaten x_x . Die Gleichung $H = 0$ ist daher die G

Curve f in einer bestimmten Beziehung stehenden Curve nennt dieselbe die HESSE'sche Curve der Curve $f = 0$.
eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt, der zugehörigen HESSE'schen Curve.

5. Ist \mathfrak{P} der Doppelpunkt einer mit Doppelpunkt 3. Ordnung, so wird der dritte Schnittpunkt einer durch \mathfrak{P} der C''' aus der Gleichung bestimmt, die aus No. 2, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ und nach Absonderung der Wurzel
1. $3[f_{11}(x) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(x) \cdot \xi_1 \xi_2 + 2f_{13}(x) \cdot \xi_1 \xi_3 + f_{22}(x) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(x) \cdot \xi_2 \xi_3 + f_{33}(x) \cdot \xi_3^2 + f(x) \cdot \mu = 0$.

Wird nun der Punkt Π so gewählt, dass
2. $f_{11}(x) \cdot \xi_1^2 + 2f_{12}(x) \cdot \xi_1 \xi_2 + 2f_{13}(x) \cdot \xi_1 \xi_3 + f_{22}(x) \cdot \xi_2^2 + 2f_{23}(x) \cdot \xi_2 \xi_3 + f_{33}(x) \cdot \xi_3^2 + 2f(x) \cdot \mu = 0$,
so hat die Gleichung 1. die Wurzel $\mu = 0$, alle drei Schnittpunkte $\mathfrak{P}\Pi$ fallen also in den Doppelpunkt \mathfrak{P} .

Da die HESSE'sche Determinante für die Coordinaten verschwindet, so folgt (§ 13, No. 3), dass der Kegelschnitt 2. in zwei Geraden zerfällt. Die Coordinaten des Schnittpunkts dieser beiden Geraden genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{11}(x) \cdot \xi_1 + f_{12}(x) \cdot \xi_2 + f_{13}(x) \cdot \xi_3 &= 0, \\ f_{12}(x) \cdot \xi_1 + f_{22}(x) \cdot \xi_2 + f_{23}(x) \cdot \xi_3 &= 0, \\ f_{13}(x) \cdot \xi_1 + f_{23}(x) \cdot \xi_2 + f_{33}(x) \cdot \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin ξ_i durch x_i , so gehen die linken Seiten in $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ über, verschwinden also; der Doppelpunkt \mathfrak{P} ist also zugleich der Doppelpunkt der Curve 2. Hieraus folgt, dass die beiden durch 2. repräsentirten Geraden diejenigen Geraden sind, die durch \mathfrak{P} gehen und in \mathfrak{P} drei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Curve $f = 0$ haben. Diese beiden Geraden heissen die Doppelpunktstangenten.

Verlegt man den Eckpunkt A_1 des Coordinatendreiecks in den Doppelpunkt, so ist $x_1 = h_1$, $x_2 = x_3 = 0$, mithin

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &= a_{111} h_1, & f_{12}(x) &= a_{112} h_1, & f_{13}(x) &= a_{113} h_1, \\ f_{22}(x) &= a_{122} h_1, & f_{23}(x) &= a_{123} h_1, & f_{33}(x) &= a_{133} h_1. \end{aligned}$$

Die Gleichung der beiden Doppelpunktstangenten wird nach Weglassung des Faktors h_1

$$a_{111} x_1^2 + 2a_{112} x_1 x_2 + 2a_{113} x_1 x_3 + a_{122} x_2^2 + 2a_{123} x_2 x_3 + a_{133} x_3^2 = 0.$$

Sind dieselben real, und nimmt man A_2 und A_3 auf ihnen an, so muss sich die linke Seite auf ein Vielfaches von $x_2 x_3$ beschränken, daher ist

$$a_{111} = a_{112} = a_{113} = a_{122} = a_{133} = 0.$$

Bezieht man also die Gleichung einer mit Doppelpunkt versehenen Curve III. O. auf ein Coordinatendreieck, das die Ecke A_1 im Doppelpunkt und die Ecken A_2 , A_3 auf den Doppelpunktstangenten hat, so ist die Gleichung von der Form:

$$3. \quad f = 6a_{123} x_1 x_2 x_3 + a_{222} x_2^2 x_3 + 3a_{223} x_2^2 x_3 + 3a_{233} x_2 x_3^2 + a_{333} x_3^3 = 0.$$

Für die Function f_{11} , f_{12} , f_{13} erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} f_{11} &= 0, & f_{22} &= a_{222} x_2 + a_{223} x_3, \\ f_{12} &= a_{123} x_3, & f_{23} &= a_{123} x_1 + a_{223} x_2 + a_{233} x_3, \\ f_{13} &= a_{123} x_2, & f_{33} &= a_{233} x_2 + a_{333} x_3. \end{aligned}$$

Die Gleichung der HESSE'schen Curve wird daher

$$H = \begin{vmatrix} 0, & a_{123} x_3, & a_{123} x_2 \\ a_{123} x_3, & f_{22}, & f_{23} \\ a_{123} x_2, & f_{23}, & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

ten Zeile, so erhält man

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 f_{22} - x_3 f_{23} \\ x_2 & x_2 f_{23} - x_3 f_{33} \end{vmatrix}.$$

$$x_1 x_2^2 x_3 + a_{222} x_2 x_3^2 - a_{333} x_3^3.$$

; wie 3. Wir schliessen hieraus: 1 Doppelpunkt, so hat ihre te einen Doppelpunkt, und ngenten gemein.

oppelpunkt, so gilt derselbe für meinsame Doppelpunktstangenten, angenten gelegene, dem Doppelp zählen der gemeinsame Doppelp nten für zusammen sechs Schnitt- urven f und H noch ausserdem

$$- 4a_{333}x_3^3 = 0.$$

$x_2 : x_3$ der drei andern Schnitt- complexen Wurzeln der Einheit, a_{222} , so hat man

$$(x_2 - a' \mu x_3)(x_2 - a'' \mu x_3).$$

$x_3 = 0$, $x_2 - a' \mu x_3 = 0$ die nach den andern Schnittpunkten t und realen Doppelpunkts- n ausser dem Doppelpunkte mplexe Schnittpunkte.

n Tangenten eines Doppelpunkts n bezeichnet dann den Doppel- Tangente in diesem Punkte als Fall bei cubischen Curven aufzu- in den Rückkehrpunkt, die Ecke die Gleichung der Doppelpunkts- iden Achse $A_1 A_2$, also auf $x_3^2 = 0$

$$a_{22} = a_{133} = 0; \text{ mithin ist die}$$

$+ 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$ lass eine Curve III. O., deren thalten ist, den Punkt A_1 zum ehrtangente hat.

ung

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{223}x_2 + a_{233}x_3 \\ a_{233}x_2 + a_{333}x_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_{333}x_3) = 0.$$

kehrpunkt versehenen Curve

theilt wird, die Gleichung festsetzen

$$\mu_2 = 0.$$

n einem Punkte \mathfrak{P} in Bezug auf n Punkte A_1, A_2, \dots, A_n , die mit ihm auf einer Geraden liegen, die Punkte zu, für welche die Verhältnisse $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, in denen die Strecke $\mathfrak{P}\Pi$ von A_1, A_2, \dots, A_n getheilt wird, den Bedingungen genügen

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 0,$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \dots + \mu_{n-1}\mu_n = 0,$$

$$\Sigma \mu_a \mu_b \mu_c = 0, \quad \Sigma \mu_a \mu_b \mu_c \mu_d = 0, \quad \dots \quad \Sigma \mu_a \mu_b \mu_c \dots \mu_r = 0,$$

wobei für $abc, abcd, \dots, abc\dots r$ alle Combinationen dritter, vierter, \dots $(n-1)$ ter Klasse aus den Zahlen $1, 2, 3, \dots$ zu nehmen sind. Setzt man $PA_i = d_i$, $P\Pi = x$, so ist

$$\mu_i = \frac{PA_i}{A_i\Pi} = \frac{PA_i}{P\Pi - PA_i} = \frac{d_i}{x - d_i}.$$

Wird dies in $\Sigma \mu_a \mu_b \dots \mu_k = 0$ eingesetzt, so entsteht

$$\Sigma \frac{d_a}{x - d_a} \cdot \frac{d_b}{x - d_b} \cdot \frac{d_c}{x - d_c} \dots \frac{d_k}{x - d_k} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(x - d_1)(x - d_2)(x - d_3) \dots (x - d_n)$, so verschwindet in jedem Gliede der linken Seite der Nenner, und das Produkt $d_a d_b \dots d_k$ wird mit dem Produkte von $n - k$ Differenzen $x - d_f$ multiplicirt. Die Gleichung 1. wird daher vom Grade $(n - k)$ in Bezug auf x , und wird folglich von $n - k$ Punkten Π erfüllt.

Die Gruppe der $(n - k)$ Punkte Π , welche der Gleichung genügen

$$\Sigma \mu_a \mu_b \mu_c \dots \mu_k = 0,$$

nennt man die harmonischen Pole $(n - k)$ ten Grades der Punkte A_1, A_2, \dots, A_n in Bezug auf den Punkt \mathfrak{P} .

9. Besteht die Gruppe der Punkte A aus drei Punkten A_1, A_2, A_3 , so giebt es zu jedem Punkte \mathfrak{P} zwei harmonische Pole zweiten Grades und einen harmonischen Pol ersten Grades, die sich der Reihe nach aus den Gleichungen ergeben

$$1. \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0, \quad \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = 0.$$

Dividirt man dieselben durch $\mu_1\mu_2\mu_3$, so entsteht

$$2. \quad \frac{1}{\mu_2\mu_3} + \frac{1}{\mu_1\mu_3} + \frac{1}{\mu_2\mu_1} = 0, \quad \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = 0.$$

Nun sind $1:\mu_1, 1:\mu_2, 1:\mu_3$ die Theilverhältnisse $\Pi A_1 : A_1 \mathfrak{P} \dots$, also werden durch die Gleichungen 2. die harmonischen Pole ersten und zweiten Grades für den Punkt Π in Bezug auf die Punkte A_1, A_2, A_3 definirt. Hieraus folgt: Ist Π ein harmonischer Pol zweiten Grades von \mathfrak{P} , so ist \mathfrak{P} der harmonische Pol ersten Grades von Π ; und umgekehrt: ist Π der harmonische Pol ersten Grades von \mathfrak{P} , so ist \mathfrak{P} ein harmonischer Pol zweiten Grades von Π .

Drückt man die Bedingungen 1. durch die Grössen x und d aus, so erhält man

$$d_1(x - d_2)(x - d_3) + d_2(x - d_3)(x - d_1) + d_3(x - d_1)(x - d_2) = 0,$$

$$d_1 d_2 (x - d_3) + d_2 d_3 (x - d_1) + d_3 d_1 (x - d_2) = 0.$$

Fällt \mathfrak{P} mit einem der drei Punkte A , z. B. mit A_3 zusammen, so ist $d_3 = 0$, und die Gleichung 3. vereinfacht sich zu $d_1(x - d_2)x + d_2 \cdot x(x - d_1) = 0$.

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = 0$, die andere folgt aus

$$d_1(x - d_2) + d_2(x - d_1) = 0;$$

nach diese Gleichung wird der harmonische Pol von \mathfrak{P} in Bezug auf das Punkt-

Der Ort der harmonischen Pole ersten Grades, die zu einem Punkte \mathfrak{P} in Bezug auf die Schnittpunkte der durch \mathfrak{P} gehenden Strahlen mit der cubischen Curve $f = 0$ gehören, ist somit die Gerade $\varphi'' = 0$.

Diese Gerade heisst die zweite oder die gerade Polare des Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf die Curve $f = 0$.

Nach dem letzten Satze der vorigen Nummer ist die gerade Polare eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung zugleich die Polare dieses Punktes in Bezug auf die erste Polare desselben Punktes.

10. Legt man von \mathfrak{P} eine Tangente an f , und ist A der Berührungspunkt und A_1 sein Begleiter, so fällt einer der harmonischen Pole zweiten Grades von \mathfrak{P} in Bezug auf den doppelt zu zählenden Punkt A und den Punkt A_1 mit A zusammen; die erste Polare von \mathfrak{P} geht also durch A . Und umgekehrt: Verbindet man einen nicht auf f gelegenen Punkt \mathfrak{P} mit einem Schnittpunkte A_3 der Curve f und der ersten Polaren φ' des Punktes \mathfrak{P} , so fällt in A_3 einer der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}A_3$ und f mit einem harmonischen Pole zweiten Grades von \mathfrak{P} in Bezug auf diese drei Schnittpunkte zusammen; wenn nun die Gleichung

$$d_1(x - d_2)(x - d_3) + d_2(x - d_3)(x - d_1) + d_3(x - d_1)(x - d_2) = 0,$$

welche die harmonischen Pole zweiten Grades liefert, eine Wurzel $x = d_3$ enthält, so folgt $d_3(d_3 - d_1)(d_3 - d_2) = 0$. Da nun nach der Voraussetzung \mathfrak{P} nicht auf f liegt, so ist $d_3 \geq 0$, folglich ist entweder $d_3 = d_1$, oder $d_3 = d_2$, es fallen also zwei Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}A_3$ und der Curve f in A_3 zusammen, die Curve f wird von $\mathfrak{P}A_3$ in A_3 berührt.

Wir haben daher den Satz: Die Tangenten, die von einem Punkte ausserhalb einer Curve III. O. an die Curve gelegt werden, berühren dieselbe in den Schnittpunkten mit den ersten Polaren des Punktes. Von jedem Punkte der Ebene aus, der nicht auf der Curve liegt, lassen sich daher im Allgemeinen sechs Tangenten an eine Curve III. O. legen.

Eine Ausnahme hiervon tritt ein, wenn die Curve f einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt hat. Für jeden Punkt \mathfrak{P} der Ebene geht die erste Polare durch den Doppelpunkt; da nun in dem Doppelpunkte zwei Schnittpunkte von f und φ' zusammenfallen, so bleiben vier weitere Schnittpunkte von f und φ' übrig. Hat also eine Curve III. O. einen Doppelpunkt, so lassen sich von jedem Punkte, der nicht auf der Curve liegt, nur vier Tangenten an die Curve legen.

Hat die Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, und wählt man dasselbe Coordinatensystem wie in No. 6, 2, so ergibt sich für die erste Polare eines Punktes \mathfrak{P} die Gleichung

$$\varphi' = 2a_{122}r_2 \cdot x_1x_2 + (a_{122}r_1 + a_{222}r_2 + a_{223}r_3) \cdot x_2^2 + 2a_{223}r_2x_2x_3 + a_{333}r_3 \cdot x_3^2 = 0.$$

Setzt man hierin $x_2 = 0$, so folgt $x_3^2 = 0$; hieraus ersieht man, dass φ' die Rückkehrtangente A_1A_3 im Rückkehrpunkte A_1 berührt.

Hat also eine Curve III. O. einen Rückkehrpunkt, so geht die erste Polare jedes Punktes der Ebene durch denselben und berührt die Rückkehrtangente.

Ferner ergibt sich die Identität $3x_2\varphi' - 2r_2f$

$$= (3a_{122}r_1 + a_{222}r_2 + 3a_{223}r_3)x_3^2 + 3a_{333}r_3x_2x_3 - 2a_{333}r_2x_3^2 = 0.$$

Für die Punkte, für welche die rechte Seite und f verschwindet, ist auch

bilden ein mit dieser Punktreihe projectives Kegelschnittbüschel, dessen Träger die Pole der Geraden sind.

13. Besteht eine Curve III. O. aus drei Geraden, die nicht durch denselben Punkt gehen, und nimmt man die Geraden zu Coordinatenachsen, so ist die Gleichung des Vereins dieser drei Geraden $f = 6x_1x_2x_3 = 0$, wobei der Faktor 6 hinzugefügt worden ist, um Uebereinstimmung mit der allgemeinen Form der cubischen Gleichung zu haben. Für diese Function f ist

$$f = 2x_2x_3, \quad f = 2x_1x_3, \quad f = 2x_1x_2, \\ f_{11} = 0, \quad f_{12} = x_3, \quad f_{13} = x_2, \quad f_{22} = 0, \quad f_{23} = x_1, \quad f_{33} = 0.$$

Die Gleichungen der ersten Polaren und der geraden Polaren eines Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf die aus den Seiten des Achsendreiecks bestehende cubische Curve sind daher

$$\varphi' = r_1 \cdot x_2x_3 + r_2 \cdot x_3x_1 + r_3 \cdot x_1x_2 = 0, \\ \frac{1}{2r_1r_2r_3} \varphi'' = \frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} = 0.$$

Beide Polaren lassen sich leicht construiren. Setzt man in φ'' die Coordinate $x_1 = 0$, so erhält man

$$T_1 = \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer durch A_1 gehenden Geraden; mithin die Gleichung der Geraden, die A_1 mit dem Punkte verbindet, in welchem φ'' die Dreiecksseite A_2A_3 schneidet.

erhält man, dass die Strahlen, die A_2 und A_3 mit den Schnittpunkten Polaren φ'' und der gegenüberliegenden Seite des Coordinatendreiecks verbinden, die Gleichungen haben

$$T_2 = \frac{x_1}{r_1} + \frac{x_3}{r_3} = 0, \quad T_3 = \frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} = 0.$$

Wenn $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und der Geraden T_1 ist die Gerade $A_1\mathfrak{P}$ zugeordnet; denn die Gleichung von $A_1\mathfrak{P}$ ist

$$\frac{x_2}{r_2} - \frac{x_3}{r_3} = 0;$$

$A_2\mathfrak{P}$ der vierte harmonische Strahl zu $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und T_2 , harmonisch zu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und T_3 .

Um die gerade Polare eines Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf ein Dreieck zu construiren, verbindet man \mathfrak{P} mit A_1 und A_2 , construirt zu A_1A_2 den vierten harmonischen Strahl T_1 , sowie zu A_2A_1 , A_3A_2 , $A_3\mathfrak{P}$ den vierten harmonischen Strahl T_2 und verbindet die Punkte, in denen A_2A_3 und T_1 und T_2 geschnitten werden; diese Gerade ist die gesuchte Polare. Die Gerade φ' geht durch die Ecken des Coordinatendreiecks. Die Tangente an φ' im Punkte Π ist

$(r_1 \cdot \xi_2 + r_2 \cdot \xi_1) x_1 + (r_2 \cdot \xi_1 + r_1 \cdot \xi_3) x_2 + (r_1 \cdot \xi_2 + r_2 \cdot \xi_1) x_3 = 0$.
Die Gleichungen der Tangenten, welche in A_1 , A_2 , A_3 berühren, sind daher
 $r_2 + r_2x_3 = 0$, $r_1x_2 + r_3x_1 = 0$, $r_3x_1 + r_1x_2 = 0$;
über der Reihe nach die Geraden T_1 , T_2 , T_3 . Die erste Polare eines Punktes \mathfrak{P} in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ wird also erhalten, indem man T_1 construirt, und den Kegelschnitt zeichnet, der durch $A_1A_2A_3$ und T_1 berührt.

Diese Constructionen lehren zugleich, wie man für einen Punkt \mathfrak{P} auf drei mit \mathfrak{P} auf einer Geraden T gelegene Punkte ABC die

Gleichung der Coefficienten gegeben, wir brauchen daher ausser dem Doppelpunkte noch sechs weitere Punkte, um die Coefficientenverhältnisse

$$a_{111} : a_{112} : \dots : a_{222} : a_{223}$$

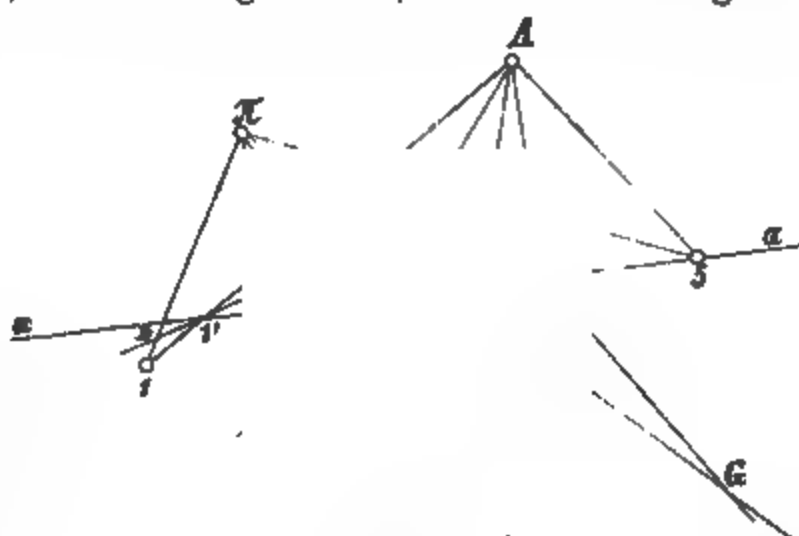
eindeutig zu bestimmen. Eine C_3 ist daher durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte bestimmt.

2. Zieht man durch einen beliebigen Punkt A einer C_3 zwei Strahlen T_1, T_2 , welche die Curve ausserdem in B_1C_1 und B_2C_2 schneiden, so wie einen dritten Strahl T_3 , und hebt einen weiteren Schnittpunkt B_3 desselben mit der Curve hervor; zieht die Strahlenpaare S_1S_1', S_2S_2' , durch welche B_1C_1 und B_2C_2 mit dem Doppelpunkte Π verbunden werden, sowie den Strahl S_3 , der von Π nach B_3 geht; so ist durch die Strahlenpaare S_1S_1', S_2S_2' eine quadratische Strahleninvolution bestimmt. Setzt man nun das Strahlbüschel des Punktes A mit dieser Involution derart in projective Beziehung, dass T_1 dem Strahlenpaare S_1S_1', T_2 dem Paare S_2S_2' und T_3 dem Paare entspricht, zu welchem S_3 gehört, so ist dadurch die Projectivität des Strahlbüschels und der Involution vollständig bestimmt.

Der Ort der Schnittpunkte der Strahlen des Büschels mit den entsprechenden Strahlenpaaren der Involution ist (§ 15, No. 14) eine Curve III. O., die den Träger der Involution zum Doppelpunkte hat, und durch den Träger des Strahlbüschels geht; diese Ortcurve hat daher ausser dem Doppelpunkte noch die sechs Punkte $A, B_1, C_1, B_2, C_2, B_3$ mit der gegebenen Curve C_3 gemein, folglich ist sie (No. 1) mit C_3 identisch. Wir schliessen hieraus: Eine C_3 kann in unendlich vielfacher Weise durch eine Strahleninvolution, deren Träger der Doppelpunkt ist, und ein projectives Strahlbüschel erzeugt werden; jeder einfache Punkt der Curve kann zum Träger des Strahlbüschels genommen werden. Ferner: Die Punktpaare, in welchen eine C_3 durch die Strahlen eines Büschels geschnitten wird, dessen Träger auf der Curve liegt, werden vom Doppelpunkte aus durch die Strahlenpaare einer Involution projectirt, die mit dem Strahlbüschel projectiv ist.

3. Um eine C_3 aus dem Doppelpunkte Π und sechs weiteren Punkten 1, 2, 3, 4, 5, A zu construiren, stellt man die Involution her, die mit dem projectiven Strahlbüschel, dessen Träger A ist, die Curve erzeugt.

Schneidet man das Strahlbüschel durch eine Gerade α , die durch 5 geht und die nach 1, 2, 3, 4 gehenden Strahlen in $1', 2', 3', 4'$ trifft, und projectirt man diese Punkte von einem auf der Geraden $\Pi 5$ gelegenen Punkte B aus, so ist das Büschel B projectiv mit dem Büschel A , also auch mit der gesuchten Involution. Der Strahl $B5$ entspricht dem Paare der Involution, zu welchem $\Pi 5$

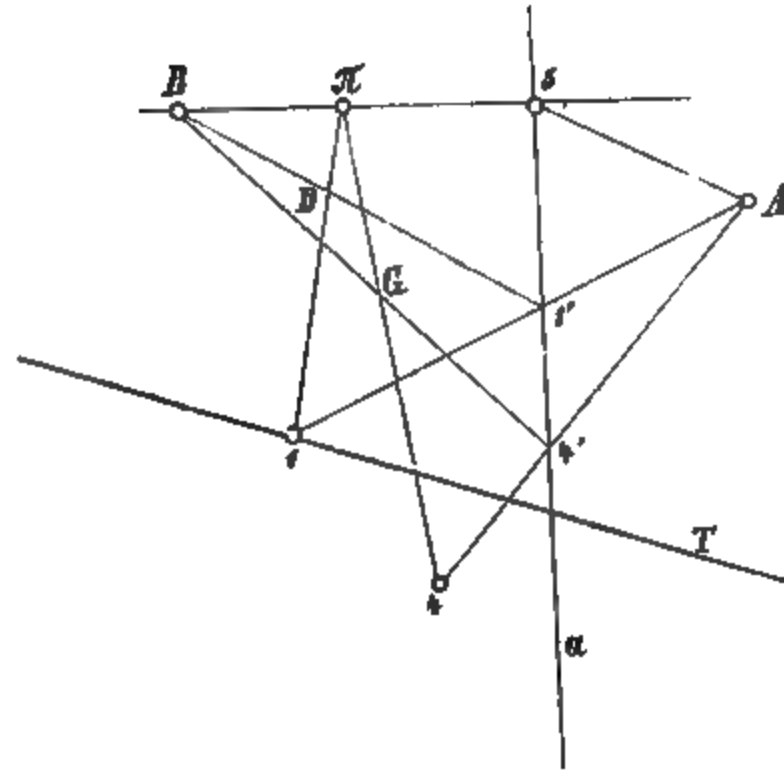


(M. 426.)

gehört; da nun B auf $\Pi 5$ liegt, so befinden sich die Involution Π und das Büschel B in reducirter Lage (§ 15, No. 15), erzeugen also keine eigentliche Curve III. O., sondern eine, die in die Gerade ΠB und einen durch Π gehenden Kegelschnitt K zerfällt. Von diesem Kegelschnitte sind nun fünf Punkte bekannt:

punkte Π , einem Wendepunkte 1,
 und zwei weiteren Punkten 4 und 5
 in No. 3 dem Umstande entsprechend

drei unendlich nahe Punkte ge-
 mein, Γ und K berühren sich
 also in D dreipunktig. Die Kegel-
 schnitte Γ und K haben vier
 Punkte gemein, nämlich Π und
 die drei in D zusammenfallenden
 Punkte. Durch diese vier Punkte
 geht auch das Geradenpaar M ,
 das aus der von Π nach einem
 der drei Punkte bei D gehenden
 Geraden ΠD und aus der Ver-
 bindungslinie der beiden andern
 Punkte, d. i. aus der Geraden S
 besteht, die Γ in D berührt.



(M. 430.)

Der Kegelschnitt K kann nun als der durch G gehende Kegelschnitt des
 von Γ und M bestimmten Kegelschnittbüschels construiert werden.*)

§ 18. Correspondirende Punkte einer Curve dritter Ordnung.

1. Sind $T_1 T_1', T_2 T_2', T_3 T_3'$ drei Strahlenpaare einer quadratischen Involu-
 tion, und $S_1 S_1', S_2 S_2', S_3 S_3'$ die entsprechenden Paare einer projectiven Involu-
 tion, und ist

$$T_3 T_3' = a_1 T_1 T_1' + a_2 T_2 T_2', \quad S_3 S_3' = b_1 S_1 S_1' + b_2 S_2 S_2',$$

so entsprechen sich die Paare

$$T T' = \lambda_1 a_1 \cdot T_1 T_1' + \lambda_2 a_2 \cdot T_2 T_2' = 0 \text{ und } S S' = \lambda_1 b_1 \cdot S_1 S_1' + \lambda_2 b_2 \cdot S_2 S_2' = 0.$$

Die Punkte, in denen sich entsprechende Paare schneiden, genügen der
 Gleichung, die aus $T T' = 0$ und $S S' = 0$ durch Elimination von λ_1 und λ_2
 hervorgeht $f = a_1 b_2 \cdot T_1 T_1' \cdot S_2 S_2' - a_2 b_1 \cdot T_2 T_2' \cdot S_1 S_1' = 0$.

Diese Gleichung ist vom vierten Grade. Wenn $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, oder
 wenn $S_2 = 0$ und $S_1 = 0$, so ist auch $f = 0$, also geht die Curve f durch die
 Träger der beiden Involutionen. Der Ort der Schnittpunkte entsprechen-
 der Strahlenpaare zweier projectiven Involutionen ist also eine Curve
 vierter Ordnung, die durch die Träger der beiden Involutionen geht.

2. Die Coordinaten der Schnittpunkte einer Curve n ter Ordnung mit einer
 Geraden $T = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ sind die Wurzeln der Gleichungen

$$f = 0, \quad T = 0, \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Aus den letzten beiden linearen Gleichungen ergeben sich x_2 und x_3 als
 lineare Functionen von x_1 ; setzt man diese Werthe in f ein, so erhält man eine

*) Ueber Curven III. O. mit Doppelpunkt vergl. WEYR, Theorie der mehrdeutigen geo-
 metrischen Elementargebilde. Leipzig 1869.

die Curve erzeugt wird, wollen wir dadurch beantworten, dass wir angeben, wie eine Curve III. O. aus zwei correspondirenden Punkten A und B , den Tangenten in diesen Punkten und einer genügenden Anzahl weiterer Punkte durch zwei projective Involutionen construirt werden kann.

Sind A_1, A_2 zwei correspondirende Punkte einer C''' , A_3 ihr Begleiter, so nehme man $A_1 A_2 A_3$ zum Coordinatendreieck. Die Durchschnittspunkte der Geraden $A_2 A_3$ und der Curve ergeben sich aus der Gleichung

$$1. \quad a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Da nun von den Schnittpunkten zwei mit A_2 und einer mit A_3 zusammenfallen, so muss sich die Gleichung 1. auf $x_2x_3^2 = 0$ reduciren, es ist also

$$a_{222} = a_{223} = a_{333} = 0.$$

Die Verhältnisse der Coordinaten $x_1 : x_3$ für die Schnittpunkte von $A_1 A_3$ und der Curve erhält man aus

$$2. \quad a_{111}x_1^3 + 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + a_{333}x_3^3 = 0.$$

Da diese Gleichung zwei mit A_1 und einen mit A_3 zusammenfallenden Schnittpunkt ergeben muss, so muss sie sich auf $x_1x_3^2 = 0$ reduciren; folglich ist $a_{111} = a_{113} = 0$.

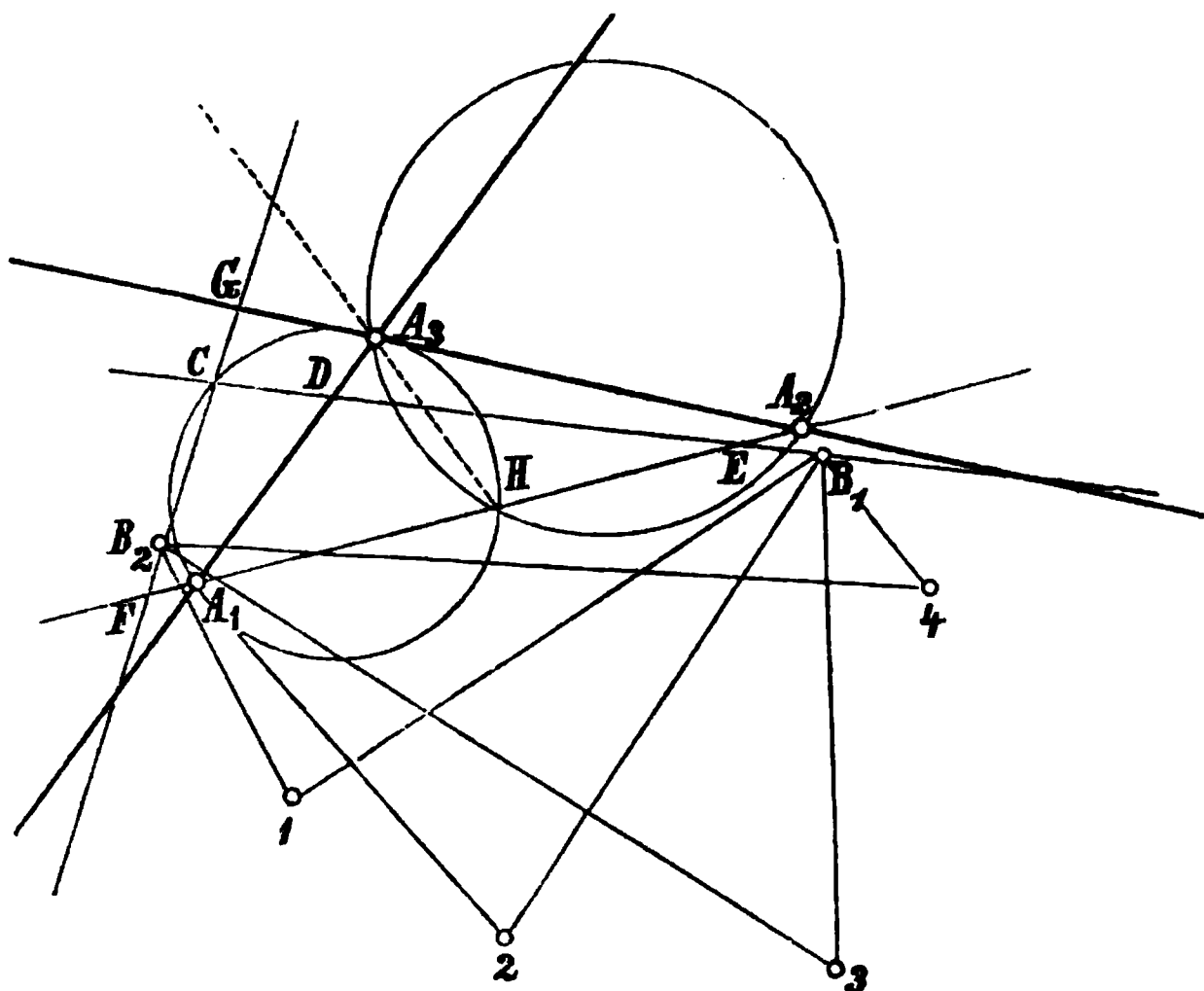
Die Gleichung der Curve in Bezug auf $A_1 A_2 A_3$ ist daher

$$f = 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{122}x_1x_2^2 + 6a_{123}x_1x_2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 + 3a_{233}x_2x_3^2 = 0.$$

Die Verhältnisse der fünf Coefficienten in dieser Gleichung werden durch vier weitere Punkte bestimmt. Dies ergibt: Eine Curve III. O. ist durch zwei correspondirende Punkte, ihren Begleiter und vier weitere Punkte eindeutig bestimmt.

7. Um die C''' zu construiren, welche $A_1 A_2$ zu correspondirenden Punkten, A_3 zu ihrem Begleiter hat, und durch die Punkte 1, 2, 3, 4 geht, legen wir einen Kegelschnitt K_1 durch $A_1, 1, 2, 3, 4$ und einen Kegelschnitt K_2 durch $A_2, 1, 2, 3, 4$.

Sind J_1 und J_2 die projectiven Involutionen mit den Trägern A_1 und A_2 , durch welche die Curve erzeugt wird, so suchen wir die beiden Strahlbüschel, die mit J_1 und J_2 zusammen die Kegelschnitte K_1 und K_2 erzeugen; die Träger dieser Büschel seien B_1 und B_2 . Da $A_1 A_3, A_1 A_2$ ein Paar der Involution



(M. 431.)

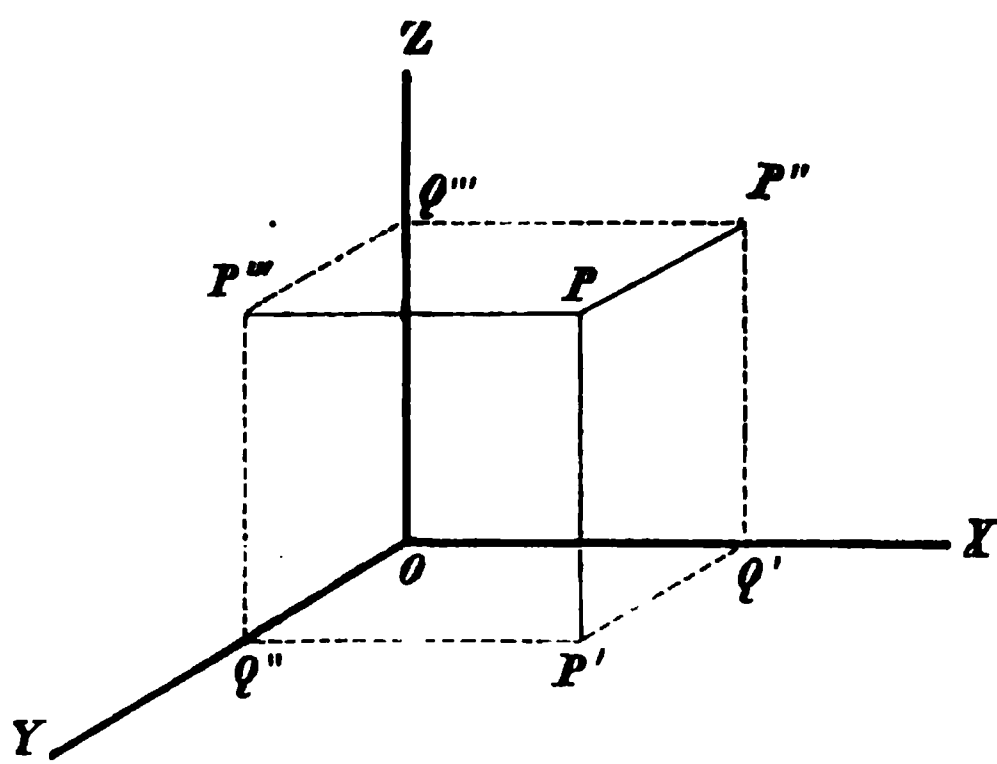
J_1 ist, so liegt B_1 auf der Geraden, welche die Schnittpunkte D und E von K_1 und $A_1 A_3, A_1 A_2$ verbindet; ebenso liegt B_2 mit den Schnittpunkten G und F von K_2 mit $A_2 A_3, A_2 A_1$ auf einer Geraden.

Die Büschel B_1 und B_2 sind projectiv mit den beiden projectiven Involutionen J_1 und J_2 , also sind sie auch unter einander projectiv, und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf einem Kegelschnitte L . Da nun in den

II. Theil. Analytische Geometrie des Raumes.

§ 1. Coordinaten des Punktes.

1. Um die Lage eines Punktes P im Raume zu bestimmen, wählen wir einen beliebigen Punkt O , den wir als den Nullpunkt bezeichnen; durch O legen wir drei Ebenen, die Coordinatenebenen, deren jede auf den beiden andern senkrecht steht. Diese Ebenen schneiden sich in drei Geraden, den Coordinatenachsen, deren jede mit den beiden andern rechte Winkel bildet. Wir bezeichnen die Coordinatenachsen mit OX , OY , OZ , die Coordinatenebenen mit XOY , XOZ , YOZ , oder kürzer als die XY -, XZ - und YZ -Ebene. Wir bestimmen nun die Normalprojectionen P' , P'' , P''' des Punktes P auf die drei Ebenen und messen die Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$.

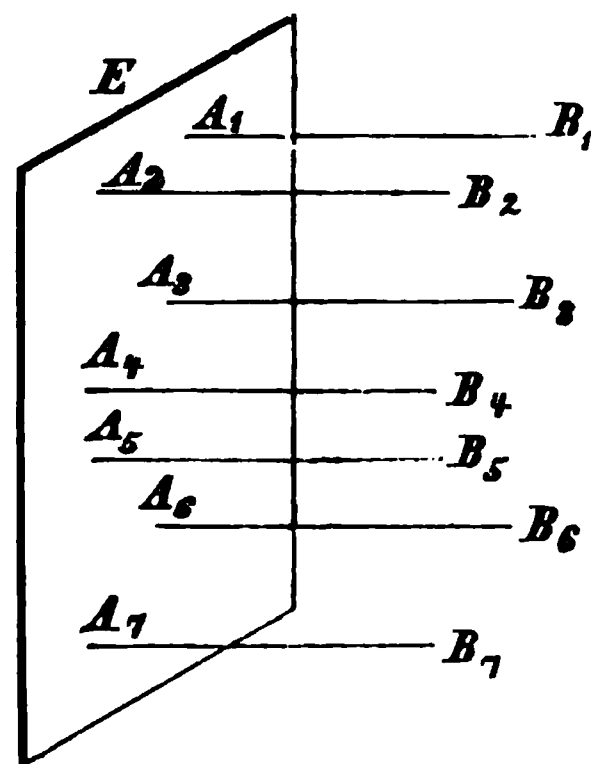


(M. 482.)

Ueber das Vorzeichen der Strecken wollen wir in folgender Weise entscheiden: Eine Schaar von parallelen Geraden durchschneiden wir mit einer Ebene E in den Punkten $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ und bestimmen nun den positiven sämtlicher Parallelen so, dass die auf ihnen liegenden positiven Strecken $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ auf derselben Seite der Ebene E liegen. Der positive Sinn aller Normalen zu den drei Coordinatenebenen ist hiernach bestimmt, wenn man über den positiven Sinn der Coordinatenachsen entschieden hat. Wir wollen festsetzen, dass OX , OY , OZ positive Strecken der Coordinatenachsen sind.

Die drei Strecken $P'P$, $P''P$, $P'''P$ bezeichnen wir der Reihe nach mit x , y , z ; sie sind die Coordinaten, specieller die rechtwinkligen oder orthogonalen Coordinaten des Punktes P .

Alle Punkte, deren Coordinate x einen gegebenen Werth a hat, liegen auf einer Ebene, die zur YZ -Ebene parallel ist und von der X -Achse eine Strecke $OQ' = a$ abschneidet;



(M. 483.)

absolute Werthe haben, in jeder der acht von den drei Coordinatenebenen gebildeten dreiseitigen Ecken ist einer enthalten; sie sind die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Ebenen parallel den Coordinatenebenen sind, und dessen Kanten von den Coordinatenebenen normal halbirt werden.

Alle Punkte, die gleiches x und y haben, haben dieselbe Horizontalprojection P' , liegen also auf einer durch die Coordinaten x und y bestimmten Parallelen zur Z -Achse; die Punkte, die gleiches x und z haben, haben dieselbe Verticalprojection P'' und liegen auf einer Parallelen zur Y -Achse; und die Punkte, die gleiches y und z haben, gehören zu derselben seitlichen Projection P''' und liegen auf einer Parallelen zur X -Achse.

Die Ebene $PP'P''$ (Fig. 432) ist parallel zur YZ -Ebene; ihr Schnittpunkt Q' mit der X -Achse ist daher die Normalprojection des Punktes P auf die X -Achse und die Geraden PQ' und $P''Q'$ sind normal zu OX . Ebenso treffen die Ebenen $PP'P'''$ und $PP''P'''$ die Y - und die Z -Achse in Punkten Q'' und Q''' , die die Normalprojectionen des Punktes P auf diese Achsen sind.

2. Die Strecke zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ergibt sich leicht aus ihren Coordinaten. Für die Strecke $P_1'P_2'$ folgt aus den Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf das ebene Coordinatensystem XOY :

$$P_1'P_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Ferner ist $P_1P_2^2 = P_1'P_2'^2 + (P_2'P_2 - P_1'P_1)^2$, daher ist

$$1. \quad P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Strecke P_1P_2 mit den Achsen OX , OY , OZ bildet, der Reihe nach mit φ , ψ , χ , und sind Q_1' , Q_1'' , Q_1''' , bez. Q_2' , Q_2'' , Q_2''' die Projectionen von P_1 und P_2 auf die Achsen, so ist $Q_1'Q_2' = P_1P_2 \cos \varphi$, $Q_1''Q_2'' = P_1P_2 \cos \psi$, $Q_1'''Q_2''' = P_1P_2 \cos \chi$.

Nun ist für jeden Punkt P

$$OQ' = x, \quad OQ'' = y, \quad OQ''' = z,$$

also ist $Q_1'Q_2' = x_2 - x_1$, $Q_1''Q_2'' = y_2 - y_1$, $Q_1'''Q_2''' = z_2 - z_1$.

Daher hat man, wenn man P_1P_2 mit d bezeichnet:

$$2. \quad \cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \psi = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \chi = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

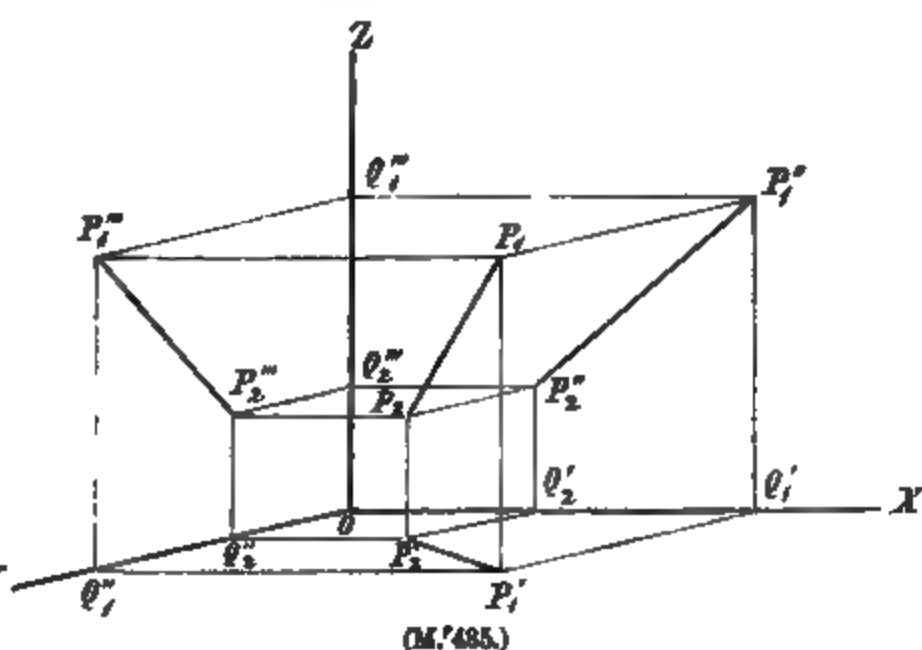
Quadriert man diese drei Werthe und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf 1. die bemerkenswerthe Gleichung

$$3. \quad \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \chi = 1.$$

3. Theilt ein Punkt P die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse

$$P_1P:PP_2 = \lambda_2:\lambda_1,$$

so werden die Projectionen $P_1'P_2'$, $P_1''P_2''$, $P_1'''P_2'''$ von den Projectionen P' , P'' , P''' im gleichen Verhältnisse getheilt; die Coordinaten von P ergeben sich daher aus den Coordinaten von P_1 und P_2 nach den Formeln



lius vector eines Punktes P einschliessen, so ist

$$y = r \cos \psi, \quad z = r \cos \chi.$$

Bestimmungsstücke für zwei Punkte P_1, P_2 durch n , so hat man für den Cosinus des Winkels der Formel

$$\cos \varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - P_1 P_2^2}{2 r_1 r_2}.$$

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$P_1 P_2^2 = 2 x_1 x_2 + 2 y_1 y_2 + 2 z_1 z_2.$$

$$r_1, \quad y_1 = r_1 \cos \psi_1, \quad z_1 = r_1 \cos \chi_1,$$

$$r_2, \quad y_2 = r_2 \cos \psi_2, \quad z_2 = r_2 \cos \chi_2,$$

$$\cos \varphi = \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \chi_1 \cos \chi_2.$$

φ ist dem Winkel zweier durch einen Punkt gezogenen Geraden gleich; mithin giebt die Formel

$$\cos \varphi = \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \chi_1 \cos \chi_2$$

den Cosinus des Winkels zweier Geraden, die mit den Coordinatenachsen χ_1 , bez. ψ_1, ψ_2, χ_2 bilden.

Die Bedingung, wenn ihre Richtungswinkel (d. i. ihre Directionswinkel) der Gleichung genügen:

$$\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \chi_1 \cos \chi_2 = 0.$$

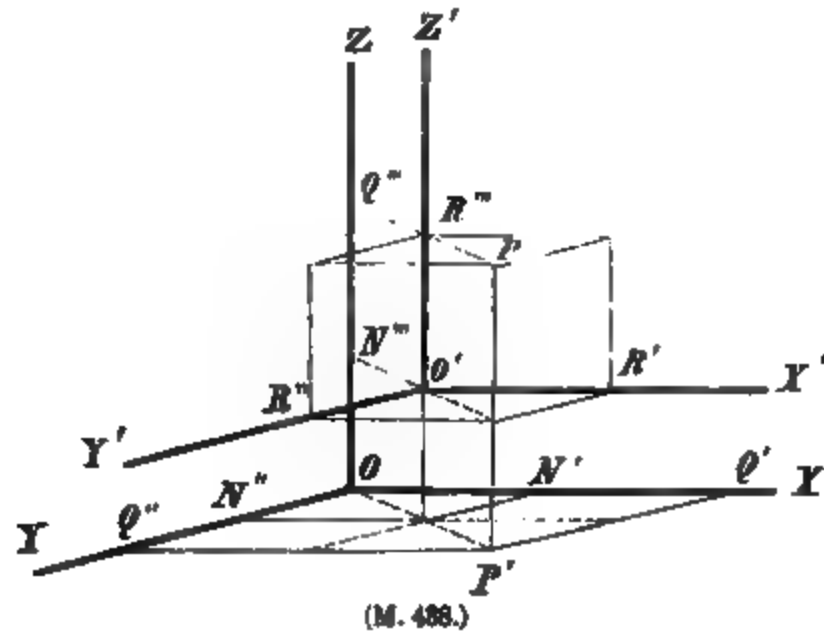
Transformation in rechtwinkliger Coordinatensysteme.

$O'Y', O'Z'$ eines rechtwinkligen Coordinatensystems, OX, OY, OZ eines andern Systems, Q''', R', R'', R''' der Reihe nach die Projectionen des Punktes P auf OX, OY, OZ , man

$$+ N' Q' = O N' + O' R',$$

$$+ N'' Q'' = O N'' + O' R'',$$

$$+ N''' Q''' = O N''' + O' R'''.$$



Transformationsformeln

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \\ z = z' + c.$$

2. Transformation aus einem rechtwinkligen Coordinatensysteme in ein anderes mit demselben Nullpunkte, aber anders gerichteten Achsen

der dieselben Achsenrichtungen, noch denselben so kann man ein Hülffsystem einschalten, das mit dem ursprünglichen in Bezug auf die Achsenrichtungen und mit dem neuen in Bezug auf den Nullpunkt übereinstimmt.

Sind x, y, z, x', y', z' die Coordinaten eines Punktes P im ursprünglichen bez. im neuen Systeme, sind ferner a, b, c die Coordinaten des neuen Nullpunkts in Bezug auf das alte System, und werden die Cosinus der Winkel der Achsen des neuen Systems mit den Achsen des alten wie in No. 3 bezeichnet, so hat man die Transformationsformeln

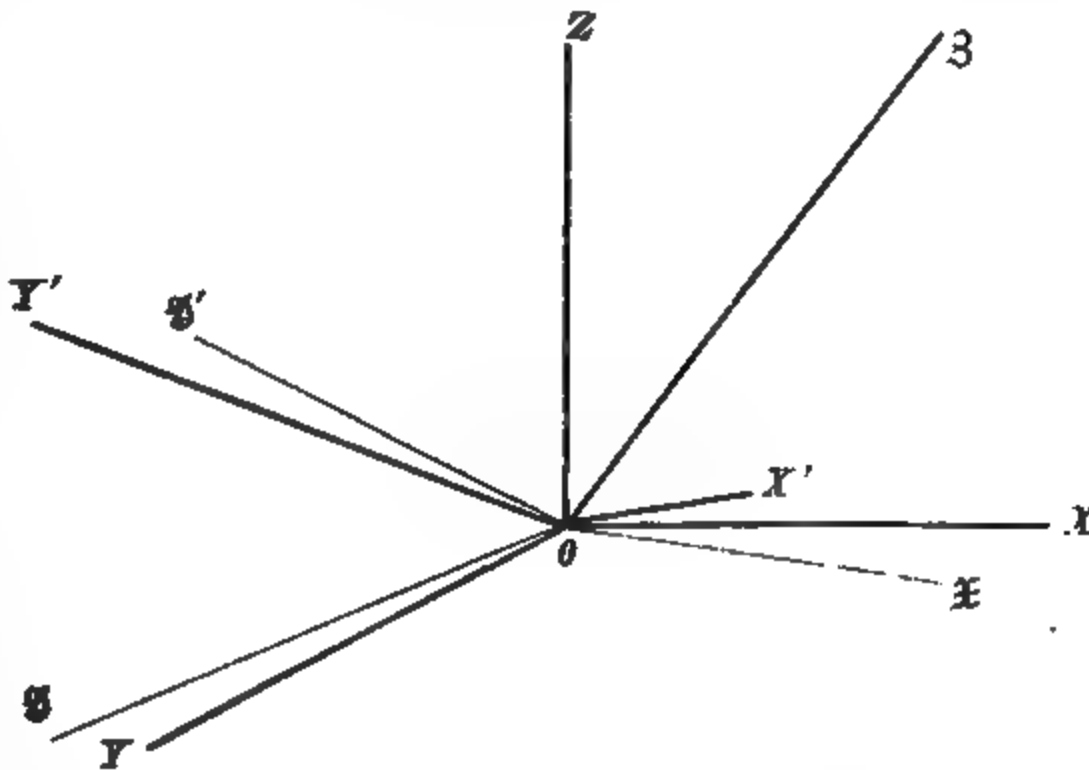
$$x = a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$

$$y = b + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$

$$z = c + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

6. Wenn zwei orthogonale Coordinatensysteme XYZ und $X'Y'Z'$ einen gemeinsamen Nullpunkt haben, so kann die Ebene XOY in die neue Lage $X'OY'$ auf folgende Weise übergeführt werden.

Wir bemerken zunächst, dass in allen Coordinatenebenen der positive Drehungssinn für Winkel so gewählt sein soll, dass die Winkel XOY, XOZ, YOZ rechte Winkel (und nicht $=270^\circ$) sind. Wir beachten nun die Schnittgerade der Ebenen $X'OY'$ und XOY und entscheiden



(M. 489.)

über ihren positiven Sinn; OX sei eine positive Strecke dieser Geraden. Hierauf drehen wir das Coordinatensystem XYZ um die Achse OZ , so dass die Achse OX den Winkel XOX' beschreibt; dabei komme OY in die Lage OY' . Nun bemerke man die Schnittlinie der Ebenen $X'OY'$ und YOZ ; die positive Strecke OY' auf dieser Geraden wähle man so, dass XOY' ein rechter Winkel (und nicht $=270^\circ$) ist, und drehe das Coordinatensystem $X'Y'Z'$ um die Achse OX' so, dass OY' den Winkel YOY' beschreibt; hierdurch komme OZ in die Lage OZ' . Schliesslich drehe man das Coordinatensystem $X'Y'Z'$ um die Achse OZ' so, dass OX' den Winkel XOX' beschreibt; dann fällt die X -Achse mit OX' , und, da $XOY' = X'OY' = 90^\circ$, auch die Y -Achse mit OY' zusammen.

Hat man so durch drei aufeinander folgende Drehungen um die Achsen OZ, OX' , und OZ' die XY -Ebene in die neue Lage $X'OY'$ gebracht, so fällt die Achse OZ entweder mit OZ' zusammen, oder bildet mit OZ' einen gestreckten Winkel. Im ersten Falle kann man das Coordinatensystem XYZ durch Drehung in die neue Lage $X'Y'Z'$ bringen, im andern Falle nicht; im ersten Falle bezeichnet man die Coordinatensysteme als gleichsinnig, im andern als ungleichsinnig.

OA mit den Koordinatenachsen einschliesst, und sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes P der Ebene, so ist die Bedingung, dass die Normalprojection von P auf die Gerade ON mit dem Punkte A zusammenfällt:

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z = d.$$

Die Coordinaten jedes Punktes der Ebene genügen dieser Gleichung; und umgekehrt, alle Punkte, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, liegen auf der Ebene; die Gleichung ist daher die Gleichung der Ebene T .

Eine Ebene, deren Normale mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ macht und die vom Anfangspunkte um die Strecke d entfernt ist, hat daher die Gleichung

$$1. \quad \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0.$$

Diese Gleichung ist linear bezüglich der Coordinaten.

Dividirt man sie durch d , so entsteht

$$\frac{\cos\alpha}{d} \cdot x + \frac{\cos\beta}{d} \cdot y + \frac{\cos\gamma}{d} \cdot z - 1 = 0.$$

Nun ist, wie man aus der Figur sieht,

$$OS_1 = d : \cos\alpha, \quad OS_2 = d : \cos\beta, \quad OS_3 = d : \cos\gamma.$$

Wenn man die Achsenabschnitte OS_1, OS_2, OS_3 der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, so erhält man daher die Gleichung der Ebene in der Form:

$$2. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Umgekehrt schliesst man: Jede lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines Punktes ist die Gleichung einer eindeutig bestimmten Ebene. Denn dividirt man die allgemeine lineare Gleichung

$$3. \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

durch $-D$, so erhält man

$$\frac{A}{-D} \cdot x + \frac{B}{-D} \cdot y + \frac{C}{-D} \cdot z - 1 = 0,$$

und erkennt nun durch den Vergleich mit 2., dass 3. die Gleichung einer Ebene ist, deren Achsenabschnitte betragen

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Durch Multiplication mit einem geeigneten Faktor r kann man die allgemeine lineare Gleichung 3. auch auf die Normalform 1. bringen, und dadurch den Abstand der Ebene 3. vom Nullpunkte und die Winkel bestimmen, die die Normale der Ebene mit den Achsen bildet. Aus der Identität

$$rAx + rBy + rCz + rD = \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d$$

folgen die Gleichungen

$$rA = \cos\alpha, \quad rB = \cos\beta, \quad rC = \cos\gamma, \quad rD = -d.$$

Quadriert man die ersten drei, addirt, und beachtet, dass

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

so erhält man

$$r^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1, \quad \text{also } r = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

mithin hat man

$$1. \quad \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Zwei Ebenen sind daher normal zu einander, wenn

$$2. \quad AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Zwei Ebenen sind parallel, wenn $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1$, also wenn

$$A : B : C = A_1 : B_1 : C_1.$$

5. Ist Π die Normalprojection eines beliebigen Punktes P auf die durch O gehende Normale der Ebene

$$T \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0,$$

so ist $O\Pi = \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z.$

Der Abstand p des Punktes P von der Ebene T ist

$$p = \Pi A = OA - O\Pi = d - (\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z) = -T.$$

Ist also $T \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist der Werth, den das Polynom T für die Coordinaten irgend eines nicht auf $T = 0$ gelegenen Punktes annimmt, dem Abstände des Punktes von der Ebene entgegengesetzt gleich; dabei wird der Abstand positiv oder negativ, je nachdem der Punkt mit dem Nullpunkte O auf derselben Seite der Ebene liegt oder nicht.

Der Abstand eines Punktes P von der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ ist

$$p = - \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. Sind AC und BD zwei Strecken einer Ebene T und normal zur Schnittlinie mit einer andern Ebene T_1 , sind ferner A' und B' die Normalprojectionen von A und B auf T_1 , so ist

$$\begin{aligned} A_1 C D B_1 &= \frac{1}{2} CD \cdot (A'C + B'D) = \frac{1}{2} CD \cdot (AC \cos TT_1 + BD \cos TT_1) \\ &= \frac{1}{2} CD \cdot (AC + BD) \cos TT_1. \end{aligned}$$

Daher hat man

$$1. \quad A'B'DC = ABDC \cdot \cos\alpha.$$

Projicirt man die Ecken eines auf T gelegenen Polygons auf die Schnittlinie von T und T_1 , so erscheint die Fläche des Polygons als ein Polynom von rechtwinkligen Trapezen, derart wie $ABDC$, und die Projection des Polygons auf die Ebene T_1 ist das gleichgebildete Polynom aus den Projectionen der Trapeze.

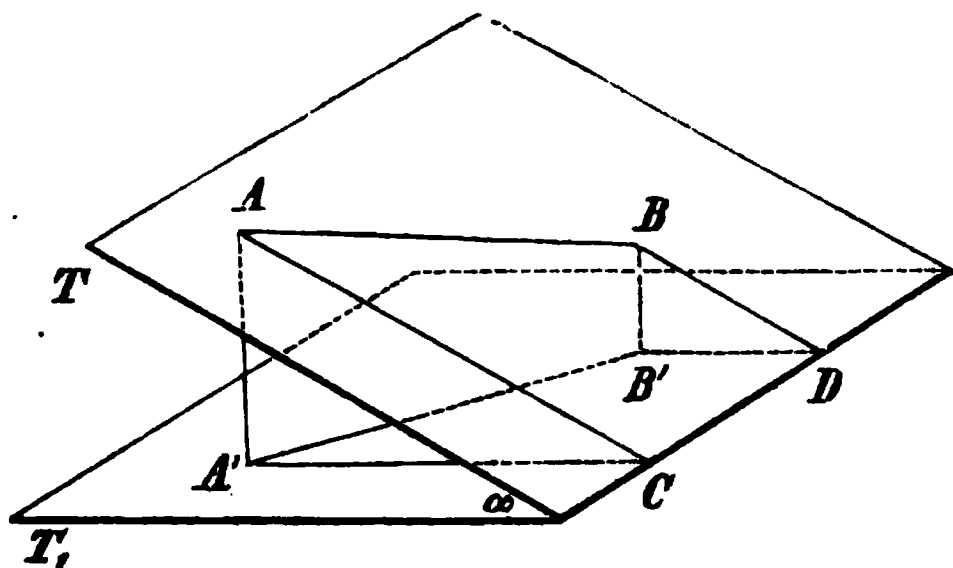
Wendet man auf die Projection jedes Trapezes die Formel 1. an, so gelangt man zu dem Satze: Die Fläche der Normalprojection einer ebenen Figur ist gleich der Fläche der projicirten Figur multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der projicirten Figur gegen die Projectionsebene.

Der Neigungswinkel einer Ebene gegen eine Coordinatenebene ist dem Winkel gleich, den die Normale der Ebene mit der auf der Coordinatenebene normalen Achse einschliesst.

Sind daher f' , f'' , f''' die Projectionen einer ebenen Fläche f auf die Coordinatenebenen und α , β , γ die Winkel der Normalen zu f mit den Achsen, so hat man $f' = f \cos\gamma$, $f'' = f \cos\alpha$, $f''' = f \cos\beta$.

Quadriert man diese drei Werthe und addirt, so entsteht

$$f'^2 + f''^2 + f'''^2 = f^2.$$



(M. 441.)

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

hat für zwei verschiedene Lagen Π' und Π'' des variablen Punktes P im Allgemeinen verschiedene Werthe Δ' und Δ'' ; sollen diese ungleiche Vorzeichen haben, so muss Δ für einen Punkt der Strecke $\Pi'\Pi''$ verschwinden. Hieraus folgt: Die Determinante hat für alle Punkte auf derselben Seite der Ebene $P_1P_2P_3$ dasselbe Zeichen und wechselt das Zeichen, wenn P von einer Seite von $P_1P_2P_3$ auf die andere übertritt. Unter denselben Umständen behält oder wechselt aber auch das Tetraëder $PP_1P_2P_3$ das Zeichen; denn das Dreieck $P_1P_2P_3$ erscheint von allen Punkten aus, die auf derselben Seite von $P_1P_2P_3$ liegen, in derselben Drehrichtung, von Punkten auf verschiedenen Seiten aus in entgegengesetzten Drehrichtungen. Hieraus folgt, dass für alle Lagen der Punkte $P_0P_1P_2P_3$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

dem sechsfachen Volumen des Tetraëders gleich oder entgegengesetzt gleich ist. Um nun zu entscheiden, welcher von beiden Fällen gilt, genügt es, ein Beispiel zu untersuchen. Wir wählen das Tetraëder $OS_1S_2S_3$ (Fig. 440). Die Determinante Δ wird jetzt

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = -abc.$$

Rechnet man ein Dreieck ABC positiv, wenn die Drehungsrichtung von A über B nach C linksum erfolgt, und ist, wie in unseren Figuren, der positive Sinn der Coordinatenachsen so gewählt, dass vom Anfangspunkt aus gesehen ein Dreieck ABC positiv erscheint, dessen Ecken auf den Achsen OX , OY , OZ liegen, und die Endpunkte der positiven Strecken OA , OB , OC sind, so ist das Tetraëder $OS_1S_2S_3$ positiv. Hieraus folgt, dass auch rücksichtlich des Vorzeichens die Gleichung gilt

$$6 \cdot P_0P_1P_2P_3 = - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen

$$T_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$T_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$T_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

sind die Werthe von x , y , z , welche den drei Gleichungen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ genügen, also die Auflösungen des linearen Systems

$$\begin{aligned} 1. \quad & A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ & A_2x + B_2y + C_2z = -D_2, \\ & A_3x + B_3y + C_3z = -D_3. \end{aligned}$$

Dieses System ergibt

$$6. \quad \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot C_1 + \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \cdot C_2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot C_3 = 0.$$

so folgt, indem man 3., 4., 5. und dann 3., 4., 6. zusammennimmt, noch das Verschwinden der beiden übrigen Determinanten:

$$(ABD) = 0, \quad (ADC) = 0.$$

In diesem Falle sind also die Coordinaten des Schnittpunkts sämtlich unbestimmt. Da $(ACD) = 0$ und $(BCD) = 0$, so verschwindet für alle Werthe von x und y auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1x + B_1y, & C_1 & D_1 \\ A_2x + B_2y, & C_2 & D_2 \\ A_3x + B_3y, & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

Multipliziert man die Glieder der zweiten Reihe mit z , und addirt dann die dritte und die vierte Reihe zur ersten, so entsteht die Identität

$$\begin{vmatrix} A_1x + B_1y + C_1z + D_1, & C_1, & D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2, & C_2, & D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3, & C_3, & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man nach den Gliedern der ersten Reihe und bezeichnet die drei Determinanten aus je zwei Columnen der Elemente

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}$$

mit m_1, m_2, m_3 , so erhält man

$$7. \quad m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 = 0.$$

Dieser Identität zufolge wird für jeden Punkt, für dessen Coordinaten die Polynome T_1 und T_2 verschwinden, auch das Polynom T_3 gleich Null, folglich geht die Ebene T_3 durch die Schnittlinie der Ebenen T_1 und T_2 .

Umgekehrt: Wenn drei Ebenen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ dieselbe Gerade enthalten, so giebt es drei Zahlen m_1, m_2, m_3 , durch welche die Identität hergestellt wird:

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 = 0.$$

Denn sind T_{10}, T_{20} die Werthe, welche die Polynome T_1 und T_2 für einen ausserhalb der Schnittlinie $T_1 T_2$ auf T_3 gelegenen Punkt P_0 annehmen, so bilde man die Ebenengleichung.

$$8. \quad T_{20} \cdot T_1 - T_{10} \cdot T_2 = 0.$$

Derselben wird von jedem Punkte genügt, für welchen $T_1 = T_2 = 0$, d. i. von jedem gemeinsamen Punkte der Ebenen T_1 und T_2 ; sowie von dem Punkte P_0 . Folglich ist die Ebene 8. identisch mit T_3 , und es giebt daher eine Zahl m_1 , durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_1 T_3 = T_{20} \cdot T_1 - T_{10} \cdot T_2.$$

Dies ist aber die behauptete Identität, wenn man nur m_2 und m_3 durch $-T_{20}$ und T_{10} ersetzt.

9. Vier Ebenen $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante des Systems der vier Gleichungen verschwindet, also wenn

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Unter dieser Bedingung giebt es vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3 , für welche

$$y + C_0 z + D_0 = 0$$

in

$$m_2 B_2) B_0 + (m_1 C_1 + m_2 C_2) C_0 = 0,$$

$$m_2 (A_2 A_0 + B_2 B_0 + C_2 C_0) = 0.$$

$$m_2 = -(A_1 A_0 + B_1 B_0 + C_1 C_0).$$

$B_1 + C_0 C_1 = \mu_2$, $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = \mu_0$,
 \mathfrak{L}_1 , \mathfrak{L}_2 , \mathfrak{L}_0 , die normal zu T_1 , T_2 , T_0
 en Kanten der dreiseitigen Ecke $T_1 T_2 T_0$

$$1 - \mu_0 T_0 = 0,$$

$$1 - \mu_1 T_1 = 0,$$

$$1 - \mu_2 T_2 = 0.$$

windet identisch; also haben wir den Satz:
 In einer dreiseitigen Ecke auf die
 mal projiciren, gehen durch eine

die Coordinaten der Punkte, deren Ab-
 stände von zwei Ebenen ein gegebenes Verhältniss $m_2 : m_1$ haben, ergibt sich,
 wenn $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Normalgleichungen der Ebenen sind, aus

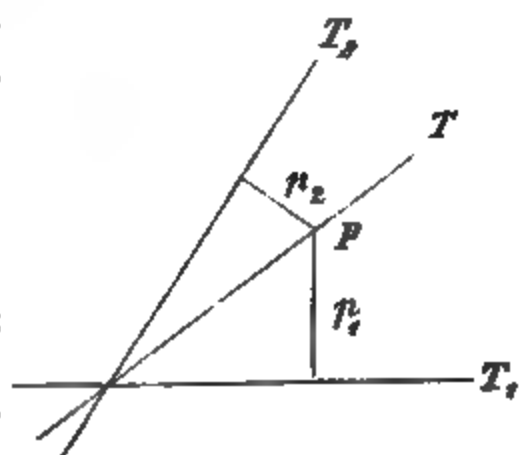
$$p_1 : p_2 = m_2 : m_1, \quad p_1 = -T_1, \quad p_2 = -T_2, \quad \text{zu}$$

$$m_1 T_1 - m_2 T_2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die
 durch die Kante $T_1 T_2$ geht. Aus einem Normal-
 schnitte der drei Ebenen ist ersichtlich, dass

$$p_1 : p_2 = \sin T_1 T : \sin T T_2,$$

mithin theilt die Ebene T den Flächenwinkel
 $T_1 T_2$ im Sinusverhältniss $m_2 : m_1$, d. h. so,
 dass $\sin T_1 T : \sin T T_2 = m_2 : m_1$, und zwar geht
 T im Falle eines positiven Verhältnisses,
 $m_2 : m_1$ durch den Winkel, in welchem der
 Nullpunkt liegt, im Falle eines negativen
 durch die beiden Nebenwinkel.



(M. 442.)

13. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_0 = 0$ die Normalgleichungen der Seiten einer
 Ecke, und theilt man die Winkel $T_1 T_2$, $T_2 T_0$, $T_0 T_1$ der Ecke der Reihe nach
 in den Sinusverhältnissen $\mu_1 : \mu_2$, $\mu_2 : \mu_0$, $\mu_0 : \mu_1$, so sind die Gleichungen dieser
 drei Theilungsebenen:

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{\mu_1} T_1 - \frac{1}{\mu_2} T_2 = 0,$$

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{1}{\mu_2} T_2 - \frac{1}{\mu_0} T_0 = 0,$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{\mu_0} T_0 - \frac{1}{\mu_1} T_1 = 0.$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_0 = 0$; man hat daher den allge-
 meinen Satz: Die Ebenen, welche die Winkel einer Ecke der Reihe
 nach in den Sinusverhältnissen $\mu_1 : \mu_2$, $\mu_2 : \mu_0$, $\mu_0 : \mu_1$ theilen, gehen
 durch eine Gerade.

Die Sätze 10 und 11 sind als besondere Fälle dieses Satzes zu betrachten.

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + x_1), \quad y = \frac{1}{2}(y_2 + y_1), \quad z = \frac{1}{2}(z_2 + z_1),$$

d. i. die Coordinaten des Mittelpunkts der Strecke P_1P_2 einsetzt. Daher hat man den Satz: Der Ort der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gleiche Abstände haben, ist die Ebene, welche die Strecke P_1P_2 normal halbiert.

Die Ebenen, welche die Seiten eines Dreiecks $P_1P_2P_3$ normal halbiren, haben die Gleichungen:

$$\mathfrak{E}_{23} = 2(x_2 - x_3) \cdot x + 2(y_2 - y_3) \cdot y + 2(z_2 - z_3) \cdot z - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + z_2^2 - z_3^2) = 0,$$

$$\mathfrak{E}_{31} = 2(x_3 - x_1) \cdot x + 2(y_3 - y_1) \cdot y + 2(z_3 - z_1) \cdot z - (x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 + z_3^2 - z_1^2) = 0,$$

$$\mathfrak{E}_{12} = 2(x_1 - x_2) \cdot x + 2(y_1 - y_2) \cdot y + 2(z_1 - z_2) \cdot z - (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2) = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Identität $\mathfrak{E}_{23} + \mathfrak{E}_{31} + \mathfrak{E}_{12} = 0$. Dieselbe lehrt den Satz: Die drei Ebenen, welche die Seiten eines Dreiecks normal halbiren, schneiden sich in einer Geraden.

Die Ebenen, welche die Seiten eines unebenen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ normal halbiren, haben die Gleichungen

$$\mathfrak{E}_{12} = 2(x_1 - x_2) \cdot x + 2(y_1 - y_2) \cdot y + 2(z_1 - z_2) \cdot z - (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2) = 0,$$

$$\mathfrak{E}_{23} = 2(x_2 - x_3) \cdot x + 2(y_2 - y_3) \cdot y + 2(z_2 - z_3) \cdot z - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + z_2^2 - z_3^2) = 0,$$

$$\mathfrak{E}_{34} = 2(x_3 - x_4) \cdot x + 2(y_3 - y_4) \cdot y + 2(z_3 - z_4) \cdot z - (x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2 + z_3^2 - z_4^2) = 0,$$

$$\mathfrak{E}_{41} = 2(x_4 - x_1) \cdot x + 2(y_4 - y_1) \cdot y + 2(z_4 - z_1) \cdot z - (x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2 + z_4^2 - z_1^2) = 0.$$

Hieraus folgt die Identität $\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{23} + \mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{41} = 0$, und daher der Satz: Die vier Ebenen, welche die Seiten eines unebenen Vierecks normal halbiren, gehen durch einen Punkt; dieser Punkt ist das Centrum der dem Viereck umgeschriebenen Kugel. Durch den Punkt geht auch die Ebene \mathfrak{E}_{13} , welche die Strecke P_1P_3 normal halbiert (da sie mit \mathfrak{E}_{12} und \mathfrak{E}_{23} durch eine Gerade geht) und die Ebene \mathfrak{E}_{24} , die die Strecke P_2P_4 normal halbiert (da diese mit \mathfrak{E}_{23} und \mathfrak{E}_{34} durch eine Gerade geht). Man kann daher den obigen Satz auch durch den folgenden ersetzen: Die sechs Ebenen, welche die Kanten eines Tetraeders normal halbiren, treffen sich in einem Punkte.

16. Die Punkte, deren Coordinaten den Gleichungen zweier Ebenen

$$1. \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$2. \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

genügen, liegen auf der Geraden, die den beiden Ebenen gemeinsam ist; eine gerade Linie im Raume wird also durch den Verein zweier linearen Gleichungen dargestellt. Eliminirt man aus den Gleichungen 1. und 2. der Reihe nach die Coordinaten x , y , z , so erhält man die Gleichungen der Normalprojectionen der Geraden auf die drei Coordinatenebenen, nämlich

$$3. \quad \text{Horizontalprojection:} \quad (AC)x + (BC)y + (DC) = 0,$$

$$4. \quad \text{Verticalprojection:} \quad (AB)x + (CB)z + (DB) = 0,$$

$$5. \quad \text{Seitliche Projection:} \quad (BA)y + (CA)z + (DA) = 0,$$

wenn man mit (MN) die Determinante bezeichnet:

$$(MN) = \begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}.$$

Von den Coordinaten der Punkte einer Ebene sind zwei willkürlich, z. B. x und y ; die dritte z ist von ihnen abhängig; sie ergibt sich aus der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ der Ebene zu

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C}.$$

$$+ By + Cz + D = 0$$

ieser drei Gleichungen. Man erhält

$$y = \frac{-M(CR + D) + Q(CN + A)}{A + BM + CN},$$

$$\frac{BQ + D) + R(BM + A)}{A + BM + CN}.$$

ch gross, wenn $A + BM + CN = 0$; diese

Bedingung des Parallelismus einer Geraden und einer Ebene ist schon in voriger Nummer gefunden worden.

Wenn die Bedingungen $A + BM + CN = 0$ und $BQ + CR + D = 0$ erfüllt sind, so ist auch

$$-M(BQ + CR + D) + Q(A + BM + CN) = -M(CR + D) + Q(CN + A) = 0,$$

$$-N(BQ + CR + D) + R(A + CM + CN) = -N(BQ + D) + R(BM + C) = 0;$$

die Coordinaten des Schnittpunktes sind also unbestimmt; folglich ist die Gerade ganz in der Ebene enthalten.

20. Jede Ebene, die normal zu der Geraden G ist:

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$

hat eine Gleichung von der Form (No. 18)

$$x + My + Nz + D = 0,$$

in welcher D willkürlich ist. Geht die Ebene durch einen gegebenen Punkt P_1 , so ist

$$x_1 + My_1 + Nz_1 + D = 0;$$

durch Subtraction der letzten Gleichungen wird D eliminirt; man erhält so die Gleichung der durch P_1 gehenden Normalebene zu G

$$T = x - x_1 + M(y - y_1) + N(z - z_1) = 0.$$

Die Normalprojection Π des Punktes P_1 auf die Gerade G ist der Schnitt der Ebene T mit der Geraden G , also ergeben sich die Coordinaten von Π nach den Formeln der vorigen Nummer, indem man in denselben A, B, C, D der Reihe nach durch $1, M, N, -(x_1 + My_1 + Nz_1)$ ersetzt:

$$\xi = \frac{-MQ - NR + x_1 + My_1 + Nz_1}{1 + M^2 + N^2},$$

$$\eta = \frac{-MNR + Q + QN^2 + M(x_1 + My_1 + Nz_1)}{1 + M^2 + N^2},$$

$$\zeta = \frac{-MNQ + R + RM^2 + N(x_1 + My_1 + Nz_1)}{1 + M^2 + N^2}.$$

Der Abstand des Punktes P_1 von der Geraden G kann aus den Coordinaten von P_1 und Π berechnet werden.

21. Zwei Gerade haben einen gemeinsamen Punkt, wenn der Verein der Gleichungen der Geraden

$$y = Mx + Q, \quad z = Nx + R,$$

$$y = M_1x + Q_1, \quad z = N_1x + R_1$$

durch ein System von Werthen x, y, z erfüllbar ist. Durch Subtraction ergeben sich die beiden Gleichungen

$$0 = (M - M_1)x + (Q - Q_1), \quad 0 = (N - N_1)x + (R - R_1);$$

horaus folgt als Bedingung dafür, dass sich zwei Gerade schneiden

$$\begin{vmatrix} M - M_1 & Q - Q_1 \\ N - N_1 & R - R_1 \end{vmatrix} = 0.$$

22. Durch zwei Gerade, die nicht in derselben Ebene liegen, lassen sich zwei zu einander parallele Ebenen legen. Die Gleichungen der beiden Geraden G und G_1 seien

der Werthe u_1, u_2, \dots , sowie für jedes u die Differenz der Werthe $v', v'', v''' \dots$ verschwindend klein werden, so erhält das Polyëder unendlich kleine Flächen und die Winkel zweier benachbarter Polyëderflächen werden verschwindend klein (oder, was auf dasselbe hinauskommt, unendlich wenig von einem gestreckten Winkel verschieden); das Polyëder geht daher in eine krumme Oberfläche über, welche von den Ebenen T berührt (umhüllt) wird.

24. Alle Ebenen, die dasselbe u und v haben, haben dieselbe Horizontal-spur; alle Ebenen, die zu demselben u und w gehören, haben dieselbe Vertical-spur; alle Ebenen, die in Bezug auf die Coordinaten v und w übereinstimmen, haben dieselbe seitliche Spur. Die Ebenen, die dieselbe Coordinate u haben, gehen durch denselben Punkt der X -Achse; die Ebenen, die dieselbe Coordinate v haben, gehen durch denselben Punkt der Y -Achse; und die Ebenen, die dieselbe Coordinate w haben, gehen durch denselben Punkt der Z -Achse. Insbesondere treffen die Ebenen, für welche $u = 0$, bez. $v = 0$, oder $w = 0$ ist, die Achse OX , bez. OY oder OZ , in einem unendlich fernen Punkte.

Für die Ebenen, welche durch den Nullpunkt gehen, ist $u = \infty$, $v = \infty$, $w = \infty$; doch hat man diesen unendlich grossen Werthen für jede durch O gehende Ebene bestimmte Verhältnisse beizulegen, nämlich die Verhältnisse der Coordinaten einer Parallelebene.

25. Ersetzt man in der Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

die reciproken Achsenabschnitte $1:a, 1:b, 1:c$ der Reihe nach durch u, v, w , so erhält man

$$ux + vy + wz - 1 = 0.$$

Sieht man in dieser Gleichung alle sechs Coordinaten als veränderlich an, so erscheint sie als die Bedingung, welche die Coordinaten eines Punktes und einer Ebene erfüllen, wenn der Punkt und die Ebene vereint liegen (d. i. wenn der Punkt auf der Ebene liegt. Giebt man u, v, w bestimmte Werthe, so ist

$$ux + vy + wz - 1$$

die Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Punkte, die auf der Ebene liegen, die die gegebenen Werthe u, v, w zu Coordinaten hat, ist also die Gleichung dieser Ebene. Ertheilt man hingegen den Coordinaten x, y, z gegebene Werthe, so ist $ux + vy + wz - 1 = 0$ die Bedingungsgleichung für die Coordinaten aller Ebenen, die durch den Punkt P gehen, der die gegebenen Coordinaten x, y, z hat; wir nennen sie daher in diesem Falle die Gleichung dieses Punktes P .

Jede lineare Gleichung zwischen den Coordinaten einer Ebene ist die Gleichung eines eindeutig bestimmten Punktes. Vergleicht man die allgemeine lineare Gleichung in Ebenencoordinaten

$$1. \quad Au + Bv + Cw + D = 0,$$

$$\text{mit} \quad xu + yv + zw - 1 = 0,$$

so sieht man, dass 1. die Gleichung des Punktes ist, der die Coordinaten hat

$$x = -A:D, \quad y = -B:D, \quad z = -C:D.$$

Die Gleichungen

$$Au + Bv + D = 0, \quad Au + Cw + D = 0, \quad Bv + Cw + D = 0$$

sind die Gleichungen von Punkten, deren Coordinaten der Reihe nach sind

$$x = -A:D, \quad y = -B:D, \quad z = 0;$$

$$x = -A:D, \quad y = 0, \quad z = -C:D;$$

$$x = 0, \quad y = -B:D, \quad z = -C:D;$$

$$x = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\xi_i + \lambda_l x_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}, \quad y = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\eta_i + \lambda_l y_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}, \quad z = \frac{(\lambda_i + \lambda_k)\zeta_i + \lambda_l z_l}{\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l}.$$

so folgt, dass der Punkt P die Strecke $P_l \Pi_l$ in dem Verhältnisse $(\lambda_i + \lambda_k) : \lambda_l$ theilt.

Daher hat man $P_l \Pi_l : P \Pi_l = (P_l P + P \Pi_l) : P \Pi_l = (\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l) : \lambda_l$.

Nun ist aber $P_i P_k P_l : P_i P_k P = P_l \Pi_l : P \Pi_l$, also folgt

$$P_i P_k P : P_i P_k P_l = \lambda_l : (\lambda_i + \lambda_k + \lambda_l).$$

Hieraus ergeben sich die drei Formeln:

$$P_2 P_3 P : P_1 P_2 P_3 = \lambda_1 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

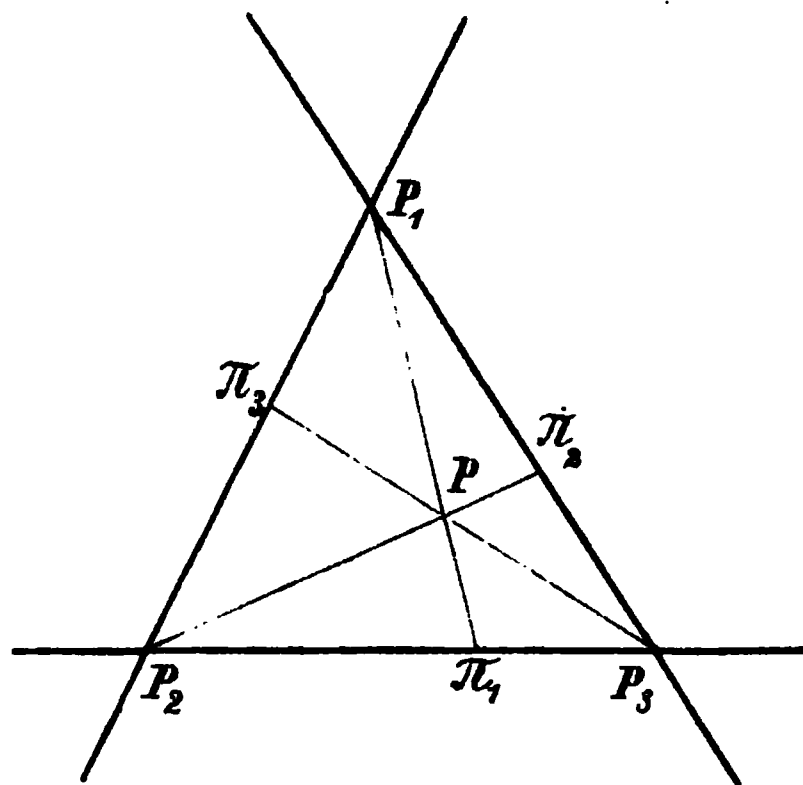
$$P_3 P_1 P : P_1 P_2 P_3 = \lambda_2 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

$$P_1 P_2 P : P_1 P_2 P_3 = \lambda_3 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

also ist wie behauptet worden war

$$P_2 P_3 P : P_3 P_1 P : P_1 P_2 P = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3.$$

29. Aus den Coordinaten dieses Punktes P ergibt sich seine Gleichung sofort zu $P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, wobei $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ die Normalgleichungen der Punkte $P_1 P_2 P_3$ sind. Umgekehrt: Bildet man aus drei linearen Functionen der Ebenencoordinaten



$$\begin{aligned} P_1 &\equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1, \\ P_2 &\equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2, \\ P_3 &\equiv A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3, \end{aligned} \quad (\text{M. 448.})$$

eine neue lineare Function

$$P \equiv \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3,$$

so ist $P = 0$ die Gleichung des Punktes, der das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ der Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ in dem Verhältnisse $\mu_1 D_1 : \mu_2 D_2 : \mu_3 D_3$ theilt.

Hieraus schliesst man weiter: Wenn man zu vier linearen Functionen der Ebenencoordinaten P_0, P_1, P_2, P_3 vier Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3 finden kann, durch welche die Identität hergestellt wird

$$m_0 P_0 + m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 \equiv 0,$$

so liegen die vier Punkte $P_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ auf einer Ebene.

Denn aus dieser Identität folgt

$$P_0 \equiv -\frac{m_1}{m_0} P_1 - \frac{m_2}{m_0} P_2 - \frac{m_3}{m_0} P_3,$$

also liegt P_0 auf der Ebene $P_1 P_2 P_3$.

30. Die Ebenen, deren Coordinaten dem Vereine zweier linearen Gleichungen genügen

$P_1 \equiv A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 = 0$, $P_2 \equiv A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 = 0$,
gehen durch die beiden Punkte P_1 und P_2 , umhüllen daher die Gerade $P_1 P_2$.

Eine Gerade wird also durch zwei lineare Gleichungen in Ebenencoordinaten dargestellt. Bildet man die Identitäten

$$S_1 \equiv C_2 \cdot P_1 - C_1 \cdot P_2 \equiv (AC)u + (BC)v + (DC),$$

$$S_2 \equiv B_2 \cdot P_1 - B_1 \cdot P_2 \equiv (AB)u + (CB)w + (DB),$$

$$S_3 \equiv A_2 \cdot P_1 - A_1 \cdot P_2 \equiv (BA)v + (CA)w + (DA),$$

erkennt man, dass $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ die Gleichungen von Punkten sind, die auf der Geraden $P_1 P_2$ liegen; da ferner in jeder der Functionen S zwei Coordinaten vorkommen, so folgt, dass $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$

die Kugelgleichung dadurch, dass die x , y , z nicht vorkommen, und dass keine Glieder vor-
 Coordinaten enthalten. Umgekehrt sieht man leicht, dass die Gleichung in Grades in Punktcoordinaten, in welcher

$A = D = F$, und $B = C = E = 0$ ist, die Gleichung einer eindeutig bestimmten Kugel ist. Denn nach Division durch A erhält die Gleichung die Form:

$$3. \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2Lx + 2My + 2Ns + Q = 0.$$

Durch Vergleich mit 1. sieht man, dass 3. die Gleichung einer Kugel ist mit den Centrumscoordinaten und dem Radius.

$$a = -L, \quad b = -M, \quad c = -N, \quad \rho = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - Q}.$$

Ist $L^2 + M^2 + N^2 - Q < 0$, so schreibe man die Gleichung 3.

$$(x + L)^2 + (y + M)^2 + (z + N)^2 + (Q - L^2 - M^2 - N^2) = 0.$$

Unter der Voraussetzung $L^2 + M^2 + N^2 - Q < 0$ sind alle vier Glieder dieses Polynoms bei realen Werthen von x , y , z positiv; also wird die Gleichung durch reale Werthe der Coordinaten nicht befriedigt. Man kann in diesem Falle die Gleichung als die einer Kugel mit realem Centrum und mit imaginärem Radius

$$\rho = i \sqrt{Q - L^2 - M^2 - N^2}$$

auffassen.

2. Legt man durch einen Punkt Π eine Gerade, die mit den Achsen die Winkel α , β , γ bildet, und ist P ein Punkt dieser Geraden, so hat man für die Coordinaten von P (nach No. 17) die Formeln

$$x = \xi + r \cos \alpha, \quad y = \eta + r \cos \beta, \quad z = \zeta + r \cos \gamma.$$

Liegt der Punkt P auf der Kugel

$$K = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0,$$

so hat man:

$$(\xi + r \cos \alpha)^2 + (\eta + r \cos \beta)^2 + (\zeta + r \cos \gamma)^2 - 2a(\xi + r \cos \alpha) - 2b(\eta + r \cos \beta) - 2c(\zeta + r \cos \gamma) + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von r , so erhält man in Rücksicht auf die Formel $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ die Gleichung:

$$r^2 + 2[(\xi - a) \cos \alpha + (\eta - b) \cos \beta + (\zeta - c) \cos \gamma] \cdot r + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\xi - 2b\eta - 2c\zeta + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werthe r' und r'' für r ; das Produkt derselben ist

1. $r'r'' = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\xi - 2b\eta - 2c\zeta + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2$; dasselbe ist unabhängig von der Richtung der durch Π gezogenen Geraden und hängt nur von den Constanten der Kugelgleichung und den Coordinaten von Π ab. Wir haben daher den Satz: Wird ein Strahlenbündel (d. i. die Gesamtheit aller durch einen Punkt gehenden Geraden) von einer Kugel geschnitten, so sind die Produkte der Strecken, die auf jedem Strahle vom Träger des Bündels (Π) bis an die Kugel reichen, einander gleich.

Dieses constante Produkt heisst die Potenz des Punktes Π in Bezug auf die Kugel. Wie man aus 1. sieht, ist die Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel dem Werthe gleich, den die Gleichung der Kugel (in der Form No. 1, 1) für die Coordinaten des Punktes annimmt. Die Potenz des Punktes Π in Bezug auf die Kugel ist positiv oder negativ, je nachdem Π von der Kugel ausgeschlossen wird, oder nicht; im ersteren Falle ist die Potenz gleich dem Quadrate der von Π an die Kugel gelegten Tangenten, im zweiten gleich dem Quadrate des Halbmessers des auf der Kugel gelegenen Kreises, dessen Centrum Π ist.

Kugeln, welche drei gegebene Kugeln normal schneiden, ist die Chordalachse der drei Kugeln; es giebt eine Kugel, die vier gegebene Kugeln normal schneidet, ihr Centrum ist der Chordalpunkt der vier Kugeln.

$$\begin{aligned} 5. \text{ Ist } K_1 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + d_1 \quad \text{und} \\ K_2 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + d_2, \quad \text{so ist} \\ K &\equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichung einer Kugel; das Centrum hat die Coordinaten

$$a = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad b = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad c = \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2}{\lambda_1 + \lambda_2};$$

dasselbe liegt daher auf der Geraden der Centren C_1 und C_2 der Kugeln $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ und theilt die Strecke $K_1 K_2$ im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$.

Durchläuft das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ alle Werthe, so erhält man eine unendliche Folge von (realen und imaginären) Kugeln; die Gesamtheit dieser Kugeln heisst ein Kugelbüschel.

Durch jeden Punkt P_0 des Raumes geht eine Kugel eines Kugelbüschels. Denn bezeichnet man mit K_{10} , K_{20} die Werthe, welche die Polynome K_1 und K_2 annehmen, wenn man in ihnen x, y, z durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 ersetzt, so geht K durch P_0 , wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\lambda_1 K_{10} + \lambda_2 K_{20} = 0.$$

Man kann daher $\lambda_1 = K_{20}$, $\lambda_2 = -K_{10}$ wählen und hat somit als Gleichung der gesuchten Kugel

$$K_{20} K_1 - K_{10} K_2 = 0.$$

Diese Gleichung wird nur dann unbestimmt, wenn $K_{10} = K_{20} = 0$, d. i. wenn P_0 auf den Kugeln K_1 und K_2 zugleich liegt. Punkte, die K_1 und K_2 gemeinsam sind, gehören allen Kugeln des Büschels an.

Da es in der Gleichung einer Büschelkugel $K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$ nur auf das Verhältniss der Zahlen $\lambda_1 : \lambda_2$ ankommt, so kann vorausgesetzt werden, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sei, so dass dann $K = 0$ in der Normalform erscheint (d. i. so, dass x^2, y^2 und z^2 den Coefficienten 1 haben).

6. Die Chordalebene zweier Kugeln K, K' der Büschels K_1, K_2

$$K \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0, \quad K' \equiv \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 = 0$$

hat die Gleichung

$$L \equiv K - K' \equiv (\lambda_1 - \mu_1) K_1 + (\lambda_2 - \mu_2) K_2 = 0.$$

Da vorausgesetzt wird, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$, so folgt, dass $\lambda_1 - \mu_1 = -(\lambda_2 - \mu_2)$, also ergibt sich

$$L \equiv (\lambda_1 - \mu_1) (K_1 - K_2) = 0.$$

Mithin ist L mit der Chordalebene der Kugeln K_1 und K_2 identisch. Die Kugeln eines Büschels haben also eine gemeinsame Chordalebene. Aus jedem Punkte der Chordalebene eines Kugelbüschels als Centrum lässt sich daher eine Kugel construiren, die alle Kugeln des Büschels normal schneidet.

Sind $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4 \dots$ die Chordalebenen, welche eine nicht zum Büschel gehörige Kugel $\mathfrak{K} = 0$ mit den einzelnen Kugeln des Büschels $K_1, K_2, K_3, K_4 \dots$ bestimmt, und ist

$$K_3 \equiv \lambda_{13} K_1 + \lambda_{23} K_2 = 0, \quad \lambda_{13} + \lambda_{23} = 1,$$

$$K_4 \equiv \lambda_{14} K_1 + \lambda_{24} K_2 = 0, \quad \lambda_{14} + \lambda_{24} = 1,$$

so haben \mathfrak{E}_3 und \mathfrak{E}_4 die Gleichungen

$$\mathfrak{E}_3 \equiv \lambda_{13} K_1 + \lambda_{23} K_2 - \mathfrak{K} = 0, \quad \mathfrak{E}_4 \equiv \lambda_{14} K_1 + \lambda_{24} K_2 - \mathfrak{K} = 0.$$

als

$$= \mu_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \mu_3 K_3 = 0$$

$$) K_2 + (\lambda_2 - \mu_2) K_3 = 0.$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1,$$

1. Hiernach erhält man

$$- \mu_2) (K_2 - K_3).$$

1. K_1 und K_2, K_3 mit ξ_{12} und ξ_{23} , so hat man $\xi_{12} = K_1 - K_2 = 0$, $\xi_{23} = K_2 - K_3 = 0$, und daher

$$\xi = (\lambda_1 - \mu_1) \xi_{12} + (\lambda_2 - \mu_2) \xi_{23}.$$

Hieraus folgt: Die Chordalebene je zweier Kugeln eines Kugelbündels gehen durch eine Gerade; oder: Die Kugeln eines Bündels haben eine gemeinsame Chordalachse.

11. Soll die Kugel K durch einen gegebenen Punkt P_0 gehen, der nicht mit den beiden Trägern des Bündels zusammenfällt, so hat man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes P_0 in das Polynom $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3$ einzusetzen und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so zu bestimmen, dass das Substitutionsresultat verschwindet. Bezeichnet man mit K_{10}, K_{20}, K_{30} die Werthe, welche die Functionen K_1, K_2, K_3 für die Coordinaten des Punktes P_0 annehmen, so sind die λ daher der Gleichung unterworfen $\lambda_1 K_{10} + \lambda_2 K_{20} + \lambda_3 K_{30} = 0$.

Man erhält hieraus

$$\lambda_3 = -\lambda_1 \cdot \frac{K_{10}}{K_{30}} - \lambda_2 \frac{K_{20}}{K_{30}},$$

und nachdem man dies in K eingesetzt hat

$$K_{30} \cdot K = \lambda_1 (K_{30} \cdot K_1 - K_{10} \cdot K_3) + \lambda_2 (K_{30} \cdot K_2 - K_{20} \cdot K_3).$$

In dieser Gleichung ist noch das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ willkürlich. Nun sind

$$K_{30} \cdot K_1 - K_{10} \cdot K_3 = 0 \quad \text{und} \quad K_{30} \cdot K_2 - K_{20} \cdot K_3 = 0$$

die Gleichungen zweier bestimmter Kugeln des Bündels, nämlich die Gleichungen der durch P_0 gehenden Kugeln der beiden Büschel K_1, K_3 und K_2, K_3 ; daher folgt: Durch einen gegebenen Punkt gehen einfach unendlich viele Kugeln eines Bündels; diese Kugeln bilden ein Kugelbüschel, ihre Chordalebene ist die durch diesen Punkt und die Chordalachse des Bündels bestimmte Ebene.

Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Kugel eines Kugelbüschels; wir schliessen daher: Durch zwei Punkte des Raumes ist eine Kugel eines Kugelbündels im Allgemeinen eindeutig bestimmt.

Nur dann, wenn das Bündel zwei reale Träger hat, und wenn dieselben mit den beiden gegebenen Punkten auf einem Kreise liegen, gehen durch die beiden Punkte unzählig viele Kugeln des Bündels, nämlich alle Kugeln, die diesen Kreis gemein haben, also alle Kugeln eines Büschels.

12. Der Mittelpunkt der Kugel $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$ hat die Coordinaten

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$, $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$, $c = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$; wir schliessen daher (§ 3, 28): Die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels liegen auf einer Ebene; der Mittelpunkt von K theilt das Dreieck der Centren der Kugeln K_1, K_2, K_3 im Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$.

Ferner folgt hieraus: Jeder Punkt der Centralebene eines Bündels (d. i. der Ebene, welche die Centren der Kugeln des Bündels enthält) ist der Mittelpunkt einer (realen oder imaginären) Kugel des Bündels.

$\mu' + \mu'' = 1$, so kann jedes Werth-
geeignete Wahl von μ' und μ'' in

$$c = \mu'c' + \mu''c'';$$

4. und 5. und enthalten eine un-
aus 1.

$$2c'c_1 = d_1,$$

$$2c''c_1 = d_1,$$

$$\mu'b' + \mu''b'' = 2(\mu'a' + \mu''a'')a_1 + 2(\mu'b' + \mu''b'')b_1 + 2(\mu'c' + \mu''c'')c_1 - d_1.$$

hat man nach den Formeln 6.

$$\mu''b'' = 2aa_1 + 2bb_1 + 2cc_1 - d_1, \text{ d. i. } \mu'b' + \mu''b'' = b.$$

gleichung der Kugel \mathcal{R} ergibt sich daher zu

$$y^2 + z^2 - 2(\mu'a' + \mu''a'')x - 2(\mu'b' + \mu''b'')y - 2(\mu'c' + \mu''c'')z + b'' = 0.$$

an zu den drei ersten Gliedern den Faktor $\mu' + \mu'' = 1$, so erhält man

$$\mathcal{R} = \mu'\mathcal{R}' + \mu''\mathcal{R}'' = 0,$$

$$\mathcal{R}' = x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + b' = 0$$

$$\mathcal{R}'' = x^2 + y^2 + z^2 - 2a''x - 2b''y - 2c''z + b'' = 0$$

ungen zweier Orthogonalkugeln des Bündels sind; also bilden alle
kugeln des Bündels ein Büschel.

leicht weist man leicht nach: Alle Orthogonalkugeln der Kugeln
büschels bilden ein Kugelbündel, dessen Kugeln durch die
Allpunkte des Büschels, d. i. durch die Punkte hindurchgehen,
verschwindend kleine Kugeln anzusehen sind.

um über die Kugeln eines Bündels urtheilen zu können, die eine ge-
ebene E berühren, wählen wir ein Coordinatensystem, dessen XY -Ebene
ebene fällt. Die Gleichungen des Schnittkreises k der Ebene E mit
den Kugeln $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0$ des Bündels erhalten wir, indem
Function K die Coordinate z durch Null ersetzen. Hierdurch entsteht

$$k = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 = 0,$$

wo $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ die Gleichungen der Kreise sind, in denen
 E von den Kugeln K_1 , K_2 , K_3 geschnitten wird.

Gesammtheit aller Kreise k , deren Gleichung aus den Gleichungen
ebener Kreise k_1 , k_2 , k_3 linear nach der Formel 1. abgeleitet werden,
bilden ein Kreisbündel.

Kugel, deren Centrum auf der XY -Ebene liegt, hat die Gleichung

$$K = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0,$$

wo α , β die Coordinaten des Centrums und ρ der Kugelradius sind; der
Schnittkreis dieser Kugel mit der XY -Ebene hat die Gleichung

$$k = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0,$$

also die Beziehung $K = k + z^2$.

Kugeln \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{R}_3 , \mathcal{R} , welche k_1 , k_2 , k_3 , k zu grössten Kreisen haben,
haben die Gleichungen

$$k_1 + z^2, \quad \mathcal{R}_2 = k_2 + z^2, \quad \mathcal{R}_3 = k_3 + z^2, \quad \mathcal{R} = k + z^2,$$

wo man für k den Werth aus 1. setzt und an z^2 den Faktor $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
bringt

$$\mathcal{R} = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)z.$$

es folgt

$$\mathcal{R} = \lambda_1 \mathcal{R}_1 + \lambda_2 \mathcal{R}_2 + \lambda_3 \mathcal{R}_3.$$

berührende Ebenen E und F berühren, welche die vier von E und F einge-

Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels berühren, liegen also auf der Centralebene des Bündels von den beiden Ebenen E und F . Die Construction der Centren der gesuchten Kugeln, wenn man α der Reihe nach durch die Mittelpunkte der Kugeln eines Bündels, die zwei

Kugeln eines Bündels Auskunft zu nehmen, wählen wir die Centralebene zur Centralebene, den Anfangspunkt in die Spur der Centralebene von G auf die XY -Ebene.

Das Centrum einer die Gerade G berührenden Kugel ist der Punkt P von der Geraden G , die P zum Centrum hat, das ist also die Tangente; also wenn das Centrum P in Bezug auf eine

1

$$2\beta y - 2\gamma x + \delta = 0,$$

annimmt, wenn man die Coordinaten

$$3y + \delta = 0.$$

sei Q . Der Abstand d ist die Hypotenuse, die eine Kathete PQ , die andere Q ist. Ist nun φ der Winkel, den die Verbindung des Punktes Q von G gleich

$$d^2 = y^2 + x^2 \sin^2 \varphi.$$

Die Kugel gleich sein; daher hat man

$$d^2 = x^2 \sin^2 \varphi + y^2.$$

$$3y + \delta = 0.$$

$$\left(\frac{\delta \cos^2 \varphi - \alpha^2}{2\beta \cos^2 \varphi} \right) = 0.$$

Die Centren aller Kugeln eines Bündels, die eine Ebene E berühren, liegen auf einer Parabel; die Achse der Parabel ist die Centralebene, die die Coordinaten des Scheitels

$$\frac{\alpha^2}{2\beta}, \quad \frac{\beta}{\cos^2 \varphi}.$$

Die Centren aller Kugeln eines Bündels, die zwei gegebene

Geraden berühren; ihre Centra erhält man als die Schnittpunkte der vier Parabeln.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Centra aller Kugeln eines Bündels, die eine gegebene Ebene E berühren, auf einer Ellipse liegen, nämlich auf der

iten

nan

ein,

mitt

ject

man

aus 1. und 2. der keine nach y und x , so erhält man die Verticalprojection und der seitlichen Projection der Schnitt ebenfalls vom zweiten Grade.

Um nun über die Natur der Schnittcurve selbst urtheilen wir auf der Horizontalspur der Ebene T einen Punkt O' zu eines auf T liegenden ebenen Coordinatensystems; die Abscisse wir auf die Horizontalspur; $O'Y$ sei die Ordinatenachse, $O'Y$ projection. Die Geraden $O'E$ und $O'Y$ bilden ein in der Ebene rechtwinkeliges Coordinatensystem; transformiren wir die Gleichung projection der Schnittcurve auf dieses System, so erhalten wir zweiten Grades zwischen den auf dieses System bezüglichen C

3. $a\xi^2 + 2b\xi\eta' + c\eta'^2 + 2d\xi + 2e\eta' + f =$

Ein Punkt P der Schnittcurve und sein Grundriss P' hat scisse ξ , und zwischen der Ordinate η des Punktes P und der Projection besteht die Gleichung $\eta' = \eta \cos \alpha$. Wir erhalten a der Schnittcurve in Bezug auf das Coordinatensystem ΞY , v durch $\eta \cos \alpha$ ersetzen; die resultirende Gleichung ist vom zwe zeigt: Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Curve zweiter Ordnung geschnitten.

2. Um über die Schnittpunkte einer Fläche zweiter Ordnung Geraden Auskunft zu erhalten, können wir folgenden Weg ein

Ziehen wir durch einen Punkt P_0 eine Gerade, die mit Winkel α, β, γ bildet, so hat ein Punkt P dieser Geraden, de Strecke $P_0P = r$ entfernt ist, die Coordinaten

2. $x = x_0 + r \cos \alpha, \quad y = y_0 + r \cos \beta, \quad z = z_0 +$

Soll P auf f liegen, so müssen diese Coordinaten der Gleichungen; hieraus folgt für r die quadratische Gleichung

$A(x_0 + r \cos \alpha)^2 + 2B(x_0 + r \cos \alpha)(y_0 + r \cos \beta) + 2C(x_0 + r + D(y_0 + r \cos \beta)^2 + 2E(y_0 + r \cos \beta)(z_0 + r \cos \gamma) + F + 2G(x_0 + r \cos \alpha) + 2H(y_0 + r \cos \beta) + 2J(z_0 + r \cos$ oder, nach Potenzen von r geordnet:

3. $f_0 + 2(f_{x_0}' \cos \alpha + f_{y_0}' \cos \beta + f_{z_0}' \cos \gamma)r + (A \cos^2 \alpha + 2C \cos \alpha \cos \gamma + D \cos^2 \beta + 2E \cos \beta \cos \gamma + F \cos^2 \gamma$

Wenn man abkürzungsweise setzt

4.
$$\begin{aligned} f_x' &= Ax + By + Cz + G, \\ f_y' &= Bx + Dy + Ez + H, \\ f_z' &= Cx + Ey + Fz + J, \end{aligned}$$

und durch angehängte Nullen, $f_0, f_{x_0}', f_{y_0}', f_{z_0}'$, bezeichnenden Function statt x, y, z die speziellen Werthe x_0, y_0, z_0 setzen.

Aus 3. folgt zunächst: Eine Fläche zweiter Ordnung wird in zwei (realen oder imaginären) Punkten getroffen

3. Nehmen wir an, dass P_0 auf der Fläche liegt, so ist

0.

ndert sich n
die Columnen mit den Zeilen vertauscht.

Wir werden nun zeigen, dass unter der Voraussetzung $\Delta = 0$
 $f_x' = 0, f_y' = 0, f_z' = 0, Gx + Hy + Jz + I$
nur dann einen einzigen im Endlichen liegenden Schnittpunkt h
drei Ebenen $f_x' = 0, f_y' = 0, f_z' = 0$ nicht mehr als einen Punk

Denn sind zwei der Ebenen identisch, so sind zwei von
Zeilen und die entsprechenden Columnen in Δ proportional. I
Punkt P_0 der vier Ebenen bestimmt sich aus einer der beiden zus
Ebenen und den beiden andern; die Determinante dieser drei lineal
welche der gemeinsame Nenner der Lösungen ist, hat alsdann zw
Columnen, verschwindet also identisch, P_0 ist also unendlich fern o

Ist z. B. $f_x' = f_y'$, so ist $B = mA, D = mB, E = mC,$
 x_0, y_0, z_0 ergeben sich aus

$$\begin{aligned} Ax_0 + mAy_0 + Cz_0 &= -G, \\ Cx_0 + mCy_0 + Fz_0 &= -J, \\ Gx_0 + mGy_0 + Jz_0 &= -K. \end{aligned}$$

Enthalten ferner die Ebenen $f_x' = 0, f_y' = 0, f_z' = 0$ ein
dass zwei derselben identisch sind, so besteht für zwei Zahle
Identität

$$f_z' = mf_x' + nf_y'.$$

Hieraus folgt $C = mA + nB, E = mB + nD, F = mC + nE,$
Der Punkt P_0 bestimmt sich aus $f_x' = 0, f_y' = 0$ und $Gx + Hy$
d. i. aus

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + (mA + nB)z_0 &= -G, \\ Bx_0 + Dy_0 + (mB + nD)z_0 &= -H, \\ Gx_0 + Hy_0 + (mG + nH)z_0 &= -K. \end{aligned}$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & (mA + nB) \\ B & D & (mB + nD) \\ G & H & (mG + nH) \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch; folglich sind die Lösungen des Systems
oder unbestimmt.

Umgekehrt ist einleuchtend, dass wenn die drei Ebenen $f_x', f_y', f_z' = 0$ nicht mehr als einen Punkt gemein haben, dies d
Systeme 1. genügende Punkt ist.

Wenn daher ein einziger im Endlichen liegender Punkt das
so kann derselbe aus den drei Gleichungen gefunden werden

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 &= -G, \\ Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 &= -H, \\ Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 &= -J, \end{aligned}$$

und es ist

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} \neq 0.$$

zeichnen wir die Fläche
den Cylinder. Zerfällt
it sie die zweite Potenz
rennte oder zusammen-
ss die quadratische

Gleichung $f = 0$ einen eigentlichen oder ausartenden Cylinder dar-
stellt, sind also (No. 4 und 5)

$$\Delta = 0 \text{ und } \Delta_1 = 0.$$

7. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0$, und $T_1' = 0$,
 $T_2' = 0$, $T_3' = b_1 T_1' + b_2 T_2' = 0$ die Gleichungen von drei Paar ent-
sprechenden Ebenen zweier projectiven Büschel, so werden die Gleichungen je
zweier entsprechenden Ebenen in der Form erhalten (§ 3, 30)

$$T = \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0, \quad T' = \lambda_1 b_1 T_1' + \lambda_2 b_2 T_2' = 0.$$

Die Punkte, in welchen sich entsprechende Ebenen schneiden, erfüllen die
Gleichung, welche durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus $T = 0$ und $T' = 0$
entsteht,

$$1. \quad \begin{vmatrix} a_1 T_1 & a_2 T_2 \\ b_1 T_1' & b_2 T_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade.

Wenn die Träger der beiden Büschel auf einer Ebene T_0 liegen, und diese
Ebene in beiden Büscheln sich selbst entspricht, so bezeichnen wir die Büschel
als perspectiv. Man kann dann T_0 an die Stelle von T_1 und T_1' in 1. treten
lassen und erhält

$$\begin{vmatrix} a_1 T_0 & a_2 T_2 \\ b_1 T_0 & b_2 T_2' \end{vmatrix} = T_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 T_2 \\ b_1 & b_2 T_2' \end{vmatrix} = 0;$$

die Fläche zweiter Ordnung zerfällt in die beiden Ebenen $T_0 = 0$ und
 $a_1 b_2 T_2' - a_2 b_1 T_2 = 0$. Zwei perspective Ebenenbüschel erzeugen
zwei Ebenen, deren eine die selbstentsprechende Ebene ist.

Wenn die Träger der beiden Büschel auf einer Ebene liegen, ohne perspectiv
zu sein, so lässt sich aus 1. ein linearer Faktor nicht absondern, die Gleichung
gehört also zu einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung. Schneiden sich die
Träger in einem Punkte Σ , so gehen die Schnittlinien je zweier entsprechenden
Ebenen durch Σ und jeder auf der Fläche liegende Punkt bestimmt mit Σ eine
Gerade, die ganz auf der Fläche liegt; die Fläche ist daher eine Kegelfläche.
Zwei projective Ebenenbüschel, deren Träger sich schneiden,
erzeugen einen Kegel zweiter Ordnung, der den Schnittpunkt der
Träger zur Spitze hat. Sind die Träger zweier projectiven Büschel parallel,
so sind auch die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen parallel, und die
von ihnen beschriebene Fläche ist mithin ein Cylinder.

8. Eine Kegelfläche, sowie eine Cylinderfläche II. O. sind durch
nf Mantellinien (d. i. auf der Fläche enthaltene Gerade) bestimmt. Um
e Flächen zu construiren, durchschneide man die Mantellinien durch eine
ebene, welche keine von ihnen enthält. Diese Ebene trifft die Mantellinien in
nf Punkten und die gesuchte Fläche in einer Curve II. O., die durch die fünf
unkte geht, und mithin construirt werden kann. Legt man nun durch die
unkte dieses Kegelschnitts Gerade, die durch den gemeinsamen endlich oder
endlich fernen Punkt der Mantellinien gehen, so liegen diese ganz in der Fläche.

Es ist ersichtlich, wie man eine Reihe von auf Kegelschnitte bezüglichen

Tangentialpunktes P_0 hinzu

$$5. \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$$

so kann man aus diesen fünf Gleichungen die Grössen x_0, y_0, z_0 und erhält als nothwendige Bedingung dafür, dass die Ebene u, v, w $f = 0$ berührt,

$$6. \quad \varphi = \begin{vmatrix} A & B & C & G & u \\ B & D & E & H & v \\ C & E & F & J & w \\ G & H & J & K & -1 \\ u & v & w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Umgekehrt erkennt man leicht, dass jede Ebene T , deren Gleichung $\varphi = 0$ genügen, eine Tangentenebene der Fläche f ist $\varphi = 0$, so giebt es vier Zahlen, x_0, y_0, z_0, k , die den Gleichungen genügen. Setzt man nun die Werthe für kx, ky, kz und für u, v, w in die mit k erweiterte Gleichung 5. ein, so erhält man

$$f_{x_0'} \cdot x_0 + f_{y_0'} \cdot y_0 + f_{z_0'} \cdot z_0 + Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 +$$

Nun ist, wie man durch direkte Multiplication sieht (vergl. die linke Seite identisch mit f_0 , und da dieselbe verschwindet, dass x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Punktes P_0 der Fläche f giebt man nun die Gleichung der Tangentenebene der Fläche mit der Gleichung der Ebene T , so sieht man aus den Gleichungen, dass diese Tangentenebene mit T identisch ist.

Die Gleichungen

$$f = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Jz$$

und

$$\varphi = \begin{vmatrix} A & B & C & D & u \\ B & D & E & H & v \\ C & E & F & J & w \\ G & H & J & K & -1 \\ u & v & w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

gehören daher zu derselben Fläche; $f = 0$ ist die Bedingung, dass die Coordinaten der auf der Fläche gelegenen Punkte erfüllen die Gleichung, der die die Fläche tangirenden Ebenen genügen. Man sieht, dass die Gleichung $\varphi = 0$ vom zweiten Grade in den Coordinaten ist.

12. Wir wenden uns nun zu den Untersuchungen über die zweiten Grades in Ebenencoordinaten, die den bisher in Punktcoordinaten durchgeführten analog sind. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades in Ebenencoordinaten ist

$$1. \quad \varphi = au^2 + 2buv + 2cuw + dv^2 + 2evw + fw^2 + 2gu + 2hv + 2iw + j = 0.$$

Die Ebenen, welche φ berühren, und zugleich durch einen gegebenen Punkt P gehen, müssen ausser der Gleichung $\varphi = 0$ noch der Gleichung des Punktes P genügen

$$2. \quad P = \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta = 0.$$

+ g,
+ h,
+ i,
welche die Fun
ahmen.
identität
 $v + iw + k =$
Wir erfahren
re) Tangenten

n φ . Dann ist
welcher die Eben
Gleichung
 $\varphi + iw_0 + k) +$
die Schnittlinie
fallen, so muss
dinaten der Eb

Gleichung erfüllen

2. $\varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k$

Dies ist die Gleichung eines Punktes. Wir schliessen daher:
auf einer Tangentenebene T_0 einer Fläche zweiter K
welche ausser T_0 noch eine mit T_0 zusammenfallende
ebene der Fläche geht, gehen durch einen Punkt.

Dies ist der Punkt, in welchem eine Tangentenebene der Fl
unendlich nahe benachbarten getroffen wird, mithin der Punkt
von T_0 berührt wird. Die Gleichung des Punktes, in
Tangentenebene T_0 die Fläche zweiter Klasse $\varphi = 0$ berü

$P = \varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k$

Nach der Identität No. 14, 5 hat man, da $\varphi_0 = 0$

$-(\varphi_{u_0}' \cdot u_0 + \varphi_{v_0}' \cdot v_0 + \varphi_{w_0}' \cdot w_0) = gu_0 + hv_0 + iw_0 + k$

und kann daher die Gleichung des Punktes P auch in der Form

$P = \varphi_{u_0}' (u - u_0) + \varphi_{v_0}' (v - v_0) + \varphi_{w_0}' (w - w_0)$

16. Der auf einer Tangentenebene T_0 gelegene Berührungspunkt
dann unbestimmt, wenn in der Gleichung $P = 0$ alle vier Con
verschwinden, also wenn die Coordinaten von T_0 den vier Gleichungen

1. $\begin{aligned} \varphi_{u_0}' &= au_0 + bv_0 + cw_0 + g = 0, \\ \varphi_{v_0}' &= bu_0 + dv_0 + ew_0 + h = 0, \\ \varphi_{w_0}' &= cu_0 + ev_0 + fw_0 + i = 0, \\ gu_0 + hv_0 + iw_0 + k &= 0. \end{aligned}$

Die Bedingung für den Verein dieser vier für u_0, v_0, w_0 linearen

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b & c & g \\ b & d & e & h \\ c & e & f & i \\ g & h & i & k \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso, wie in No. 4, erkennt man: Soll das System 1. eine
eindeutige Lösung haben, so müssen die Gleichungen

2. $\begin{aligned} au_0 + bv_0 + cw_0 &= -g, \\ bu_0 + dv_0 + ew_0 &= -h, \\ cu_0 + ev_0 + fw_0 &= -i, \end{aligned}$

Grenzfläche II. Kl., so ist

$$= bu + dv + h, \quad \varphi_w = 0.$$

ntenebene T_0 dieser Fläche gelegenen
(No. 15)

$$'_0 + h)v + gu_0 + hv_0 + k = 0.$$

nd mit w ; wir schliessen daher: Die
liegen alle auf der Doppelebene
hnitts.

en zweiter Klasse dieselbe Rolle, welche
hat. Dem Cylinder als dem Kegel mit
in No. 17 behandelte Grenzfläche mit

unendlich ferner Doppelebene.

20. Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes, in welchem die Ebene T_0
die Fläche $\varphi = 0$ berührt, so muss die Gleichung dieses Punktes

$$P = \varphi_{u_0}' \cdot u + \varphi_{v_0}' \cdot v + \varphi_{w_0}' \cdot w + gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = 0$$

is auf einen constanten Faktor m mit der Gleichung

$$xu + yv + zw - 1 = 0$$

übereinstimmen. Wir erhalten hieraus die Beziehungen

$$\varphi_{u_0}' = au_0 + bv_0 + cw_0 + g = m \cdot x,$$

$$\varphi_{v_0}' = bu_0 + dv_0 + ew_0 + h = m \cdot y,$$

$$\varphi_{w_0}' = cu_0 + ev_0 + fw_0 + i = m \cdot z,$$

$$gu_0 + hv_0 + iw_0 + k = -m.$$

Fügt man hierzu noch die selbstverständliche Gleichung

$$xu_0 + yv_0 + zw_0 - 1 = 0,$$

so kann man aus diesen fünf Gleichungen die Grössen u_0, v_0, w_0, m eliminiren;
als nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass P ein Punkt der Fläche
 $\varphi = 0$ ist, erhält man die Gleichung

$$f = \begin{vmatrix} a & b & c & g & x \\ b & d & e & h & y \\ c & e & f & i & z \\ g & h & i & k & -1 \\ x & y & z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade. Jede Fläche zweiter Klasse
ist daher von der zweiten Ordnung; früher (No. 11) haben wir gefunden,
dass jede Fläche zweiter Ordnung von der zweiten Klasse ist. Es ist daher
nicht nöthig, die Bezeichnung zweiter Klasse und zweiter Ordnung getrennt
weiter zu führen; man fasst beide unter der gemeinsamen Bezeichnung: Flächen
zweiten Grades, zusammen.

Eine Grenzfläche zweiter Klasse kann nicht durch eine einzige Gleichung in
Punktcoordinaten dargestellt werden. Da die Punkte der Grenzfläche einen
Kegelschnitt bilden, so ist die Horizontalprojection ebenfalls ein Kegelschnitt,
und die Punkte der Grenzfläche sind daher die Punkte des Raumes, welche der
Gleichung dieser Horizontalprojection und ausserdem der Gleichung der Doppel-
ebene genügen. Die Grenzfläche wird also in Punktcoordinaten durch
eine quadratische Gleichung z. B. zwischen x und y

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0$$

und durch eine lineare Gleichung, die Gleichung der Doppelebene,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

charakterisirt.

$$\cos^2 \gamma \cos^2 \varphi + \cos^2 \gamma \cos^2 \chi), \\ \cos^2 \chi - \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi.$$

$$\sin^2 \gamma \cos^2 \chi - \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi) - \sin^2 2\alpha = 0.$$

$$- \cos 2\alpha) \cos^2 \chi - \sin^2 2\alpha = 0,$$

$$\cos^2 \chi - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0.$$

r nun die Coordinaten der Punkte der af g, so ist bekanntlich

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

$$y^2 + \sin^2 \alpha (\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha) z^2 = 0.$$

isch für die Coordinaten, sie ist daher Ordnung, der den Nullpunkt zur

ir alle drei Coordinaten ist, so folgen zwei entgegengesetzte gleiche Werthe natenebene, als Projection eines Kegel betrachtet, gehören also zwei symmetrischen Kegels. Wir schliessen hieraus, dass Ebenen zu Symmetrieebenen hat. i noch etwas vereinfachen, wenn man n der YOZ-Ebene liegenden Mantel- ise bilden. Nach den Formeln für das i nämlich

$$\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma.$$

$$\text{aher hat man } \cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

$$- \sin^2 \alpha) = \sin^2 \beta \cos^2 \gamma.$$

t im Faktor von y^2 die Grösse $\cos^2 \alpha$ der Gleichung den gemeinsamen Faktor $\cos^2 \gamma$, so folgt

$$y^2 - z^2 = 0.$$

es in jedem Kegel zweiter Ordnung, der drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen hat, zwei durch die Spitze gehende Focalstrahlen f und f_1 giebt, derart, dass die Summe der Winkel die sie mit jeder Mantellinie des Kegels bilden, constant ist.

Wählen wir die Symmetrieebenen zu Coordinatenebenen, so muss die Gleichung des Kegels für alle drei Coordinaten rein quadratisch sein, und da der Schnittpunkt der Symmetrieebenen mit der Kegelspitze zusammenfallen muss, also die Kegelgleichung von den Coordinaten $x = y = z = 0$ des Nullpunktes befriedigt wird, so kann die Kegelgleichung kein von den Coordinaten freies Glied haben. Die allgemeine Form der Kegelgleichung ist daher unter diesen Voraussetzungen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Die drei Zahlen A, B, C können nicht alle dasselbe Zeichen haben, da

Hyperboloide und die bei

der Flächen zweiter Ordnung

wollen wir folgenden Weg einschlagen: Wir betrachten zunächst welche drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen haben; hiernächst nur zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen zukommen; wir untersuchen, ob es Flächen zweiter Ordnung giebt, die keine Symmetrieebene haben.

Soll die Ebene XOY eine Symmetrieebene einer Fläche sein, so müssen zu jedem Punkte P' der Ebene XOY zwei Punkte gehören, die entgegengesetzt gleiche Werthe der Ordinate z haben. Setzt man sich also in $f = 0$ die Coordinaten x und y gegeben, so muss die Gleichung zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln für z ergeben, mithin für z^2 sein. In gleicher Weise schliessen wir, dass die Gleichung quadratisch für x und y ist, wenn die Ebenen YOZ und XOZ Symmetrieebenen sind. Die Gleichung einer Fläche II. O., die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen hat, ist daher in Bezug auf dieselben

$$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0.$$

2. Wir betrachten zunächst die Fälle, dass ein oder mehr Coefficienten gleich Null ist.

α) Sind drei Coefficienten gleich Null, z. B. $D = F = K = 0$, so reducirt sich die Gleichung auf $Ax^2 = 0$, die Fläche der (doppelt zu denkenden) Ebene YOZ . Ist $A = F = K = 0$, so giebt sie die Ebene XOZ ; ist $A = D = K = 0$, so giebt sie die Ebene YOZ .

β) Sind zwei Coefficienten gleich Null, so ist zu untersuchen, ob die Fläche verschwindet oder nicht.

Ist $K = 0$ und noch ausserdem z. B. $F = 0$, so geht die Gleichung über in

$$f = Ax^2 + Dy^2 = 0;$$

durch Zerlegung findet man

$$f = (\sqrt{A} \cdot x + \sqrt{-D} \cdot y)(\sqrt{A} \cdot x - \sqrt{-D} \cdot y) = 0.$$

Die Gleichung $f = 0$ stellt daher zwei durch die Zentren der Ebenen dar, deren Winkel von den beiden verticalen Coordinaten abhängen; haben A und D dasselbe Vorzeichen, so sind die Ebenen reell, und enthalten nichts Reales ausser ihrer Schnittlinie, sind sie imaginär.

Ist K von Null verschieden, und z. B. $D = F = 0$, so hat man

$$f = Ax^2 + K = 0,$$

mithin

$$x = \sqrt{-K:A}.$$

Die Gleichung ergiebt zwei reale oder imaginäre Ebenen, welche in gleichem Abstande parallel zur Ebene YOZ sind.

γ) Ist ein Coefficient gleich Null, so ist wieder zu untersuchen, ob die Fläche verschwindet, oder einer der drei andern Coefficienten.

Verschwindet z. B. F , so ist

$$f = Ax^2 + Dy^2 + K = 0.$$

Sind A , D und K von gleichem Zeichen, so wird der Gleichung keine realen Werthe von x und y genügt. Sind nicht alle Zeichen gleich, so giebt es reelle Werthe; man kann dann die Coordinatenbezeichnung wählen, dass A und K ungleiche Zeichen haben; durch Division der

zeichnet; a, b, c sind daher die

: Curven bezeichnet, in denen
n) schneidet. Die Gleichungen
der Reihe nach $z = 0, y = 0,$

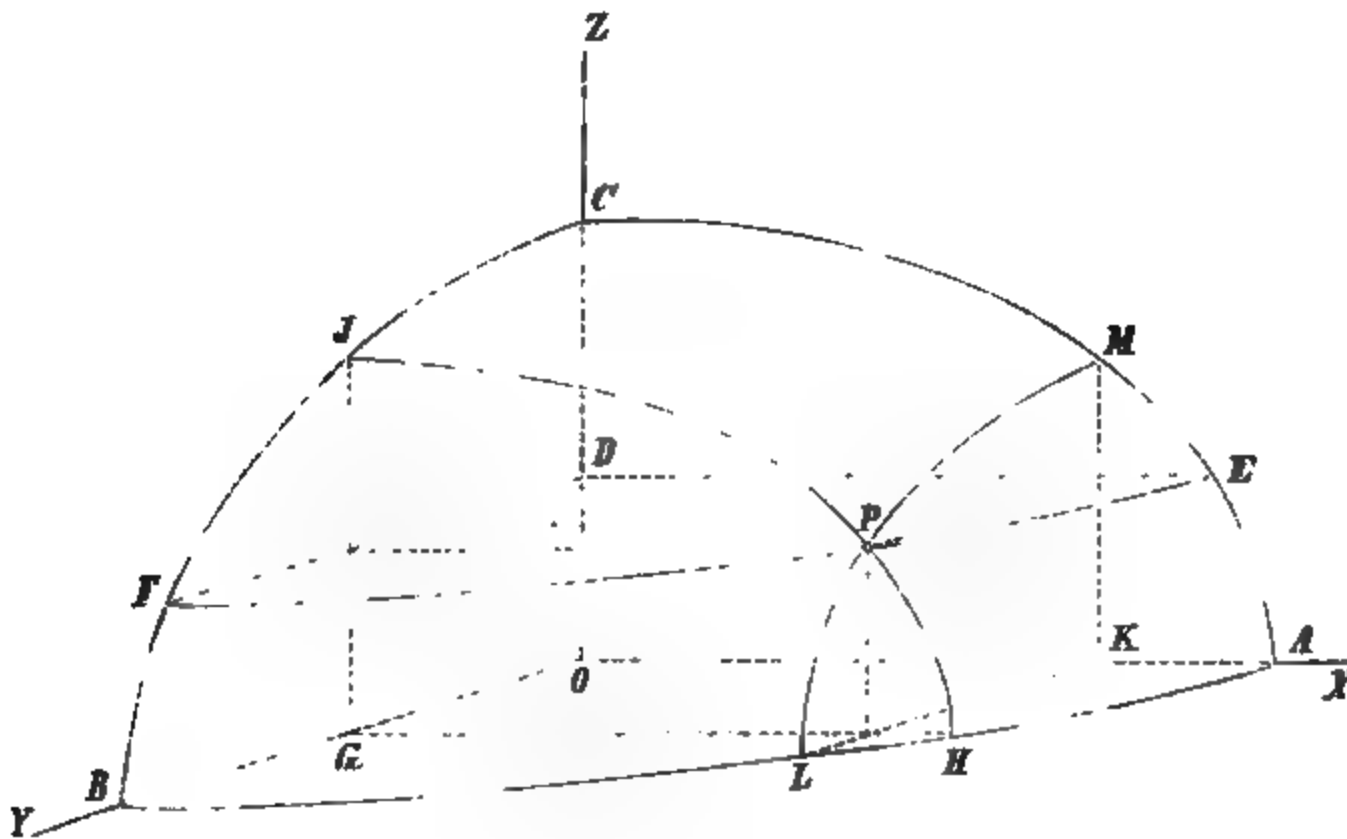
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

so Ellipsen, welche je zwei

der Strecken a, b, c zu Halbachsen haben.



(M. 446.)

Eine Ebene T , die parallel der XY -Ebene ist und von ihr den Abstand k hat, hat die Gleichung $z = k$. Die Gleichung der Horizontalprojection des Schnittes der Ebene T mit der Fläche f erhält man daher, wenn man $z = k$ in f einsetzt. Da T parallel der Ebene XOY ist, so ist diese Horizontalprojection mit der auf T liegenden Schnittcurve congruent. Die Substitution $z = k$ ergibt die Gleichung

$$1. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} - 1 = 0,$$

und diese zeigt, dass die Schnittcurve nur so lange real ist, als $k^2 : c^2 < 1$, also so lange k zwischen $-c$ und $+c$ liegt. Die Fläche liegt daher zwischen den beiden durch C und C_1 gehenden Horizontalebene. Ist $k = \pm c$, so wird die Gleichung 1.

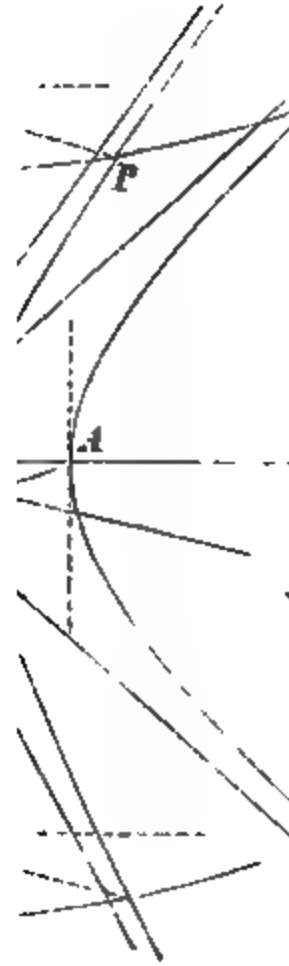
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

und dieser wird nur durch die realen Werthe $x = y = 0$ genügt; diese Schnittebene hat also mit der Fläche nur den Punkt $x = 0, y = 0, z = \pm c$, d. i. C oder C_1 gemein.

und die beiden Par

$$\frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$\frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$



he in einer El
er Hyperbel
yperbel mit d

che $z = k$, sch

$$= 0.$$

$$\frac{b}{c} \sqrt{k^2 + c^2}.$$

ist jeder horizo

Ist $OD = k$, s

z im verticalen

en. Wächst k ,

a_1 und b_1 , und erhalten unendlich grosse Werthe, wenn k un
Die Fläche wird daher beschrieben, wenn sich eine horizontale l
dass ihr Centrum auf der Z -Achse und ihre Scheitel auf zwei in
der YZ -Ebene liegenden Hyperbeln gleiten, die das Centrum

$$Gx + Hy + Jz + K = -1.$$

Die Gleichung der Ebene T , welche das Hyperboloid im Punkte P_0 berührt, ist daher

$$2. \quad T = \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - \frac{z_0}{c^2} \cdot z - 1 = 0.$$

Die Coordinaten dieser Ebene sind

$$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = \frac{y_0}{b^2}, \quad w = -\frac{z_0}{c^2}.$$

Setzt man die hieraus folgenden Werthe

$$x_0 = a^2 u, \quad y_0 = b^2 v, \quad z_0 = -c^2 w$$

in die Gleichung $x_0 u + y_0 v + z_0 w - 1 = 0$, so erhält man die Gleichung des Hyperboloids in Ebenencoordinaten

$$3. \quad \varphi = a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 - 1 = 0.$$

Aus den abgeleiteten Functionen von φ

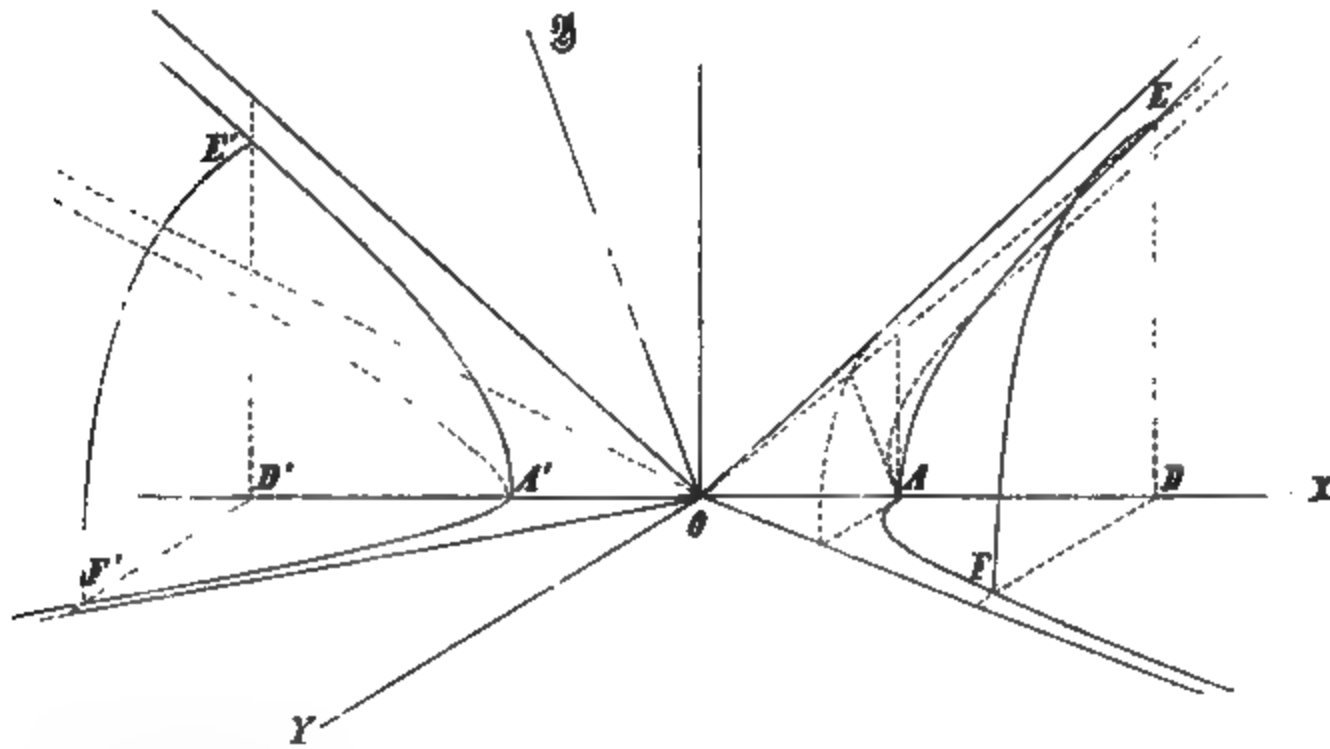
$$4. \quad \varphi_u' = a^2 u, \quad \varphi_v' = b^2 v, \quad \varphi_w' = -c^2 w, \quad gu + hv + iw + k = -1$$

erhält man die Gleichung des Berührungspunktes der Ebene T_0

$$5. \quad P = a^2 u_0 u + b^2 v_0 v - c^2 w_0 w - 1 = 0.$$

$$\text{Die Gleichung: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

11. Setzt man in die Gleichung der Reihe nach $y = z = 0$, $x = z = 0$ und $x = y = 0$, so erhält man $\xi = \pm a$, $\eta = \pm b \sqrt{-1}$, $\zeta = \pm c \sqrt{-1}$.



(M. 449.)

Die Fläche wird daher von der Y -Achse und der Z -Achse nicht in realen Punkten geschnitten; nur die Schnittpunkte mit der X -Achse sind real; sie werden als Scheitel der Fläche (A und A_1) bezeichnet.

Die Hauptschnitte haben die Gleichungen

$$\text{Horizontaler Hauptschnitt: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{Verticaler „ „ : } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\text{Seitlicher „ „ : } -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

erhalten congruent; da alsdann
 ieren Falle das Hyperboloid
 ch um ihre Hauptachse dreht.
 ationshyperboloid zu be-

0.

1

$$f_x' = \frac{x}{a^2}, \quad f_y' = -\frac{y}{b^2}, \quad f_z' = -\frac{z}{c^2}, \quad Gx + Hy + Jz + K = -1.$$

er ist die Gleichung der Ebene, die das einschalige Hyperboloid
 kte P_0 berührt.

$$T = \frac{x_0}{a^2} \cdot x - \frac{y_0}{b^2} \cdot y - \frac{z_0}{c^2} \cdot z - 1 = 0.$$

Coordinaten von T sind

$$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = -\frac{y_0}{b^2}, \quad w = -\frac{z_0}{c^2}.$$

ch Einsetzung der hieraus folgenden Werthe $x_0 = a^2 u$, $y_0 = -b^2 v$,
 $-c^2 w$ in die Gleichung

$$x_0 u + y_0 v + z_0 w - 1 = 0$$

ann die Gleichung des Hyperboloids in Ebenencoordinaten

$$\varphi = a^2 u^2 - b^2 v^2 - c^2 w^2 - 1 = 0.$$

abgeleiteten Functionen von φ sind

$$\varphi_u' = a^2 u, \quad \varphi_v' = -b^2 v, \quad \varphi_w' = -c^2 w, \quad gu + hv + iw + k = -1;$$

folgt die Gleichung des Punktes P , in welchem das Hyperboloid
 r Ebene T_0 berührt wird.

$$P = a^2 u_0 u - b^2 v_0 v - c^2 w_0 w - 1 = 0.$$

Nachdem wir nun einen Ueberblick über die Flächen zweiter Ordnung
 en haben, die drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen besitzen,
 Gleichungen in Bezug auf die Symmetrieebenen daher von der Form sind

$$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

wir uns zur Charakteristik der Flächen zweiter Ordnung, die nur zwei
 auf einander senkrechte Symmetrieebenen haben.

Wählt man diese beiden Symmetrieebenen zu den Ebenen XOZ und YOZ
 eines Coordinatensystems, so ist die Gleichung einer solchen Fläche rein qua-
 dratisch für x und y , dagegen gemischt quadratisch für z , also von der Form

$$2. \quad Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + 2Jz + K = 0,$$

wobei J von Null verschieden ist. Verschieben wir den Nullpunkt entlang der
 Z -Achse um die Strecke γ , so erhalten wir die Gleichung der Fläche im neuen
 Systeme, indem wir in der Gleichung 2. die Coordinate z durch $z + \gamma$ ersetzen;
 hierdurch entsteht

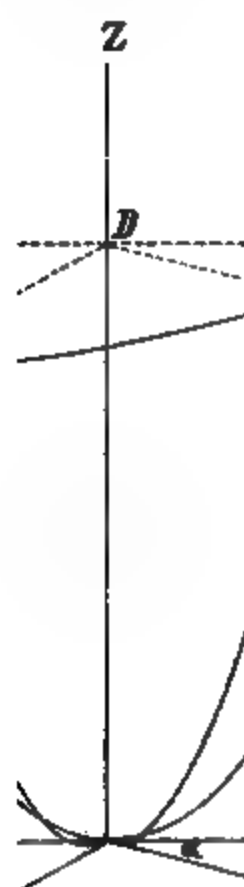
$$3. \quad Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + 2(F\gamma + J)z + (F\gamma^2 + 2J\gamma + K) = 0.$$

Kann man nun für γ einen endlichen Werth bestimmen, der die Gleichung
 erfüllt

$$4. \quad F\gamma + J = 0,$$

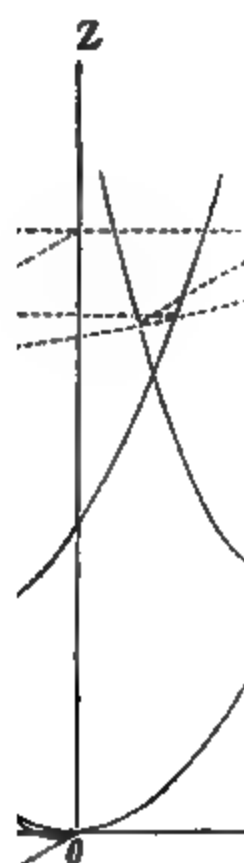
so geht die Gleichung 3. durch diese Wahl von γ in eine Gleichung von der

die beiden Par
 en Punkte, c
 Ebene XO



(M. 450.)

abeln gleiten.
 nendlich gros



(M. 451.)

Anal

$$\frac{y}{\sqrt{\delta}}$$

: d

=

ufr
lt i
itth
ist
ieg
D
Ni
er
et

—

m
d
d d
cher
hre
chr
g d

—

dem
d
cht
ine
c
te l
ed
best
upt
ht r
das
hni
vir

—

ine
ptac
nun
 $\frac{x^2}{a}$
lau

ide und die beiden Paral

nitthyperbeln das A
so haben sie alle die

$$\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0,$$

auptschnitt zu Asyn
eln selbst liegen
se und die beiden
auptschnitt bilden.
en der Fläche.

urch eine veränderlic
ich so bewegt, dass

den Ebenen XOZ und YOZ , ihre beiden Scheitel auf einem c
calen Hauptschnitte der Fläche und ihre Asymptoten auf den
bleiben, die durch die Z -Achse und die Geraden des horizontal
gehen.

Im Zusammenhange mit dieser Entstehungsweise der Fläche
den Namen hyperbolisches Paraboloid.

19. Die abgeleiteten Functionen der Function

$$f = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z$$

sind

$$f_x' = \frac{x}{a}, \quad f_y' = -\frac{y}{b}, \quad f_z' = -1, \quad Gx + Hy + Jz =$$

Die Gleichung der Ebene T , welche die Fläche im P
rührt, ist daher

$$1. \quad T = \frac{x_0}{a}x - \frac{y_0}{b}y - z - z_0 = 0.$$

Die Coordinaten der Ebene T ergeben sich hieraus zu

$$2. \quad u = \frac{x_0}{az_0}, \quad v = -\frac{y_0}{bz_0}, \quad w = -\frac{1}{z_0}.$$

Hieraus folgen die Coordinaten des Berührungspunktes, ausgedr.
Coordinaten der Tangentenebene

$$3. \quad x_0 = -a \cdot \frac{u}{w}, \quad y_0 = b \cdot \frac{v}{w}, \quad z_0 = -\frac{1}{w}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung ein

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 - 1 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des hyperbolischen Paraboloid
coordinaten

$$4. \quad \varphi = au^2 - bv^2 + 2w = 0.$$

Die abgeleiteten Functionen von φ sind

$$\varphi_u' = 2u, \quad \varphi_v' = -2v, \quad \varphi_w' = 2, \quad yu + hv + iw$$

daher ist die Gleichung des Punktes P , in welchem das h
Paraboloid von der Ebene T_0 berührt wird:

$$5. \quad P = au_0u - bv_0v + w + w_0 = 0.$$

20. Wir untersuchen nun, ob es Flächen zweiter Ordnung
eine Symmetrieebene haben.

Nehmen wir die Symmetrieebene zur YZ -Ebene des Coordinatensystems
i die Gleichung der Fläche rein quadratisch für x , dagegen gemi

also von der Form

$$1. \quad f = Ax^2 + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2$$

Wir suchen nun diese Gleichung Nullpunkt in der YZ -Ebene verlegen und geeignete Richtungen geben. Dabei bleiben die Coordinaten y und z ändern sich durch eine Coordinatentransformation rechtwinkelig sich also nur der Ausdruck

$$2. \quad Dy^2 + 2Eyz + Fz^2$$

und geht in eine quadratische Function der Coordinaten η und ξ über.

Wenn die Gleichung $f = 0$ ausser A also nicht zugleich $D = E = F = 0$, metrische der Ebene bewiesen worden ist, Coordinatensystems immer ein Coordinatensystem aus der Function 2. die transformirte Function

$$3. \quad My^2 + Nz^2 + R, \quad 0$$

Die Gleichung

$$Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 +$$

geht aus 1. hervor, wenn man $x = 0$ setzt, so ist die Fläche von der Symmetrieebene getrennt, daher ein, je nachdem diese Schmelze oder Hyperbel ist) oder keinen (Parabelsystem lautet die Gleichung der Fläche

$$5. \quad Ax^2 + My^2 + Nz^2 + R = 0,$$

Wenn also nicht zugleich $D = E = F = 0$ noch zwei, oder noch eine Symmetrieebene stehen.

Wenn $D = E = F = 0$ ist, so ist die Fläche zu

$$7. \quad f = Ax^2 + 2Hy$$

Der Schnitt dieser Fläche mit der YZ -Ebene

$$8. \quad 2Hy + 2Jz$$

ist also eine Gerade. Wählt man dieses Coordinatensystem, so vereinfacht sich die Gleichung

$$2Hy$$

es ist also dann $J = K = 0$, und die

$$9. \quad Ax^2 + 2Hy$$

Als Gleichung im Coordinatensystem XOY betrachtet, stellt sie eine Parabel dar, deren Scheitel im Nullpunkte und deren Achse auf der Y -Achse liegt. Da jeder Punkt der Gleichung 9. genügt, dessen Horizontalprojection auf dieser Parabel liegt, so folgt, dass die Gleichung 9. einen Cylinder darstellt, dessen horizontaler Querschnitt eine Parabel ist, und dessen Mantellinien der Z -Achse parallel sind. Wir bezeichnen diesen Cylinder als parabolischen Cylinder.

Jede zu den Mantellinien normale Ebene kann als Symmetrieebene dieses Cylinders gelten.

21. Nun bleibt uns noch übrig, zu untersuchen, ob es unsymmetrische Flächen II. O. giebt.

en zweiter Ordnung.

uchen, an welche die
ehen, ob diese bei

hen zweiter Ordn

gerade G , die mit de
Strecken r , welche
che II. O.

$$Fx^2 + 2Gx + 2Hy$$

2, 3)

$$f' \cos \alpha + f' \cos \beta + f' \cos \gamma$$

det, so ist diese
gegengesetzt gleiche

der Punkt Π ist die Mitte zwischen den Schnittpunkten der Geraden
Fläche f .

Die Gleichung

2. $f' \cos \alpha + f' \cos \beta + f' \cos \gamma = 0$
ist also die Bedingung dafür, dass P die Mitte der unter de
Winkeln α, β, γ durch Π gehenden Sehne der Fläche $f =$

Es giebt unzählig viele Sehnen einer Fläche f , die in ein
Punkte Π halbt werden. Um die Gleichung der Fläche zu er
alle diese Geraden liegen, haben wir $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ in 2. durch c
eines Punkts von G auszudrücken.

Ist P auf G gelegen und von Π um ρ entfernt, so ist

$$x - \xi = \rho \cos \alpha, \quad y - \eta = \rho \cos \beta, \quad z - \zeta = \rho \cos \gamma$$

man gewinnt daher aus 2. die Gleichung der gesuchten Fläche

$$3. \quad T = f' (x - \xi) + f' (y - \eta) + f' (z - \zeta) = 0.$$

Wir haben daher: Die Sehnen einer Fläche II. O., d
gebenen Punkt Π zum Mittelpunkte haben, liegen auf der

$$T = f' (x - \xi) + f' (y - \eta) + f' (z - \zeta) = 0;$$

liegt der Punkt Π auf der Fläche f , so geht diese Ebene
Ebenenebene im Punkte Π über. Dieser Satz kann auch fol
erhalten: Jeder Punkt im Raume ist das Centrum eine
gehenden (realen oder nicht realen) ebenen Schnittes einer
die Gleichung der Ebene dieser Schnittcurve ist $T = 0$.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Ebene T für
des Raumes real ist, also auch dann, wenn keine durch Π gehende
der Fläche f in Π halbt wird.

2. Die Gleichung der Ebene T wird nur dann unbestimmt, w
dinaten des Punktes Π solche Werthe haben, dass die Function
zu leicht verschwinden, wenn also

$$A\xi + B\eta + C\zeta = -G,$$

$$1. \quad B\xi + D\eta + E\zeta = -H,$$

$$C\xi + E\eta + F\zeta = -J.$$

Wenn die Determinante

$$2. \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix}$$

iter

, n

re,
ng
dur

nm
elb
on
der
ch

$\gamma =$
Gl
 $f =$
ie
hne
cos
Mi
ei
ie C
 $\gamma \cdot$
nse,
ie V
 $=$
n e

$=$
die
T
ide
ntru
oie
Ce

cha
rorn
 f'_x
albi
mu

γ

+

gt n

\bar{y} ,

$E = 0, B \geq 0$ sind von dem

us §., dass auch $E = 0$; wir
 1. Ist $B = C = E = 0$, so

$$- \mu_0 = 0.$$

Nimmt man den gemeinsamen
 id die Gleichungen No. 11., 8.
 urch P_0 geht, Symmetrieebene.

$$+ 2Js + K = 0.$$

$= 0$ schicken wir einige Be-
 merkungen über die Geraden voraus, die eine Fläche II. O. in einem
 unendlich fernen Punkte treffen.

Eine Gerade, die durch einen Punkt Π geht und mit den Achsen die Winkel
 α, β, γ bildet, hat mit der Fläche II. O. $f = 0$ einen unendlich fernen Punkt
 gemein, wenn in der Gleichung No. 1, 1 der Coefficient von r^2 verschwindet,
 wenn also α, β, γ der Bedingung genügen

$$1. A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \cos \beta + 2C \cos \alpha \cos \gamma + D \cos^2 \beta + 2E \cos \beta \cos \gamma + F \cos^2 \gamma = 0.$$

Zieht man durch den Nullpunkt eine Parallele zu einer solchen Geraden,
 und ist P ein Punkt dieser Parallelen, so ist

$$x : y : z = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma,$$

mithin erfüllen die Coordinaten x, y, z die Gleichung

$$2. k = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur die quadratischen Glieder der Function f , sie
 stellt daher einen Kegel zweiter Ordnung dar, dessen Spitze im Nullpunkte
 liegt; der Kegel ist unabhängig von den Coordinaten des Punktes P_0 .

Bezogen auf die Symmetrieebenen ist die Gleichung einer centralen Fläche II. O.

$$f = Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + K = 0,$$

die Gleichung des Kegels k wird daher

$$k = Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 = 0.$$

Beim Ellipsoid haben die Coefficienten A, D, F dasselbe Vorzeichen. Der
 Kegel k enthält daher ausser der Spitze keinen realen Punkt; es giebt mithin
 keine realen Geraden, die ein Ellipsoid in einem unendlich fernen Punkte treffen.

Bei den Hyperboloiden haben wir den Kegel $k = 0$ (in § 6, No. 9 und 12)
 bereits als Asymptotenkegel kennen gelernt. Alle Geraden, die ein
 Hyperboloid in einem unendlich fernen Punkte treffen, sind daher
 den Mantellinien des Asymptotenkegels parallel.

Giebt man den Gleichungen der beiden Paraboloid die Form

$$f = Ax^2 + Dy^2 + 2Js = 0,$$

so erhält man

$$k = Ax^2 + Dy^2 = 0.$$

Beim elliptischen Paraboloid haben A und D gleiches Vorzeichen;
 daher besteht die dieser Gleichung zugehörige Fläche aus zwei imaginären Ebenen

$$\sqrt{A} \cdot x + \sqrt{-D} \cdot y = 0, \quad \sqrt{A} \cdot x - \sqrt{-D} \cdot y = 0,$$

die sich in der Z -Achse schneiden, und ausser derselben reale Punkte nicht ent-
 halten. Alle Geraden, die ein elliptisches Paraboloid in einem unend-
 lich fernen Punkte treffen, sind der Achse des Paraboloids parallel.

lie durch f
nden Gera
in kann wi

selben Systems schneiden sich nicht), so folgt, dass 2
 g und h schneidet, dass also g und h sich schneid
Jede Gerade des einen Systems wird von jec
Systems geschnitten.

Jede Ebene, die durch g geht, schneidet f in
welchem g ein Theil ist, der also aus g und aus e
Systems besteht, und berührt daher die Fläche in
und h sich durchschneiden. Wir schliessen daher:
von Ebenenbüscheln, welche aus lauter 7
hyperbolischen Paraboloids bestehen; jede
zu zwei solchen Büscheln, die verschiedene
Die Träger der Büschel sind die auf der Fläc

3. Die allgemeine Gleichung der Fläche II. O.
deren Verhältnisse eindeutig berechnet werden, wen
bekannt sind; denn durch jeden Punkt P_r ist eine C

$$f_r = Ax_r^2 + 2Bx_r y_r + \dots + 2Jx_r$$

gegeben, die linear und homogen für die Coefficiente
Eine Fläche II. O. ist daher durch neun Punk

Wenn drei Punkte einer Fläche in gerader Linie
ganz auf der Fläche; denn die Coordinaten der Schn
einer Fläche II. O. hängen von einer quadratischen
dieser von mehr als zwei Wurzeln genügt wird, so is

Sind von einem hyperbolischen Paraboloid zwei
die sich nicht schneiden, so gelten diese daher für z
Fläche; sind noch zwei Gerade β und β_1 gegeben, de
 α_1 schneidet, so dass α , α_1 und β , β_1 die Gegenseite
bilden, so gelten die Geraden β und β_1 , da jede d
der Fläche, nämlich durch Punkte auf α und α_1 gel
neue Punkte. Ein unebenes Vierseit, das ganz
enthalten ist, zählt also für acht Punkte der I

Da für die Coefficienten in der Gleichung eines Pa

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

so kann auf Grund dieser Gleichung einer der Coeff
andern ausgerechnet werden; man bedarf daher zur Be
eines Punktes weniger als im allgemeinen Falle. Wi
boloid ist durch acht Punkte bestimmt. Ei
boloid ist durch ein unebenes Vierseit bestim

Um das Paraboloid zu construiren, auf welchen
Geraden α , β , α_1 , β_1 liegt, bemerken wir, dass eine A
Geraden α und α_1 , die andere parallel β und β_1 ist.
Systems, zu welchem β und β_1 gehören, die beide
andern Systems schneiden und der letzteren Asympt
erhält man das ganze Paraboloid, wenn man eine G

$$DF \geq 0.$$

: Gleichung

$$-\frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

5;

Gleichung

$$-\frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

chaligen Hyperboloide liegen keine
unkt eines einschaligen Hyperboloids
if der Fläche ziehen.

ischaligen Hyperboloids gehenden Geraden
diesen Punkt

$$x^2 + Fz^2 = 0,$$

dem Asymptotenkegel liegt. Da nun die

Mantellinien des Asymptotenkegels mit dem Hyperboloid unendlich ferne Punkte
gemein haben, und da ferner zwei Gerade, die im unendlich Fernen sich unter
einem verschwindend kleinen Winkel schneiden, parallel sind, so folgt der Satz:
Die Geraden eines einschaligen Hyperboloids sind paarweis parallel.

5. Wie beim hyperbolischen Paraboloid (No. 2), so überzeugt man sich
auch hier, dass jede Ebene, die durch eine Gerade g eines Hyperboloids gelegt
wird, die Fläche in einer zweiten Geraden h schneidet, und Tangentenebene der
Fläche in dem Schnittpunkte P der Geraden g und h ist; sowie, dass durch
jeden Punkt P des Hyperboloids eine Gerade h desselben geht, welche die
Gerade g schneidet. Die zweite Gerade g_1 , die ausser h durch P geht, kann
die Gerade g nicht schneiden; denn sonst würden die drei Geraden g , h , g_1 auf
einer Ebene liegen, diese Ebene würde also mit der Fläche ein Gebilde dritter
Ordnung, nämlich den Verein der drei Geraden g , h , g_1 , gemein haben — im
Widerspruche mit der Thatsache, dass eine Ebene mit einer Fläche II. O. nur
ein Gebilde zweiter Ordnung gemein hat. Sämmtliche Gerade eines einschaligen
Hyperboloids zerfallen also in zwei Systeme: in solche, die eine gegebene Gerade
 g der Fläche schneiden, und in solche, die g nicht schneiden; durch jeden
Punkt der Fläche geht von jedem der beiden Systeme eine Gerade. Zwei Gerade
 h und h_1 , welche g schneiden, können sich ebenfalls nicht schneiden, da sonst
das Dreieck der Geraden h , h_1 , g auf der Fläche liegen würde. Jedes der
beiden Systeme von Geraden, die auf einem einschaligen Hyperbo-
loide liegen, enthält also solche Gerade, die sich nicht schneiden,
während jede Gerade des einen Systems von jeder Geraden des andern
Systems geschnitten wird.

Da jede durch eine Gerade eines Hyperboloids gelegte Ebene die Fläche
in einem Punkte dieser Geraden berührt, so hat man den Satz: Es giebt zwei
Systeme von Ebenenbüscheln, deren Ebenen sämmtlich Tangenten-
ebenen eines einschaligen Hyperboloids sind; jede Tangentenebene
des Hyperboloids gehört zu zwei Büscheln verschiedener Systeme;
die Träger dieser Systeme von Tangentialebenen-Büscheln sind die
beiden Systeme von Geraden des Hyperboloids.

6. Durch drei Gerade g_1, g_2, g_3 , die nicht liegen, ist ein Hyperboloid bestimmt, denn diese Gerade gleichbedeutend mit neun gegebenen Punkten, die Geraden liegen. Die Geraden g_1, g_2, g_3 schneiden sich demselben Systeme; es werden daher alle drei von Systems geschnitten. Da nun durch jeden Punkt Gerade gelegt werden kann, welche g_2 und g_3 schneidet, so bewegt, dass sie in allen Lagen eine Gerade h sich so bewegt, dass sie in allen Lagen eine Gerade g_1, g_2, g_3 schneidet, so beschreiben diese Geraden ein Hyperboloid; die verschiedenen Lagen von h bilden ein System, die Geraden g_1, g_2, g_3 bilden ein System.

Durch ein unebenes Vierseit und einen Punkt ist ein Hyperboloid bestimmt. Die Geraden des Hyperboloids, welche die Gegenseiten des unebenen Vierseits schneiden, bilden ein System.

7. Die Gerade h , die durch einen Punkt P auf der Geraden g_1 schneidet, wird dadurch erhalten, dass man die Ebenen T und T' projectirt, die durch g_2 und g_3 gehen, die Schnittlinie dieser Ebenen ist die gesuchte Gerade.

Rückt nun P auf g_1 fort, so beschreiben die Geraden h einen Ebenenbüschel, welche die Träger g_2 und g_3 aus lauter Tangentenebenen der Fläche bestehen, die sie projectiren, und mithin auch um h beschreiben.

Wir sehen daher: Je zwei zu demselben System gehörende Tangentenebenen eines einschaligen hyperbolischen Paraboloids, auf welches man die Gerade h projectirt, sind projectiv; und zwar entsprechen dieselbe Gerade des andern Systems demselben Punkte des Büschels des andern Systems bilden.

Man kann die Gerade g_1 durch irgend ein System ersetzen; g wird von allen Geraden h des Systems getroffen; in jedem Punkte von g treffen sich also zwei entsprechende Träger g_2 und g_3 sind; mithin werden diese Geraden demselben Systeme gehören, von den Geraden g_2 und g_3 projectiven Punktreihen getroffen, und zu zwei Punkten, die auf derselben Geraden des andern Systems liegen.

8. Umgekehrt schliesst man leicht: Der Ort der Schnittpunkte zweier entsprechenden Ebenen zweier projectiven Ebenenbüschel, deren Träger nicht auf einer Ebene liegen, ist ein Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid.

Denn sind in den beiden Büscheln die Ebenen T_1, T_2 und T_1', T_2' die Gleichungen von T_1 und T_1'

$T_1 = a_1 T_1 + a_2 T_2 = 0, \quad T_1' = b_1 T_1 + b_2 T_2 = 0$,
so sind die Gleichungen zweier entsprechenden Ebenen

$T = \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 = 0, \quad T' = \lambda_1 b_1 T_1 + \lambda_2 b_2 T_2 = 0$

Die Schnittpunkte beider Ebenen genügen der Elimination von λ_1 und λ_2 aus $T = 0$ und $T' = 0$

$a_1 b_2 T_1 T_2' - a_2 b_1 T_2 T_1' = 0$,
dies ist eine Gleichung zweiten Grades.

zweiter Ordnung. Kreisse

isches Paraboloid Φ
 inien je zweier ent
 daher schneiden j
 parallelen Gerade
 entsprechende Stral
 auf einer Ebe
 entsprechende
 nicht auf E lieg
 projectirt S und S'
 hende Ebenen
 nes hyperbolisc
 it parallel zu E ,

äger die entspi
 rbinden (die nic
 einschaliges Hy

eiden Reihen
 , und ist
 $P_1' + b_2 P_2'$,
 den Punkte
 $\lambda_1 P_1' + \lambda_2 b_2 P_2' =$
 le Punkte gehen,
 λ_2 aus $P = 0$ u

$= 0$.
 in Ebenencoordin
 e Fassung geben:
 ende Punkte zu

jectiven Punktreihen verbinden, deren Träger nicht auf
 Ebene liegen, ist ein einschaliges Hyperboloid; die Gerade
 das eine System von Geraden des Hyperboloids, die T
 beiden Punktreihen gehören zu dem anderen Systeme.

Wir bemerken schliesslich, dass die Flächen zweiter Ordnung, we
 enthalten, unter der Bezeichnung Regelflächen zweiten Grades
 gefasst werden.

§ 9. Schnittcurve und Schnittpunkte von Flächen zweiter C Kreisschnitte.

1. Die Schnittpunkte zweier Flächen II. O. genügen den Gleich
 beiden Flächen

$f = Ax^2 + 2Bxy + \dots + 2Jz + K = 0$ und $g = A'x^2 + 2B'xy + \dots + 2J'$
 eliminirt man der Reihe nach x , y und z aus diesen Gleichungen, so
 die Gleichungen der drei Projectionen der Schnittcurve der beide
 diese drei Gleichungen sind vom vierten Grade; die Project
 Schnittcurven zweier Flächen II. O. sind also Curven vier
 nung. Um die Coordinaten der Punkte zu erhalten, in denen die f
 der Flächen f und g von einer Ebene

$$T = mx + ny + pz + q = 0$$

er Ordnung. Kreissch

ählte Punkte J
dieser Curve. 1
ist, gehen beide
urch diese Punkte
. C identisch. Du
g viele Flächen
Büschel, desse

mein, so schneide
bene E , die durch
jede in einer realer
ser beiden Gerad
t sich E um die
Flächen ausserha

ch drei Punkte ge

weiter Flächen II.
ie Flächen den d
inander gemein;
Kegelschnitte, der
mitte identisch. V
|

+ $2B_1xy + \dots$

die Gleichungen der Flächen in Bezug auf dieses System, so muss die S
 $z = 0$ in f und g auf Gleichungen führen, die gleichbedeutend sind
nur um einen constanten Faktor von einander abweichen. Ist π dies
so hat man daher

$$Ax^2 + 2Bxy + Dy^2 + 2Gx + 2Hy + K = \pi (A_1x^2 + 2B_1xy + D_1y^2 +$$

Bildet man die Differenz $f - \pi g$, so erhält man

$$f - \pi g = z[2(C - C_1)x + 2(E - E_1)y + (F - F_1)z + 2(J -$$

Die Punkte, welche $f = 0$ und $g = 0$ erfüllen, und für welche n
ist, genügen somit der Gleichung

$$T_1 = 2(C - C_1)x + 2(E - E_1)y + (F - F_1)z + 2(J - J_1)$$

Dies ist die Gleichung einer bestimmten Ebene; je nachdem di
 f und g in einem realen oder imaginären Kegelschnitte trifft, haben
Flächen ausser dem auf T liegenden Kegelschnitte noch diesen re
imaginären Kegelschnitt gemein; die Ebene T_1 dieses Kegelschnitts
real. Wir schliessen daher: Wenn fünf Schnittpunkte 1, 2, 3, 4,
Flächen II. O. auf einer Ebene T liegen, so zerfällt die Schn
der beiden Flächen in zwei Kegelschnitte; der eine auf T
ist durch die Punkte 1 . . 5 bestimmt, der andere kann real oder
se n ; die Ebene, die ihn enthält, ist auch im letzteren Falle

Oder: Wenn zwei Flächen II. O. einen Kegelschnitt gemei
so haben sie noch einen realen oder imaginären Kegelschnitt
dessen Ebene stets real ist.

Bezieht man die Flächen f und g auf ein beliebiges Coordinatensy
ha man dabei u. A. die Substitution auszuführen

$$z = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

e von Flächen zweiter Ordnung. Kreisse-

ng; diese acht Punkte dürfen nicht
sein; durch acht Schnittpunk
iele Schnittcurven zweier Fläc
es Ebenen giebt, die eine Fläche
en hierzu zunächst folgenden Satz:

e II. O. in ähnlichen Kegelsch
n Schnittebenen zur XY -Ebene ein
r Fläche in Bezug auf dieses System
 $Bxy + \dots + K = 0$,

lspur dieser Fläche

$$x^2 + 2Gx + 2Hy + K = 0.$$

oder eine Hyperbel, oder besteht si
nehmen wir die beiden Symmetrie

die Gleichung der Spur die Form
 $Dy^2 + K = 0$.

üglich des neuen Systems ist daher
 $+ 2Eyz + Fz^2 + 2Jz + K =$
 XY -Ebene und von derselben um
Curve, deren Gleichung ist

$$2Eyz_0 + Fz_0^2 + 2Jz_0 + K =$$

$$x^2 + 2\frac{Ez_0}{D}y + \frac{E^2z_0^2}{D^2} + Fz_0^2 +$$

$$- \frac{E^2z_0^2}{D} = 0,$$

$$D\left(y + \frac{Ez_0}{D}\right)^2 - K_1 = 0,$$

$$Fz_0^2 - 2Jz_0 - K.$$

1 Kegelschnitte an, dessen Achsen
ttelpunkt die Coordinaten hat $\xi =$
rsen a_1 und b_1 dieses Kegelsch
man hat demnach

$$_1 = \sqrt{D} : \sqrt{A};$$

at also für alle parallelen Schnitte
nlich und haben parallele Achsen.

Parabel, so wähle man die Achse
llpunkte; die Gleichung 1. geht da
 $+ 2Gx = 0$;

h des neuen Systems ist daher

$$Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Jz =$$

er Ebene $z = z_0$ hat die Gleichung

$$z_0 + Fz_0^2 + 2Gx + 2Jz_0 = 0$$

$$\left(x + \frac{(DF - E^2)z_0^2 + 2JDz_0}{2D(G + Cz_0)}\right)$$

abel, deren Achse der Achse der S
hat

chtet, in ein Geradenpaar zerfallen,
1:

$$\left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) f^2 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \frac{f^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \frac{e^2}{a^2} \right] = 0.$$

1 $e^2 + f^2 = r^2$, so erhält man nach

einfacher Reduction

$$6. \quad \frac{1}{b^2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) e^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) f^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) r^2 = 0.$$

Sieht man r als gegeben, die Coordinaten e und f als unbestimmt an, so ergibt sich hieraus der Satz: Die Kugeln mit gegebenem Radius r , die einen Kegel II. O. in Kreisen schneiden, haben ihre Centra auf einer Ellipse, die auf einem Hauptschnitte liegt.

Aus 3. ergibt sich für den Winkel α , den die Kreisschnittebenen des Kegels mit der XY -Ebene bilden

$$7. \quad \tan \alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right)} = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}.$$

Die Kreisschnitte des Kegels II. O. sind rechtwinkelig zu dem Hauptschnitte des Kegels, dessen Mantellinien den kleineren Winkel mit der Kegelachse bilden, und bilden gleiche Winkel $(90^\circ - \alpha)$ mit der Achse.

12. Kreisschnitte des Ellipsoids. Ist k ein Kreis auf einem Ellipsoide, so lege man eine Ebene parallel zu k durch das Centrum des Ellipsoids. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid ebenfalls in einem Kreise, und durch diesen Kreis kann man eine Kugel legen, deren Centrum in das Centrum des Ellipsoids fällt. Um also die Kreisschnitte des Ellipsoids zu finden, hat man die Kugeln aufzusuchen, die mit dem Ellipsoide concentrisch sind und dasselbe in zwei ebenen Curven schneiden. Die Gleichungen des Ellipsoids und der Kugel sind

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad S = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Die Determinanten Δ und Δ_1 der Function $f - nS$ sind

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} - n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} - n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + nr^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} - n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} - n \end{vmatrix},$$

also ist

$$\Delta = \left(\frac{1}{a^2} - n \right) \left(\frac{1}{b^2} - n \right) \left(\frac{1}{c^2} - n \right) (nr^2 - 1), \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{a^2} - n \right) \left(\frac{1}{b^2} - n \right) \left(\frac{1}{c^2} - n \right).$$

Die Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta_1 = 0$ haben die gemeinsamen Wurzeln

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = \frac{1}{b^2}, \quad n = \frac{1}{c^2}.$$

Für diese erhält man

$$+ \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) y^2 - \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \right) = 0.$$

dreier Cylinder II. O., welche durch die Ebenen gehen können; ihre Mantellinien sind der X -Achse parallel. Setzen wir voraus, dass $a > b$, so sind die zweite und dritte hingegen sind elliptisch. Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein,

$$y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) z^2 = 0.$$

Die Faktoren

$$\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} y - \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{ac} z \right) = 0,$$

die durch die X -Achse gehen, und deren Gleichungen sich ergeben aus

$$= \frac{c \sqrt{a^2 - b^2}}{b \sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Es giebt es zwei Systeme von Kreisschnitten; die Ebenen derselben sind normal zu dem hyperbolischen Hauptschnitte, der die kleinere Hauptachse hat und sind gegen den elliptischen Hauptschnitt gleich geneigt.

14. Kreisschnitte des zweischaligen Hyperboloids. Da die durch das Centrum gehenden Ebenen, welche die Fläche treffen, dieselbe in einer Hyperbel schneiden, so geht kein realer Kreisschnitt durch das Centrum, wir haben daher die Kugel S in allgemeiner Lage vorauszusetzen. Die Gleichungen des Hyperboloids und der Kugel seien

$$F = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2ex - 2fy - 2gz + p = 0, \quad p = e^2 + f^2 + g^2 - r^2.$$

Für die Function $F - nS$ hat man die Determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n & 0 & 0 & en \\ 0 & -\frac{1}{b^2} - n & 0 & fn \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} - n & gn \\ en & fn & gn & -1 - pn \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} - n & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} - n \end{vmatrix}.$$

Die Wurzeln der Gleichungen $\Delta_1 = 0$ sind

$$n = \frac{1}{a^2}, \quad n = -\frac{1}{b^2}, \quad n = -\frac{1}{c^2}.$$

Für diese Werthe von n geht die Determinante Δ über in

$$-\frac{e^2}{a^4} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right), \quad \text{bez.} \quad \frac{f^2}{b^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right), \\ \text{bez.} \quad -\frac{g^2}{c^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right).$$

Soll einer dieser drei Werthe verschwinden, so muss entweder $e = 0$, oder $F = 0$, oder $g = 0$ sein. Unter diesen Voraussetzungen hat man die Gleichungen:

$$1. \quad F - \frac{1}{a^2} S = -\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) z^2 + 2 \frac{f}{a^2} y + 2 \frac{g}{a^2} z - \frac{p}{a^2} = 0,$$

$$\frac{f^2}{b^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Wurzel der Gleichungen $\Delta = 0$ und

$\Delta_1 = 0$ ist, muss also $e = 0$ oder $f = 0$ sein. Unter diesen Voraussetzungen ist

1. $F - \frac{1}{a}S = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) y^2 - \frac{1}{a} z^2 + 2 \frac{f}{a} y - 2 \left(1 - \frac{g}{a} \right) z - \frac{p}{a} = 0,$
2. $F - \frac{1}{b}S = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) x^2 - \frac{1}{b} z^2 + 2 \frac{e}{b} x - 2 \left(1 - \frac{g}{b} \right) z - \frac{p}{b} = 0.$

Diese Gleichungen sind die Gleichungen von Cylindern, deren Achsen parallel der X -Achse, bez. der Y -Achse sind; setzt man $a > b$ voraus, so ist 1. ein hyperbolischer, 2. ein elliptischer Cylinder. Nur der erstere kann für besondere Werthe von f, g und r in ein Ebenenpaar ausarten, und zwar tritt dies ein, wenn

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b} - \frac{1}{a} & 0 & \frac{f}{a} \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\left(1 - \frac{g}{a} \right) \\ \frac{f}{a} & -\left(1 - \frac{g}{a} \right) & -\frac{p}{a} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung giebt entwickelt

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) p - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(1 - \frac{g}{a} \right)^2 + \frac{1}{a^3} f^2 = 0.$$

Hieraus erhält man nach einfacher Umrechnung die Gleichung

$$3. \quad f^2 + 2(a - b) \left(g - \frac{r^2 + a^2}{a} \right) = 0.$$

Für einen gegebenen Werth r ist dies die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Z -Achse zusammenfällt, die sich in der Richtung der negativen Z -Achse erstreckt, deren Parameter gleich der Differenz $(a - b)$ ist und deren Scheitel die Ordinate hat $z = (r^2 + a^2) : a$.

Wählt man nun f, g und r der Gleichung 3. gemäss, so zerfällt der Cylinder 1. in zwei Ebenen, die der X -Achse parallel sind, und für deren Winkel α mit der XY -Ebene

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) : \frac{1}{a}} = \pm \sqrt{\frac{a - b}{b}}.$$

Im elliptischen Paraboloid giebt es also ebenfalls zwei Systeme von Kreisschnitten; dieselben sind normal zu dem parabolischen Hauptschnitte, der den kleineren Parameter enthält, und sind gegen die XY -Ebene gleich geneigt.

§ 10. Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen zweiter Klasse umschrieben ist. Gemeinsame Tangentenebenen dreier Flächen zweiter Klasse. Umschriebene Rotationskegel.

1. Die Coordinaten der Ebenen, welche zwei Flächen II. Kl.

1. $\varphi = Au^2 + 2Buv + \dots + 2Jw + K = 0,$
2. $\psi = A_1 u^2 + 2B_1 uv + \dots + 2J_1 w + K_1 = 0$

gleich berühren, genügen den beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$.

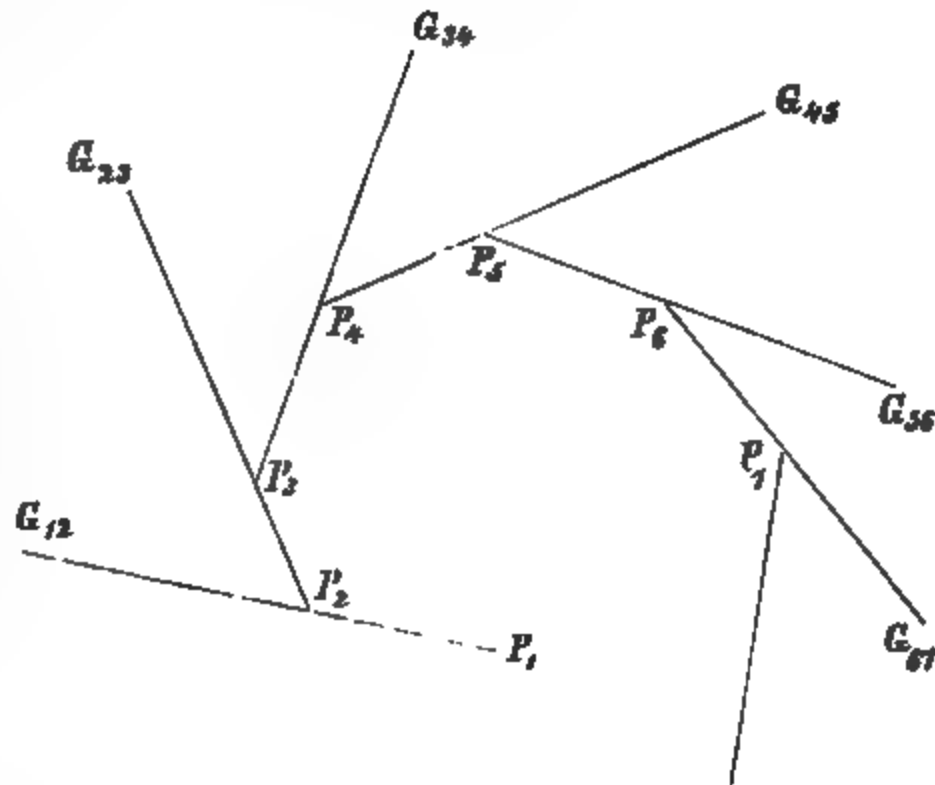
Eliminirt man z. B. w aus 1. und 2., so erhält man eine Gleichung vierten Grades in u und v ; betrachtet man diese Gleichung als die eines Gebildes in der XY -Ebene, so erkennt man: Die Spuren der Ebenen, die zwei Flächen II Kl. berühren, umhüllen in jeder Coordinatenebene eine Curve

seiten des Polygons, und lässt von jeder Schenkeln eingeschlossenen Winkel sowie man die beiden Scheitelwinkel wegnimmt, schneidet ungleichsinnig sind, so erhält man

Die geeignet gewählte Ebene ist von dem Polygone $P_1', P_2', P_3', P_4' \dots$ begrenzt, so dass der von dem Polygone ausgeschlossene Theil der Projectionsebene von der Projection der Fläche bedeckt wird, während die innerhalb $P_1', P_2' \dots$ liegenden Punkte nicht Projectionen von Punkten der Fläche sind.

Sind die auf einander folgenden Werthe $u_1, u_2, u_3, u_4 \dots$ nur wenig von einander verschieden, so unterscheiden sich auch die Stellungen der Ebenen $T_1, T_2, T_3, T_4 \dots$ nur wenig von einander. Gewisse Ausnahmestellen abgerechnet, ist daher der Flächenwinkel, der an dem positiven Theile der von P_i sich erstreckenden Geraden $G_{i-1,i}$ liegt, sowie dessen Scheitelwinkel, der an dem von P_{i-1} sich erstreckenden negativen Theile derselben Geraden liegt, nicht viel von einem gestreckten Winkel verschieden; dagegen ist der Flächenwinkel, der an der Kante $P_{i-1} P_i$ liegt, als Supplement eines nahezu gestreckten Winkels, ein sehr kleiner Winkel; das Polygon $P_1, P_2, P_3 \dots$ erscheint daher als eine scharfe Kante der Fläche.

Denkt man sich die Fläche entlang des Polygons $P_1, P_2, P_3 \dots$ zerschnitten, so zerfällt die Fläche in zwei getrennte Mäntel, die gleich und ähnlich sind; zu jedem Mantel gehört von jeder Ebene nur noch ein Winkelfeld. Zerschneidet man einen solchen Mantel entlang einer Geraden, z. B. $G_{1,2}$, so kann man die auf T_2 folgende Ebene T_3 um $G_{2,3}$ drehen, bis sie mit T_2 zusammenfällt und die vorhandenen Winkelfelder von T_2 und T_3 nicht auf einander liegen. Verfährt man ebenso mit jeder folgenden Ebene, erst mit T_4 , dann mit T_5 u. s. w., so wird dadurch der ganze Mantel der Fläche in eine Ebene ausgebreitet.



(M. 455.)

Lässt man u nun alle realen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen, so geht das unebene Polygon $P_1, P_2, P_3 \dots$ in eine Raumcurve über; die Geraden der Fläche werden zu Tangenten dieser Curve, da sie zwei unendlich nahe Punkte der Curve verbinden; die Winkel unter denen die beiden Mäntel entlang der Curve R sich treffen, werden verschwindend klein; die Eigenschaft beider Mäntel, sich in eine Ebene abwickeln (ausbreiten) zu lassen, bleibt bestehen.

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass jede in eine Ebene abwickelbare Fläche von dem eben beschriebenen Typus ist; denn eine solche Fläche ist noth-

2. eine andere Fläche zweiten Grades berühren, n ist

$$+ \dots + 2J_1 w + K_1 = 0,$$

g 2. genügen; setzt man diese Werthe ein,

$$f_s' + D_1 f_s'^2 + E_1 f_s' f_s' + F_1 f_s'^2 - 2J_1 f_s' f_s' + K_1 f_s'^2 = 0.$$

les in Bezug auf die Coordinaten x, y, z ; in Tangentialebenen der Flächen $f = 0$ en also noch auf der durch die Gleichung nso beweist man den analogen Satz: Die 2 II. O. längs einer auf ihr liegenden en noch eine Fläche II. O.; denn der

$$+ \dots + 2Jw + K = 0$$

hat die Gleichung

$$v + \varphi_w' \cdot w + \varphi_r' = 0,$$

$$G, \quad \varphi_v' = Bu + Dv + Ew + H,$$

$$J, \quad \varphi_r' = Gu + Hv + Jw + K.$$

nach

$$z = \varphi_v' : \varphi_r', \quad s = \varphi_w' : \varphi_r'.$$

noch eine zweite gegebene Fläche zweiten

$$+ \dots + 2J_1 z + K_1 = 0,$$

so müssen die Werthe 4. der Gleichung 5. genügen; man erhält also für die u, v, w die Bedingungsgleichung

$$6. \quad A_1 \varphi_u'^2 + 2B_1 \varphi_u' \varphi_v' + 2C_1 \varphi_u' \varphi_w' + D_1 \varphi_v'^2 + 2E_1 \varphi_v' \varphi_w' + F_1 \varphi_w'^2 - 2G_1 \varphi_u' \varphi_r' - 2H_1 \varphi_v' \varphi_r' - 2J_1 \varphi_w' \varphi_r' + K_1 \varphi_r'^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades in u, v, w ; alle Ebenen, welche die Fläche φ längs ihrer Schnittcurve mit der Fläche f bewahren, sind daher auch Tangentenebenen der Fläche 6.

6. Die abwickelbare Fläche, die zwei Flächen II. Kl. umschrieben ist, ist unzählig vielen Flächen II. Kl. umschrieben. Denn die Ebenen, welche die Flächen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ berühren, berühren auch alle Flächen, deren Gleichungen von der Form sind

$$\chi = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi = 0,$$

wobei λ_1 und λ_2 zwei Zahlen von beliebigem Verhältniss bedeuten.

Wir schliessen daher: Auf einer zwei Flächen II. Kl. umschriebenen abwickelbaren Fläche giebt es unzählig viele Raumcurven IV. O. 1. Sp. Und dem entsprechend: Durch die Punkte einer Raumcurve IV. O. 1. Sp. gehen unzählig viele abwickelbare Flächen IV. Kl. 1. Sp.

7. Wenn die Fläche

$$1 \quad Au^2 + 2Buv + 2Cuw + \dots + 2Hv + 2Jw + K = 0$$

von acht gegebenen Ebenen T_1, T_2, \dots, T_8 berührt wird, so ist

$$2 \quad Au_1^2 + 2Bu_1v_1 + 2Cu_1w_1 + Dv_1^2 + 2Ev_1w_1 + Fw_1^2 + 2Gu_1 + 2Hv_1 + 2Jw_1 + K = 0,$$

$$3 \quad Au_2^2 + 2Bu_2v_2 + \dots + 2Jw_2 + K = 0,$$

$$4 \quad Au_3^2 + 2Bu_3v_3 + \dots + 2Jw_3 + K = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$9 \quad Au_8^2 + 2Bu_8v_8 + \dots + 2Jw_8 + K = 0.$$

stimmte Zahlen H, J, K auf; für jeden
3. eine Fläche II. O. dar, die von den

$0, \omega = 0$ werden, wie man sieht, von
erfüllt. Ausser diesen sieben Ebenen
8) noch eine durch den Verein der
achte Tangentenebene gemein; wir
die von sieben gegebenen Ebenen
achte gemeinsame Tangentenebene,
enen eindeutig bestimmt ist.

acht Ebenen ist eine abwickelbare
stimmt, wenn dieselben nicht ein
enen dreier Flächen II. O. bilden
m Kegel II. O. eingeschrieben sind, so
welchem die Z -Achse durch die Spitze
die Gleichung der Kegelspitze, so müssen
ungen der beiden Flächen

$$\dots + 2Jw + K = 0,$$

$$\dots + 2J_1w + K_1 = 0$$

nen, geometrisch gleich bedeutend sein,
der Spitze $w = w_0$ aus umschriebenen
Zahl m gilt also die Identität

$$Ew_0 + Fw_0^2 + 2Gu + 2Hv + 2Jw_0 + K \\ D_1v^2 + 2E_1vw_0 + F_1w_0^2 + 2G_1u \\ J_1w_0 + K_1).$$

hungen

$$nB_1, \quad D = mD_1,$$

$$Ew_0 + H = mE_1w_0 + H_1,$$

$$w_0^2 + m \cdot 2J_1w_0 + mK_1.$$

$$H - mH_1 = -(E - mE_1)w_0,$$

$$w_0^2 - 2(J - mJ_1)w_0.$$

$m\varphi_1$, so erhält man in Rücksicht auf

$$_1)vw + (F - mF_1)w^2 - 2(C - mC_1)w_0u$$

$$- (F - mF_1)w_0^2 - 2(J - mJ_1)w_0$$

$$= (w - w_0)[2(C - mC_1)u + 2(E - mE_1)v + (F - mF_1)w + (F - mF_1)w_0 + (J - mJ_1)].$$

Hieraus ist ersichtlich, dass für alle Ebenen, welche zugleich die Fläche φ
und φ_1 berühren, entweder $w = w_0$ oder

$$P = 2(C - mC_1)u + 2(E - mE_1)v + (F - mF_1)w + (F - mF_1)w_0 + J - mJ_1 = 0$$

ist; und dass, umgekehrt, alle Ebenen, die den Gleichungen $P = 0$ und $\varphi = 0$
genügen, auch die Gleichung $\varphi_1 = 0$ erfüllen. Dies lehrt, dass die beiden
Flächen φ und φ_1 noch einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, dessen Spitze
die Gleichung $P = 0$ hat. Wenn also zwei Flächen II. Kl. $\varphi = 0$ und
 $\varphi = 0$ einem Kegel II. O. eingeschrieben sind, so sind sie noch einem
zweiten Kegel II. O. eingeschrieben; es giebt dann eine bestimmte
Zahl m , für welche die Differenz $\varphi - m\varphi_1$ in das Produkt zweier
linearen Functionen zerfällt, die einzeln gleich Null gesetzt die
Gleichungen der beiden Kegelspitzen ergeben.

$$\frac{F}{B} = \beta f_0, \quad F - \frac{CE}{B} = \gamma f_0.$$

g von P_0 erfüllt, sobald $\alpha = \beta = \gamma$,

Ist f keine Kugel, so kann den Gleichungen 3. genügt werden, wenn $f = 0$ ist; in diesem Falle geht der Tangentenkegel in die Berührungsebene der Fläche f im Punkte P_0 über, und diese kann man in der That als eine Rotationsfläche ansehen. Abgesehen hiervon kann den Gleichungen 3. nur dadurch genügt werden, dass zwei von den drei Coefficienten B, C, E verschwinden und dritte von Null verschieden ist. Nehmen wir zunächst

$$B = C = 0, \quad E \geq 0, \quad \text{also } x_0 = 0.$$

Nach §7 No. 13 ist alsdann 1. eine Rotationsfläche, wenn $(D-A):E = E:(F-A)$; t man $x_0 = 0$ in 2. ein, so erhält man aus dieser Proportion

$$[(\beta - \alpha)f_0 - \beta^2 y_0^2][(\gamma - \alpha)f_0 - \gamma^2 z_0^2] - \beta^2 \gamma^2 y_0^2 z_0^2 = 0.$$

Rechnet man die linke Seite aus und unterdrückt den Faktor f_0 , so ergibt

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} y_0^2 + \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \gamma} z_0^2 - 1 = 0.$$

Die Annahmen $B = E = 0$, bez. $C = E = 0$ führen in derselben Weise die Spitzen der umschriebenen Rotationskegel auf die Gleichungen

$$y_0 = 0, \quad \frac{\beta\alpha}{\beta - \alpha} x_0^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta - \gamma} z_0^2 - 1 = 0,$$

$$z_0 = 0, \quad \frac{\gamma\alpha}{\gamma - \alpha} x_0^2 + \frac{\gamma\beta}{\gamma - \beta} y_0^2 - 1 = 0.$$

Dies sind die Gleichungen dreier in den Coordinatenebenen liegenden der Fläche $f = 0$ zugeordneten Kegelschnitte; man bezeichnet sie als die Focalkegelschnitte der Fläche f .

13. Wir stellen nun die Gleichungen der Focalkegelschnitte des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide der Reihe nach auf und entscheiden über die Realität der von ihren Punkten aus der Fläche umschriebenen Rotationskegel.

A. Für das Ellipsoid ist $\alpha = 1:a^2$, $\beta = 1:b^2$, $\gamma = 1:c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind daher

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Setzen wir $a > b > c$ voraus, so sind dies der Reihe nach die Gleichungen einer imaginären Ellipse, einer realen Hyperbel und einer realen Ellipse. Die letztere liegt ganz im Innern des Ellipsoids, daher können von ihren Punkten aus reale Kegel nicht um die Fläche gelegt werden. Der Ort der Spitzen der einem dreiachsigen Ellipsoide umschriebenen realen Rotationskegels ist der Theil der in der Ebene der grössten und kleinsten Achse enthaltenen Focalhyperbel, der ausserhalb des Ellipsoids liegt. Die Schnittpunkte dieser Hyperbel und des Ellipsoids sind die Kreispunkte des letzteren.

B. Für das einschalige Hyperboloid ist $\alpha = 1:a^2$, $\beta = 1:b^2$, $\gamma = -1:c^2$. Die Gleichungen der Focalkegelschnitte sind daher

in zweiter Klasse umschrieben ist

auf $x_0 = y_0 = 0$, also
muss $A = D = F$ sein;

umgebung ist nur einem Punkt der Z -Achse erfüllbar.

Die Parabeln 2. und 3. werden als die Focalparabeln des P $f = 0$ bezeichnet.

16. Für ein elliptisches Paraboloid ist $\alpha = 1 : a$, $\beta = 1 : b$;
sind die Focalparabeln

$$y^2 = 2(b - a)(z - \frac{1}{2}a), \quad x^2 = 2(a - b)(z - \frac{1}{2}b).$$

Wie man sieht, geht jede dieser Parabeln durch den Brennpunkt F der Ebene der andern liegenden Hauptschnitts des Paraboloids; der Scheitel dieser Parabeln ist der Brennpunkt der anderen. Ist $a > b$, so liegt die Parabel ganz auf der concaven Seite des Paraboloids, während die andere Parabel das Paraboloid in zwei realen Punkten schneidet. Dies ergibt: Der Ort der Scheitel der einem elliptischen Paraboloid umschriebenen realen Rotationskegel ist der auf der convexen Seite liegende Theil der Focalparabel, die auf der Ebene des Hauptschnitts liegt, der den kleinsten Abstand vom Brennpunkt hat.

Für ein hyperbolisches Paraboloid ist $\alpha = 1 : a$, $\beta = -1 : b$;
sind die Focalparabeln

$$y^2 = -2(a + b)(z - \frac{1}{2}a), \quad x^2 = 2(a + b)(z + \frac{1}{2}b).$$

Jede der beiden Parabeln geht durch den Brennpunkt der andern Ebene; die Scheitel sind die Brennpunkte des in der Ebene der andern Focalparabel liegenden Hauptschnitts; keine der beiden Curven schneidet das Paraboloid. Wir erhalten daher: Es giebt zwei Systeme Rotationskegel, die einem hyperbolischen Paraboloid umschrieben sind; die Spitzen der einen Systems liegen auf der einen, die des andern auf der andern Focalparabel.

17. Eine Parabel kann man als ein elliptisches Paraboloid annehmen, welches $b = 0$ ist. Die Rotationskegel, die eine gegebene Parabel umschreiben, enthalten, haben daher ihre Spitzen auf einer congruenten Parabel, deren Ebene normal zur Ebene der gegebenen Parabel ist und deren Scheitel den Brennpunkt derselben und den Scheitel der gegebenen Parabel zum Brennpunkte hat.

18. Für die Lage der Achsen der einer Fläche II. O. umschriebenen Rotationskegel ergibt sich noch ein bemerkenswerther Satz.

Bei centralen Rotationsflächen besteht unter der Annahme $C = 0$ die Stellungswinkel der Symmetrieebenen, welche durch die Rotationsachsen gehen, die Gleichung (§ 7 No. 13)

$$1. \quad (A - F)\cos\alpha + B\cos\beta = 0;$$

ferner ist

$$2. \quad (A - F) : B = B : (D - F).$$

Nun ist für einen der Fläche $f = 0$ umgeschriebenen Rotationskegel, der gemachten Voraussetzung, und wenn f central ist (No. 12, 2)

$$A - F = (\alpha - \gamma)f_0 - \alpha^2 x_0^2, \quad B = -\alpha\beta x_0 y_0, \quad z_0 = 0$$

Aus der Proportion 2. und der von P_0 erfüllten Gleichung der XY -Ebene liegenden Focalkegelschnitts No. 12, 7 folgt

$$(\alpha - \gamma)f_0 - \alpha^2 x_0^2 = \frac{\beta^2 (\alpha - \gamma)}{\beta - \gamma} \cdot y_0^2;$$

daher erhält man aus 1.

in derselben das Tetraëder abschneidet;
seitigen Ecken gebildete an den Kanten
l.

der Ebenen des Tetraëders, so kann er

zunächst im Innern des Tetraëders oder an einer der an den Tetraëderecken
aussen anliegenden dreiseitigen Ecken liegen; in jedem Falle liegt dann einer der
fünf Punkte $ABCDE$ im Innern des von den vier andern bestimmten Tetraëders.
Denn nimmt man z. B. E im Innern der an A gelegenen Ecke an, so liegt A
im Innern des Tetraëders $BCDE$. Befindet sich hingegen E in einem der vier
dreieckigen, an den Tetraëderflächen oder in einem der sechs zweieckigen,
an den Tetraëderkanten aussen anliegenden Gebiete, so liegt immer einer der
fünf Punkte in dem an einem Dreiecke des von den vier andern bestimmten
Tetraëders aussen anliegenden Raumtheile; denn ist E z. B. in dem an DC
liegenden keilförmigen Gebiete, so liegt offenbar D in Bezug auf das Tetraëder
 $ABCE$ in dem an EAB aussen anliegenden Gebiete.

Wir beweisen nun folgenden Satz: Für je fünf Punkte A, B, C, D, E
des Raumes ist

$$1. \quad EABC - EBCD + ECDA - EDAB = DABC,$$

oder, in anderer Anordnung

$$2. \quad ABCD + BCDE + CDEA + DEAB + EABC = 0.$$

Nimmt man zunächst an, einer von den fünf Punkten liege im Innern des
Tetraëders der vier andern, und bezeichnet diesen mit E , die andern mit $A, B,$
 C, D , so ist ersichtlich, dass die vier Dreiecke

$$ABC, \quad BAD, \quad CBD, \quad CDA$$

von E aus gesehen in gleicher Drehrichtung erscheinen, und zwar in derselben,
wie ABC von D aus. Daher haben die fünf Tetraëder

$$EABC, \quad EBAD, \quad ECBD, \quad ECDA, \quad DABC$$

gleiche Vorzeichen.

Nun ist, abgesehen noch vom Vorzeichen, die Summe der vier Tetraëder,
welche die Seiten eines Tetraëders $ABCD$ zu Basen und einen Punkt im Innern
desselben zur gemeinsamen Spitze haben, gleich dem Tetraëder $ABCD$; man
hat daher die nun auch in Bezug auf die Vorzeichen genaue Gleichung

$$3. \quad EABC + EBAD + ECBD + ECDA = DABC.$$

Da nun $EBAD$ und $EDAB$, sowie $ECBD$ und
 $EBCD$ Permutationen ungleicher Klasse sind, so ist

$$EBAD = -EDAB, \quad ECBD = -EBCD;$$

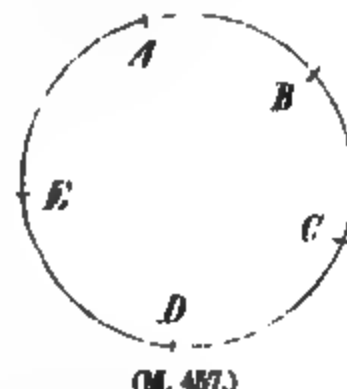
indem man dies in 3. einführt, erhält man 1. und durch
geeignete Permutationen hieraus 2.

Um die richtige Aufeinanderfolge der Buchstaben in
2. sicher und leicht zu treffen, kann man die fünf Buch-
staben in der Reihenfolge $ABCDE$ hinter einander an die
Peripherie eines Kreises schreiben.

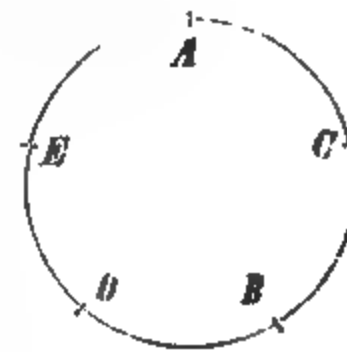
Man hat nun, von jedem der fünf Punkte anfangend,
und immer in derselben Richtung fortschreitend, je vier auf
einander folgende Punkte aufzuschreiben.

Vertauscht man irgend zwei benachbarte der fünf
Buchstaben, z. B. B und C , so erhält man die beistehende
Hilfsfigur, und daher für die Summe 2. die Tetraëder

$$ACBD, \quad CBDE, \quad BDEA, \quad DEAC, \quad EACB.$$



(M. 457.)



(M. 458.)

man zunächst den Punkt mit E , der in Bezug auf das Tetraëder $ABCD$ in dem an einer Seite anliegenden dreieckigen Gebiete BCD diese Seite, so dass also E und A auf verschiedener Seite von BCD liegen, und EA die Ebene BCD in einem im Innern des Dreiecks BCD liegenden Punkte schneidet, so werden die Dreiecke ABC , BCD ,



. 459.)

DBA , von E aus unter derselben Drehung gesehen, und zwar unter der entgegengesetzten Drehrichtung, wie BCD vom Punkte A . Daher haben die Tetraeder $EABC$, $EACB$, $EACD$, $EBCD$, $EBCA$, $EACB$, $ECDA$, $EDBA$, $ACBD$ dasselbe Zeichen.

Nun giebt rücksichtlich der ab
Werthe die Summe der Tetraeder, welche
in an A liegenden Seiten des Tetraëd
Basen und E zur gemeinsamen Spitze
vermindert um das Tetraëder, welches
Spitze und die A gegenüberliegende Se

Tetraëder der vier Punkte A, B, C, D . Daher gilt auch
zeichnen die Gleichung

$$BC + EDBA + ECDA - EBCD = ACBD.$$

$BD = -ABCD$, $EBCD = -BCDE$, $ECDA = C$
 $4B$, so folgt aus 4. die Gleichung 2.

liesst man wie im vorigen Falle, dass die Gleichung 2. ff
fünf Punkte A, B, C, D, E gilt.

e Gleichung 2. für jede Lage der fünf Punkte und für jeden Punkt P gültig.

Die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene, so ist
und man erhält daher aus 1.

$$EABC - EBC\dot{D} + ECDA - EDAB = 0.$$

nogene Coordinaten des Punktes P verwenden wir die Abstände des Punktes von den Ebenen eines Tetraeders. Der Abstand des Punktes P von der A_i gegenüberliegenden wird mit x_i bezeichnet, und x_i wird positiv oder negativ, je nachdem P und A_i auf derselben Seite der A_i gegenüberliegenden sich befinden oder nicht. Für einen Punkt im Innern des Tetraeders sind daher alle vier Coordinaten positiv. Für einen Punkt in einem der auf der Oberfläche aussen anliegenden Gebiete ist die eine Coordinaten negativ, die andern sind positiv. Für einen Punkt in einem der auf den Kanten aussen anliegenden Gebiete sind die Coordinaten negativ, die

altenden Tetraëderebenen sind, die andern
r Gegenecke einer Tetraëderecke gelegenen
negativ, die auf den Seiten dieser Ecke normal
tiv. Für keinen Punkt des Raumes sind alle

es Achsentetraëders $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit h_1, h_2, h_3, h_4 auf die gegenüberliegende Fläche gefällt

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ : & h_1 & 0 & 0 & 0, \\ & 0 & h_2 & 0 & 0, \\ : & 0 & 0 & h_3 & 0, \\ : & 0 & 0 & 0 & h_4. \end{array}$$

erkante sind zwei Coordinaten Null; z. B. für jeden auf $A_1 A_2$ gelegenen Punkt ist $x_3 = x_4 = 0$. Für jeden Punkt einer Tetraëderfläche ist eine Coordinate gleich Null; z. B. für die auf $A_1 A_2 A_3$ liegenden Punkte ist $x_4 = 0$.

3. Für jede Lage des Punktes P gilt die Gleichung (No. 1, 1)

$$PA_2 A_3 A_4 - PA_3 A_4 A_1 + PA_4 A_1 A_2 - PA_1 A_2 A_3 = A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Hieraus folgt

$$1. \quad \frac{PA_2 A_3 A_4}{A_1 A_2 A_3 A_4} + \frac{PA_3 A_4 A_1}{A_2 A_3 A_4 A_1} + \frac{PA_4 A_1 A_2}{A_3 A_4 A_1 A_2} + \frac{PA_1 A_2 A_3}{A_4 A_1 A_2 A_3} = 1.$$

Das Verhältniss der Tetraëder $PA_k A_l A_m : A_i A_k A_l A_m$ ist numerisch gleich dem Verhältniss der von P und A_i auf die Ebene $A_i A_k A_l$ gefällten Normalen, also dem absoluten Werthe nach gleich dem Verhältnisse $x_i : h_i$.

Liegen nun P und A_i auf derselben Seite von $A_k A_l A_m$, so ist sowohl $PA_k A_l A_m : A_i A_k A_l A_m$ als auch $x_i : h_i$ positiv; und liegen P und A_i auf verschiedenen Seiten von $A_k A_l A_m$, so sind beide Verhältnisse negativ. Es gilt also auch rücksichtlich der Vorzeichen die Gleichung

$$2. \quad PA_k A_l A_m : A_i A_k A_l A_m = x_i : h_i.$$

Hiernach folgt aus 1.

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Die vier homogenen Coordinaten eines Punktes genügen also der Gleichung

$$3. \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Umgekehrt schliesst man leicht: Wenn vier Strecken dieser Gleichung genügen so sind sie die homogenen Coordinaten eines durch sie eindeutig bestimmten Punktes.

4. Als homogene Coordinaten einer Ebene T verwenden wir die Quotienten aus den Abständen der Ebene T von den Eckpunkten des Achsendreiecks und dem Abstände von einem beliebig gewählten festen Punkte C . Sind die Abstände der Ebene T von A_i und von C bez. v_i und ρ , so sind die Coordinaten von T die Zahlen

$$u_1 = \frac{v_1}{\rho}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\rho}, \quad u_3 = \frac{v_3}{\rho}, \quad u_4 = \frac{v_4}{\rho}.$$

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 die Spuren von T auf den Geraden $A_1 C, A_2 C, A_3 C, A_4 C$, so sind daher die Coordinaten von T den Verhältnissen gleich

$$\frac{A_1}{S_1} + CA_2A_4A_1 \cdot \frac{CA_3}{CS_2} - CA_4A_1A_2 \cdot \frac{CA_3}{CS_2} = 0.$$

$$= 1 - \frac{A_i S_i}{CS_i} = 1 - u_i, \text{ daher erhält man}$$

$$CA_1A_2A_3(1-u_4) - CA_2A_3A_4(1-u_1) + CA_3A_4A_1(1-u_2) - CA_4A_1A_2(1-u_3) = 0.$$

Löst man die Klammern auf und berücksichtigt, dass nach No. 1, 1

$$CA_1A_2A_3 - CA_2A_3A_4 + CA_3A_4A_1 - CA_4A_1A_2 = A_4A_1A_2A_3,$$

so erhält man zunächst

$$CA_1A_2A_3 \cdot u_4 - CA_2A_3A_4 \cdot u_1 + CA_3A_4A_1 \cdot u_2 - CA_4A_1A_2 \cdot u_3 = A_1A_2A_3A_4.$$

Da nun (No. 3, 2) $CA_kA_lA_m : A_lA_kA_lA_m = p_i : h_i$, so folgt schliesslich

$$\frac{p_1}{h_1} u_1 + \frac{p_2}{h_2} u_2 + \frac{p_3}{h_3} u_3 + \frac{p_4}{h_4} u_4 = 1.$$

Wir haben daher den Satz: Die vier homogenen Coordinaten jeder Ebene T erfüllen die Gleichung

$$3. \quad \frac{p_1}{h_1} u_1 + \frac{p_2}{h_2} u_2 + \frac{p_3}{h_3} u_3 + \frac{p_4}{h_4} u_4 = 1.$$

Umgekehrt schliesst man: Wenn vier Zahlen u_1, u_2, u_3, u_4 dieser Gleichung genügen, so sind sie die Coordinaten einer eindeutig bestimmten Ebene.

7. Sind B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte einer Ebene T mit den Kanten A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 des Coordinatentetraeders, und theilt ein Punkt P der Ebene T das Dreieck $B_1B_2B_3$ im Verhältnisse $n_1:n_2:n_3$, sind ferner $\xi_{1m}, \xi_{2m}, \xi_{3m}, \xi_{4m}$ die Coordinaten von B_m , so sind die Coordinaten von P (§ 2, No. 28)

$$1. \quad x_k = \frac{n_1 \xi_{k1} + n_2 \xi_{k2} + n_3 \xi_{k3}}{n_1 + n_2 + n_3};$$

$$k = 1, 2, 3, 4.$$

Nun gilt für die Coordinaten von B_m , wenn k, l, m eine Permutation von 1, 2, 3 ist

$$2. \quad \xi_{km} = \xi_{lm} = 0, \quad \xi_{4m} : h_4 = A_mB_m : A_mA_4, \quad \xi_{mm} : h_m = A_4B_m : A_4A_m.$$

Da nun $B_mA_m : B_mA_4 = v_m : v_4 = u_m : u_4$, so ist

$$A_mB_m : A_mA_4 = A_mB_m : (A_mB_m + B_mA_4) = 1 : \left(1 - \frac{u_4}{u_m}\right),$$

$$A_4B_m : A_4A_m = A_4B_m : (A_4B_m + B_mA_m) = 1 : \left(1 - \frac{u_m}{u_4}\right).$$

Daher gewinnt man aus 2.

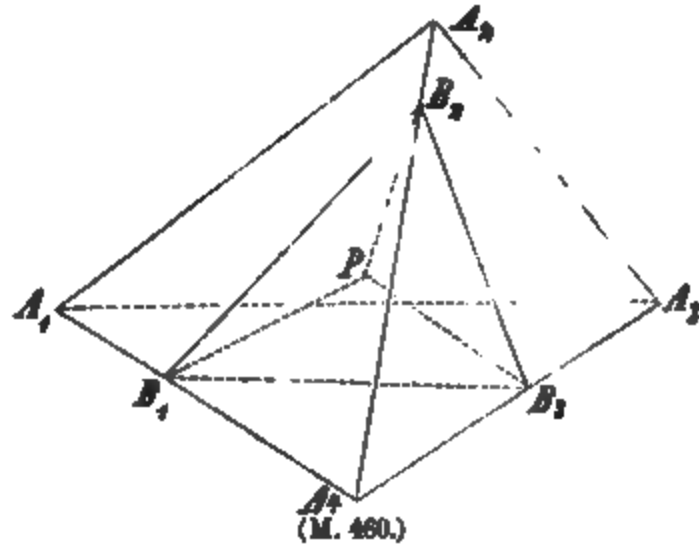
$$\xi_{4m} = \frac{u_m}{u_m - u_4} \cdot h_4, \quad \xi_{mm} = \frac{u_4}{u_4 - u_m} \cdot h_m.$$

Folglich sind die Coordinaten der Punkte B_1, B_2, B_3

$$\xi_{11} = \frac{u_4}{u_4 - u_1} h_1, \quad \xi_{21} = 0, \quad \xi_{31} = 0, \quad \xi_{41} = \frac{u_1}{u_1 - u_4} h_4;$$

$$3. \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{22} = \frac{u_4}{u_4 - u_2} h_2, \quad \xi_{32} = 0, \quad \xi_{42} = \frac{u_2}{u_2 - u_4} h_4;$$

$$\xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0, \quad \xi_{33} = \frac{u_4}{u_4 - u_3} h_3, \quad \xi_{43} = \frac{u_3}{u_3 - u_4} h_4.$$



Führt man diese Werthe in
 Coordinaten von P , wenn man π

$$4. \quad x_1 = \frac{\pi_1}{\pi} \cdot \frac{u_4}{u_4 - u_1} \cdot h_1, \quad x_2$$

$$5. \quad -x_4 = \frac{\pi_1}{\pi} \cdot \frac{u_1}{u_4 - u_1} \cdot h_1$$

Aus 4. folgt

$$6. \quad \frac{\pi_1}{\pi} \cdot \frac{1}{u_4 - u_1} = \frac{x_1}{h_1 u_4}, \quad \frac{\pi_2}{\pi}$$

setzt man diese Werthe in 5. ein,

$$7. \quad -\frac{x_4}{h_4} =$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2$$

Wenn also der Punkt P
 Coordinaten des Punktes P
 von Coordinaten lineare Gle

$$8. \quad \frac{1}{h_1} u_1 x_1 + \frac{1}{h_2} u_2 x_2$$

Umgekehrt: Wenn die Coor
 so ist auch 7. erfüllt; man kann
 Gleichungen 6. ableiten, und erhä
 4. und 5., welche mit den Gleich
 dinaten der Punkte B_1, B_2, B_3
 die Coordinaten eines Punl
 genügen, so liegen der Pun
 liegt auf der Ebene).

8. Haben die Coordinaten
 die Gleichung

$$\frac{1}{h_1} a_1 x_1 + \frac{1}{h_2} a_2 x_2$$

die Bedingungsgleichung für die
 liegen, ist also die Gleichung
 hingegen die Coordinaten des Pu

$$\frac{1}{h_1} a_1 u_1 + \frac{1}{h_2} a_2 u_2$$

die Bedingungsgleichung für die
 ist also die Gleichung dieses

Jede homogene lineare
 Gleichung einer durch die
 bestimmten Ebene. Sind $a_1,$

$a_1 x_1 + a_2 x_2$
 die Gleichung der Ebene, deren

$u_1 : u_2 : u_3 : u_4$
 also die Werthe haben

$$u_1 = k a_1 h_1, \quad u_2 = k$$

wobei $k = 1 :$

Jede homogene lineare

Verhältnisse der Coefficienten eindeutig

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ beliebige Zahlen, so ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

sen Coordinaten sich aus der Proportion ergeben

$$u_1 = h_1 \alpha_1 : h_2 \alpha_2 : h_3 \alpha_3 : h_4 \alpha_4 ;$$

$$h_1 \alpha_1 h_2, \quad x_2 = h_2 \alpha_2 h_3, \quad x_4 = h_4 \alpha_4 h_1,$$

$$= 1 : (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4).$$

Gleichung

$$\frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 0$$

ist die Gleichung einer Ebene, deren Coordinaten nach No. 8 die Werthe haben $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$. Diese Ebene theilt die Strecken $A_1 C, A_2 C, A_3 C, A_4 C$ aussen im Verhältniss 1., ist also unendlich fern.

Wenn in der homogenen linearen Gleichung in Punktcoordinaten

$$2. \quad P = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Summe der Coefficienten verschwindet

$$3. \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

so wird der Gleichung durch die Werthe genügt

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1,$$

der Punkt P liegt daher auf der unendlich fernen Ebene und ist somit selbst unendlich fern.

10. Die Gleichung der durch die Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmten Ebene erhält man durch Elimination der Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ aus den vier Gleichungen

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

$$\alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \alpha_3 x_{31} + \alpha_4 x_{41} = 0,$$

$$\alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \alpha_3 x_{32} + \alpha_4 x_{42} = 0,$$

$$\alpha_1 x_{13} + \alpha_2 x_{23} + \alpha_3 x_{33} + \alpha_4 x_{43} = 0,$$

wenn mit $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}$ die Coordinaten des Punktes P_i bezeichnet werden. Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich die gesuchte Gleichung in Determinantenform

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung des den Ebenen T_1, T_2, T_3 gemeinsamen Punktes P ergibt sich durch Elimination der Coefficienten aus den vier Gleichungen

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0,$$

$$\alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \alpha_3 u_{31} + \alpha_4 u_{41} = 0,$$

$$\alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{32} + \alpha_4 u_{42} = 0,$$

$$\alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} + \alpha_3 u_{33} + \alpha_4 u_{43} = 0.$$

Man erhält

$$P = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} \end{vmatrix} = 0.$$

11. Die Coordinaten des Schnittpunkts der Ebenen $T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 = 0$ sind die Lösungen des Systems

tel der dem Eckpunkte A_i gegenüberliegenden Tetraederebene in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Nullpunkt im Innern des Tetraeders liegt, α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene T und d ihr Abstand vom Nullpunkte, also die Gleichung von T in Normalform

$$T = \cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z - d = 0;$$

ferner seien x_i, y_i, z_i die Coordinaten von A_i ; alsdann ist

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot x_1 + \cos \beta \cdot y_1 + \cos \gamma \cdot z_1 - d &= -v_1, \\ \cos \alpha \cdot x_2 + \cos \beta \cdot y_2 + \cos \gamma \cdot z_2 - d &= -v_2, \\ \cos \alpha \cdot x_3 + \cos \beta \cdot y_3 + \cos \gamma \cdot z_3 - d &= -v_3, \\ \cos \alpha \cdot x_4 + \cos \beta \cdot y_4 + \cos \gamma \cdot z_4 - d &= -v_4. \end{aligned}$$

Löst man dieses System linearer Gleichungen zunächst in Bezug auf $\cos \alpha$ auf, so erhält man

$$2. \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cos \alpha = - \begin{vmatrix} v_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ v_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ v_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ v_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_l & z_l & 1 \end{vmatrix} = 2 A_i A_k A_l \cos \alpha_m,$$

wenn i, k, l, m eine Permutation von 1, 2, 3, 4 ist; ferner ist der Faktor von $\cos \alpha$ dem sechsfachen Tetraedervolumen entgegengesetzt gleich (§ 3, 7). Daher hat man aus 2.

$$-3 \cdot A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot \cos \alpha = A_2 A_3 A_4 \cdot \cos \alpha_1 \cdot v_1 + A_4 A_3 A_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot v_2 + A_1 A_2 A_4 \cdot \cos \alpha_3 \cdot v_3 + A_1 A_3 A_2 \cdot \cos \alpha_4 \cdot v_4.$$

Dividirt man durch $3 \cdot A_1 A_2 A_3 A_4$, so erhält man

$$3. \quad \cos \alpha = \frac{v_1}{h_1} \cos \alpha_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos \alpha_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos \alpha_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos \alpha_4.$$

Ebenso erhält man die beiden entsprechenden Gleichungen

$$4. \quad \cos \beta = \frac{v_1}{h_1} \cos \beta_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos \beta_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos \beta_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos \beta_4,$$

$$5. \quad \cos \gamma = \frac{v_1}{h_1} \cos \gamma_1 + \frac{v_2}{h_2} \cos \gamma_2 + \frac{v_3}{h_3} \cos \gamma_3 + \frac{v_4}{h_4} \cos \gamma_4.$$

Quadriert man diese drei Gleichungen und addirt sie dann, und berücksichtigt, dass, wenn man mit ϵ_{ik} den Winkel der den Ecken A_i, A_k gegenüberliegenden Tetraederflächen bezeichnet, die Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1, \\ \cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i &= 1, \\ \cos \alpha_i \cos \alpha_k + \cos \beta_i \cos \beta_k + \cos \gamma_i \cos \gamma_k &= -\cos \epsilon_{ik}, \end{aligned}$$

so erhält man schliesslich die gesuchte Gleichung:

$$6. \quad \left(\frac{v_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{h_3}\right)^2 + \left(\frac{v_4}{h_4}\right)^2 - 2 \frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_2}{h_2} \cos \epsilon_{12} - 2 \frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_3}{h_3} \cos \epsilon_{13} - 2 \frac{v_1}{h_1} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cos \epsilon_{14} - 2 \frac{v_2}{h_2} \cdot \frac{v_3}{h_3} \cos \epsilon_{23} - 2 \frac{v_2}{h_2} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cos \epsilon_{24} - 2 \frac{v_3}{h_3} \cdot \frac{v_4}{h_4} \cos \epsilon_{34} = 1.$$

14. Um nun in der Gleichung (No. 12, 4)

$$p = k \cdot T, \quad k = \rho : \tau,$$

den Faktor k als Function der Coefficienten von T und der Dimensionen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ zu bestimmen, setzen wir für den Punkt P nach einander die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 . Dadurch erhalten wir

r^2 und vergleicht das Resultat mit
nd des Punktes C von der Ebene

T ist. Daher ist

$$2. \quad u = \frac{p}{r} = \frac{1}{\sigma} P$$

die Coordinate von T in Bezug auf P , d. i. der Quotient aus den Abständen der Ebene T von P und von C .

17. Der soeben gefundene Werth für u führt auf die Transformationsformeln für Ebenencoordinaten.

Sind B_1, B_2, B_3, B_4 die Eckpunkte des neuen Coordinatentetraeders und ist die Gleichung von B_i

$$a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + a_{3i}u_3 + a_{4i}u_4 = 0,$$

$$\text{und} \quad a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} + a_{4i} = \sigma_i;$$

sind ferner U_1, U_2, U_3, U_4 die Coordinaten einer Ebene T in Bezug auf das Tetraëder B_1, B_2, B_3, B_4 , so hat man die Gleichungen

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} (a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + a_{41}u_4),$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma_2} (a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + a_{42}u_4),$$

$$1. \quad U_3 = \frac{1}{\sigma_3} (a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 + a_{43}u_4),$$

$$U_4 = \frac{1}{\sigma_4} (a_{14}u_1 + a_{24}u_2 + a_{34}u_3 + a_{44}u_4).$$

Die Auflösungen dieses Systems ergeben homogene lineare Functionen für die u_i ; wir sehen daher: Der Uebergang von einem homogenen Coordinatensysteme zu einem andern erfolgt für Ebenencoordinaten ebenfalls durch homogene lineare Substitutionen.

18. Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{vmatrix}$$

kann als der Werth betrachtet werden, den die Gleichung der durch je drei der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bestimmten Ebene (No. 10) annimmt, wenn man in derselben x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Coordinaten des vierten Punktes ersetzt. Werden daher die Höhen des Tetraëders P_1, P_2, P_3, P_4 mit H_1, H_2, H_3, H_4 , und mit k_i der Faktor k für die lineare Function

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} & x_{4l} \\ x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} & x_{4m} \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & x_{4n} \end{vmatrix} \quad (i, l, m, n \text{ eine Permutation gerader Klasse von } 1, 2, 3, 4)$$

bezeichnet, so hat man

$$1. \quad \Delta = k_1 H_1 = k_2 H_2 = k_3 H_3 = k_4 H_4.$$

Andererseits ist, wenn mit V das Tetraëdervolumen $P_1 P_2 P_3 P_4$ und mit G_1, G_2, G_3, G_4 die Flächenzahlen der Seiten dieses Tetraeders bezeichnet werden

$$2. \quad 3V = G_1 H_1 = G_2 H_2 = G_3 H_3 = G_4 H_4.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$k_1 : k_2 : k_3 : k_4 : \Delta = G_1 : G_2 : G_3 : G_4 : 3V.$$

Man kann daher setzen $G_i = \lambda k_i, \quad 3V = \lambda \Delta.$

$$= A_{12} = A_{22} = A_{34} = A_{14} = 0,$$

reducirt sich auf

$$x_3 + 2A_{24}x_2x_4 = 0.$$

noch eine verfügbare Constante, nämlich das Verhältniss, dass eine Fläche II. O. durch ein auf ihr liegendes Viereck eindeutig bestimmt ist.

Die homogene quadratische Function in u

$$B_{11}u_1^2 + 2B_{12}u_1u_2 + B_{22}u_2^2 + 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{23}u_2u_3 + B_{33}u_3^2 + 2B_{34}u_3u_4 + B_{44}u_4^2.$$

der A_i gegenüberliegenden Tetraëderfläche A_i durch die Coordinaten $u_k = u_l = u_m = 0$ der Ebene einer dem Coordinatentetraëder $A_1A_2A_3A_4$ angehörigen Klasse ist demnach

$$u_1u_4 + 2B_{23}u_2u_3 + 2B_{34}u_3u_4 + 2B_{14}u_1u_4 = 0.$$

Enthält die Fläche die Tetraëderkante A_iA_k , so wird der Gleichung $\varphi = 0$ durch $u_i = u_k = 0$ unabhängig von u_l und u_m genügt, also ist

$$B_{ll} = B_{lm} = B_{mm} = 0.$$

Ist das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ auf der Fläche gelegen, so ist daher

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{44} = B_{12} = B_{23} = B_{34} = B_{14} = 0,$$

und die Gleichung der Fläche reducirt sich auf

$$\varphi = 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{24}u_2u_4 = 0.$$

Da diese Gleichung nur eine Constante enthält, nämlich das Verhältniss $B_{13} : B_{24}$, so folgt, dass eine Fläche II. O. durch ein auf ihr liegendes ebenes Viereck und durch eine Tangentenebene eindeutig bestimmt ist.

3. Zur Vorbereitung der nächsten Untersuchungen schalten wir folgende Bemerkung ein: Die Coordinaten x_k des Punktes P , der die Strecke P_1P_2 im Verhältniss $\lambda_2 : \lambda_1$ theilt, wobei $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sei, sind bekanntlich

$$x_1 = \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12}, \quad x_2 = \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22}, \quad x_3 = \lambda_1 x_{31} + \lambda_2 x_{32}, \quad x_4 = \lambda_1 x_{41} + \lambda_2 x_{42}.$$

Die Ebene T , deren Coordinaten u_k aus den Coordinaten u_{k1} und u_{k2} nach den Formeln abgeleitet werden

$$u_k = \lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

ist die Gleichung (§ 11, 8)

$$T = \sum \frac{1}{h_k} (\lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2}) x_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Hierfür kann man setzen

$$T = \lambda_1 \cdot \sum \frac{1}{h_k} u_{k1} x_k + \lambda_2 \cdot \sum \frac{1}{h_k} u_{k2} x_k = 0.$$

Setzt man nun

$$T_1 = \sum \frac{1}{h_k} u_{k1} x_k, \quad T_2 = \sum \frac{1}{h_k} u_{k2} x_k,$$

so dass also $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Ebenen T_1 und T_2 sind, so hat man

$$T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0.$$

Die Factoren k_1 und k_2 der Functionen T_1 und T_2 (§ 11) haben hier die Werthe r_1 und r_2 , wenn man hiermit die Abstände der Ebenen T_1 und T_2 von C bezeichnet; setzt man nun

$$T = \frac{\lambda_1}{r_1} (r_1 T_1) + \frac{\lambda_2}{r_2} (r_2 T_2) = 0,$$

die Fläche $\varphi = B_{11}u_1^2 + \dots = 0$ berührt,

$$+ \lambda_2 u_{12}) (\lambda_1 u_{21} + \lambda_2 u_{22}) + \dots = 0.$$

gibt sich hieraus

$$(\lambda_2 + \varphi_{21}' \cdot u_{32} + \varphi_{41}' \cdot u_{42}) + \lambda_2^2 \cdot \varphi_2 = 0.$$

, welche die Function φ für die Coordinaten; ferner sind $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3', \varphi_4'$ die abge-

$$u_2 + B_{13}u_3 + B_{14}u_4,$$

$$u_2 + B_{23}u_3 + B_{24}u_4,$$

$$u_3 + B_{33}u_3 + B_{34}u_4,$$

$$u_3 + B_{34}u_3 + B_{44}u_4.$$

itäten

$$1. \quad \varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4 = \varphi,$$

$$8. \quad \begin{aligned} &\varphi_{1i}' u_{1i} + \varphi_{2i}' u_{2i} + \varphi_{3i}' u_{3i} + \varphi_{4i}' u_{4i} \\ &= \varphi_{1k}' u_{1i} + \varphi_{2k}' u_{2i} + \varphi_{3k}' u_{3i} + \varphi_{4k}' u_{4i}, \end{aligned}$$

wobei ein zweiter Index i andeutet, dass die veränderlichen Coordinaten durch die der Ebene T_i ersetzt worden sind.

5. A. Liegt der Punkt P_1 auf der Fläche $f=0$, so ist $f_1=0$, und die Gleichung No. 4, 1 erhält somit die selbstverständliche Wurzel $\lambda_2=0$.

Soll auch der zweite Schnittpunkt der Geraden $P_1 P_2$ und der Fläche f mit P_1 zusammenfallen, soll also $P_1 P_2$ die Fläche in P_1 tangiren, so muss der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$ verschwinden. Unterdrücken wir die zweiten Indices bei den Coordinaten von P_2 , so erhalten wir daher die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f=0$ im Punkte P_1 desselben

$$1. \quad T = f_{1i}' \cdot x_1 + f_{2i}' \cdot x_2 + f_{3i}' \cdot x_3 + f_{4i}' \cdot x_4 = 0.$$

B. Wird die Fläche $\varphi=0$ von der Ebene T_1 berührt, so ist $\varphi_1=0$; die Gleichung No. 4, 4 hat alsdann eine Wurzel $\lambda_2=0$. Soll auch die zweite durch den Schnitt von $T_1 T_2$ gehende Tangentenebene der Fläche φ mit T_1 zusammenfallen, so muss die Gleichung noch eine Wurzel $\lambda_2=0$ haben, es muss also der Coefficient von $\lambda_1 \lambda_2$ verschwinden. Lässt man den Index 2 bei den Coordinaten der Ebene T_2 weg, so erhält man für den Tangentialpunkt der die Fläche φ berührenden Ebene T_1 die Gleichung

$$2. \quad P = \varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4 = 0.$$

6. A. Wenn es einen Punkt gibt, für dessen Coordinaten

$$1. \quad f_1' = f_2' = f_3' = f_4' = 0,$$

so ist für diesen Punkt zufolge No. 4, 3 auch $f=0$, der Punkt liegt also auf der Fläche. Für diesen Punkt verschwinden alle Coefficienten in der Gleichung der Tangentenebene (No. 5, 1), und die Gleichung No. 4, 1 hat unabhängig von der Lage des Punktes P_2 zwei Wurzeln $\lambda_2=0$; jede durch diesen Punkt gehende Gerade hat daher mit der Fläche zwei Punkte gemein. Der Punkt ist somit als Doppelpunkt der Fläche, die Fläche selbst als Kegelfläche II. O. gekennzeichnet.

Der Verein der Gleichungen 1. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$2. \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

An

t da

oordi

1 die

1 zu 1

2 2 g

= 9

2 der

Fü

λ_1^2 1

ide d

1. Hi

ichungen 3. wird durch das Verschwinden der Deter- |

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

= 0 hat die Fläche φ also eine Doppelpunkt dieser Bedingung eine Grenzfläche II. O der Doppellebene ergeben sich aus dem li

der Coordinaten u_k der Ebene, die eine Fläche den berührt, ergeben sich aus den Gleichunge

$$A_{12}x_{21} + A_{13}x_{31} + A_{14}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_1}{h_1},$$

$$A_{22}x_{21} + A_{23}x_{31} + A_{24}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_2}{h_2},$$

$$A_{32}x_{21} + A_{33}x_{31} + A_{34}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_3}{h_3},$$

$$A_{42}x_{21} + A_{43}x_{31} + A_{44}x_{41} = \mu \cdot \frac{u_4}{h_4}.$$

n die Gleichung

$$-x_{21}u_2 + \frac{1}{h_3}x_{31}u_3 + \frac{1}{h_4}x_{41}u_4 = 0,$$

1 Verein dieser fünf für $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ lin

$$\begin{vmatrix} 11 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \frac{u_1}{h_1} \\ 12 & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \frac{u_2}{h_2} \\ 13 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \frac{u_3}{h_3} \\ 14 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{1}{1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & \frac{u_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

üllen die Coordinaten der Ebenen T , welch thin ist $\varphi = 0$ die Gleichung der Fläc

des Punktes, in denen eine Fläche φ , ergeben sich aus den Gleichungen

$$B_{13}u_{31} + B_{14}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_1}{h_1},$$

$$B_{23}u_{31} + B_{24}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_2}{h_2},$$

$$B_{33}u_{31} + B_{34}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_3}{h_3},$$

$$B_{34}u_{31} + B_{44}u_{41} = \mu \cdot \frac{x_4}{h_4}.$$

$$B_{31}x_3 + \frac{1}{h_4}u_{41}x_4 = 0,$$

so ergibt sich für den Verein dieser in Bezug auf u_{11} , u_{21} , u_{31} , u_{41} linearen Gleichungen

$$f = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & \frac{x_1}{h_1} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & \frac{x_2}{h_2} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} & \frac{x_3}{h_3} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} & \frac{x_4}{h_4} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & \frac{x_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten.

8. A. Liegt P_1 nicht auf der Fläche $f=0$, so wird die Fläche $f=0$ von der Geraden P_1P_2 berührt, wenn die Gleichung No. 4, 1 zwei gleiche Wurzeln für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ ergibt. Die Bedingung hierfür ist

$$f_1 \cdot f_2 - (f_{11}' \cdot x_{12} + f_{21}' \cdot x_{22} + f_{31}' \cdot x_{32} + f_{41}' \cdot x_{42})^2 = 0.$$

Denkt man sich P_1 als gegeben und P_2 als veränderlich, und unterdrückt man demgemäss bei den Coordinaten des letzteren Punktes den Index 2, so erhält man als Gleichung des der Fläche f vom Punkte P_1 aus umschriebenen Kegels

$$1. \quad f_1 \cdot f - (f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4)^2 = 0.$$

Die Punkte, in welchen dieser Kegel die Fläche f berührt, erfüllen ausser der Gleichung 1. noch die Gleichung $f=0$, folglich erfüllen sie auch die Gleichung

$$2. \quad T = f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 = 0.$$

Dies ist daher die Gleichung der Ebene der Berührungspunkte; sie ist real, auch wenn der Kegel ausser der Spitze keinen realen Punkt hat.

B. Berührt T die Fläche $\varphi=0$ nicht, so wird die Fläche von der Geraden T_1T_2 berührt, wenn die Gleichung No. 4, 5 für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ gleiche Wurzeln ergibt, also wenn

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 - (\varphi_{11}' \cdot u_{12} + \varphi_{21}' \cdot u_{22} + \varphi_{31}' \cdot u_{32} + \varphi_{41}' \cdot u_{42})^2 = 0.$$

Denkt man sich T_1 gegeben und ersetzt T_2 durch T , so erhält man

$$3. \quad \varphi_1 \cdot \varphi - (\varphi_{11}' \cdot u_1 + \varphi_{21}' \cdot u_2 + \varphi_{31}' \cdot u_3 + \varphi_{41}' \cdot u_4)^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird von allen Ebenen T erfüllt, welche die Ebene T_1 in einer Tangente der Fläche φ schneiden; sie stellt daher die der Fläche φ ein-

Pol einer Ebene T in Bezug auf eine (der imaginären) Kegels, welcher die T berührt.

: Ist P der Pol einer Ebene T in Bezug auf T die Polarebene von P .

direkten algebraischen Beweis. Hierfür machen wir zunächst auf einige bei diesem Beweise zu verwendende Identitäten aufmerksam.

Mit a_{ik} mag das Produkt der Determinante, die aus

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{vmatrix}$$

durch Unterdrückung der i ten Horizontalreihe und der k ten Verticalreihe hervorgeht, mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ bezeichnet werden. Dann ist bekanntlich

1. $A_{1i} \cdot a_{1k} + A_{2i} \cdot a_{2k} + A_{3i} \cdot a_{3k} + A_{4i} \cdot a_{4k} = \Delta$ oder $= 0$, je nachdem $i = k$, oder i von k verschieden ist, wenn wir dabei A_{ik} und A_{ki} als gleichbedeutende Symbole gelten lassen. Nun ist

$$\begin{aligned} 2. \quad & a_{1k} f_1' + a_{2k} f_2' + a_{3k} f_3' + a_{4k} f_4' = \\ & (A_{11} a_{1k} + A_{21} a_{2k} + A_{31} a_{3k} + A_{41} a_{4k}) x_1 \\ & + (A_{12} a_{1k} + A_{22} a_{2k} + A_{32} a_{3k} + A_{42} a_{4k}) x_2 \\ & + (A_{13} a_{1k} + A_{23} a_{2k} + A_{33} a_{3k} + A_{43} a_{4k}) x_3 \\ & + (A_{14} a_{1k} + A_{24} a_{2k} + A_{34} a_{3k} + A_{44} a_{4k}) x_4. \end{aligned}$$

In Rücksicht auf 1. ergibt sich hieraus

$$3. \quad a_{1k} f_1' + a_{2k} f_2' + a_{3k} f_3' + a_{4k} f_4' = \Delta \cdot x_k.$$

Sind nun $u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}$ die Coordinaten der Polarebene des Punktes P_1 , so haben wir in Rücksicht auf die Gleichung der Polarebene die Proportion

$$4. \quad \frac{1}{h_1} u_{11} : \frac{1}{h_2} u_{21} : \frac{1}{h_3} u_{31} : \frac{1}{h_4} u_{41} = f_{11}' : f_{21}' : f_{31}' : f_{41}'.$$

Das Verhältniss der Polynome

$$\begin{aligned} & \left(a_{11} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{12} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{13} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{14} \frac{u_{41}}{h_4} \right) \\ & : \left(a_{21} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{22} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{23} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{24} \frac{u_{41}}{h_4} \right) \\ & : \left(a_{31} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{32} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{33} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{34} \frac{u_{41}}{h_4} \right) \\ & : \left(a_{41} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{42} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{43} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{44} \frac{u_{41}}{h_4} \right) \end{aligned}$$

bleibt daher ungeändert, wenn wir darin $u_k : h_k$ durch f_{k1}' ersetzen. In Rücksicht auf die vier in 3. enthaltenen Identitäten erhalten wir

$$\begin{aligned} 5. \quad x_{11} : x_{21} : x_{31} : x_{41} &= \left(a_{11} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{12} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{13} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{14} \frac{u_{41}}{h_4} \right) \\ & : \left(a_{21} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{22} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{23} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{24} \frac{u_{41}}{h_4} \right) \\ & : \left(a_{31} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{32} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{33} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{34} \frac{u_{41}}{h_4} \right) \\ & : \left(a_{41} \frac{u_{11}}{h_1} + a_{42} \frac{u_{21}}{h_2} + a_{43} \frac{u_{31}}{h_3} + a_{44} \frac{u_{41}}{h_4} \right). \end{aligned}$$

zweiter Ordnung.

ebene T eines
eil Q auf T_1 un
Punkte eine

so liegen dere
[T_2 liegen mü
kte der Gera

in Bezug auf

II. O. conjugirte Gerade derart, dass jede der beiden Pole der Ebenen enthält, die durch die andere Gerade Geraden, die den Geraden einer Ebene conjugirt sind, gehen durch Ebene; die Geraden, die den durch einen Punkt gehenden Ger sind, liegen auf der Polarebene des Punktes.

12. Der Punkt P_0 , der die Strecke P_1P_2 im Verhältniss λ_2 die Coordinaten

$$x_{k0} = \lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2},$$

wenn man voraussetzt, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ist. Da man nun offen

$$f_{k0}' = \lambda_1 f_{k1}' + \lambda_2 f_{k2}',$$

so hat die Polarebene von P_0 die Gleichung

$$1. \quad T_0 = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0,$$

wobei

$$T_1 = f_{11}' \cdot x_1 + f_{21}' \cdot x_2 + f_{31}' \cdot x_3 + f_{41}' \cdot x_4 =$$

$$T_2 = f_{12}' \cdot x_1 + f_{22}' \cdot x_2 + f_{32}' \cdot x_3 + f_{42}' \cdot x_4 =$$

die Gleichungen der Polarebenen von P_1 und P_2 sind.

Die Gleichung 1. bestätigt, dass die Polarebene von P_0 durch gerade der Polarebenen von P_1 und P_2 geht, dass also die Polarebenen der Geraden P_1P_2 ein Büschel bilden; sie lehrt aber zugleich, dass einer Geraden mit dem Büschel ihrer Polarebenen proje

Durch die Polarebenen der Punkte der Geraden P_1P_2 wird auf eine Punktreihe ausgeschnitten, die mit der auf P_1P_2 liegenden projectiv ist. Die Beziehung der Punkte beider Reihen ist wechs wenn II auf der Polarebene von P_0 liegt, so liegt auch P_0 auf c von II. Folglich fallen die Gegenpunkte beider Reihen zusammen selben Punkte der Geraden, nämlich dem unendlich fernen, entspre folgt weiter, dass die beiden projectiven Punktreihen eine Invo

13. Die Gleichung der Polarebene eines Punktes P_1 in Bezug und die Gleichung des Poles einer Ebene T_1 in Bezug auf $\varphi = 0$ l der Identitäten No. 4, 4 und 8 auch geschrieben werden

$$1. \quad T_1 = f_1' \cdot x_{11} + f_2' \cdot x_{21} + f_3' \cdot x_{31} + f_4' \cdot x_{41} =$$

$$2. \quad P_1 = \varphi_1' \cdot u_{11} + \varphi_2' \cdot u_{21} + \varphi_3' \cdot u_{31} + \varphi_4' \cdot u_{41} =$$

Hieraus erhält man leicht die Gleichungen der Polar Ecken des Achsentetraeders; nämlich für die

$$\text{Polarebene von } A_1: f_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4$$

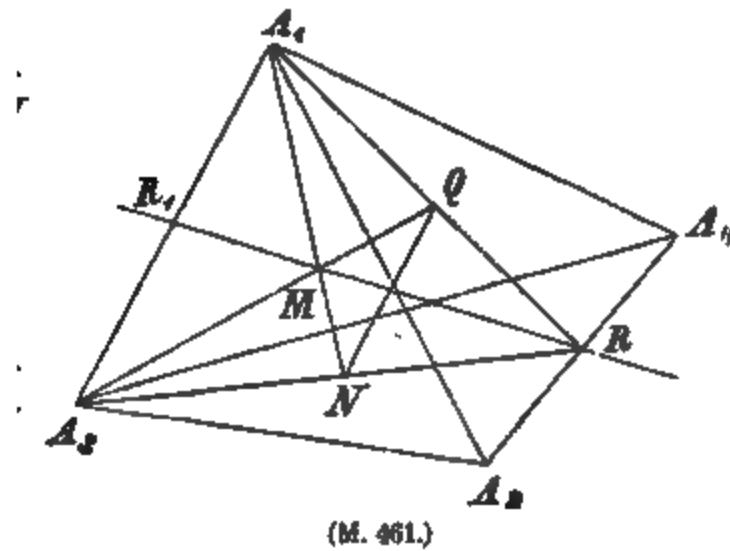
$$\text{„ „ „ } A_2: f_2' = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4$$

$$\text{„ „ „ } A_3: f_3' = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4$$

$$\text{„ „ „ } A_4: f_4' = A_{41}x_1 + A_{42}x_2 + A_{43}x_3 + A_{44}x_4$$

Aus Gleichung 2. ergeben sich die Gleichungen der Pole der Achsentetraeders; man erhält für den

M und ist R der Schnittpunkt dieser



A_2A_4 und die Mitte der gegenüber-

hung $\xi_2 : h_2 = \xi_4 : h_4$, dass M auf der mit der Mitte der gegenüberliegenden

entren aller Flächen II. O., die einhalten, liegen auf der Geraden, dieses Vierecks verbindet.

ste A_1 die Polarebene T_1 in Bezug auf A_2 auf T_1 und construirt die Polarebene T_2 ; wählt man auf der Schnittgeraden und bestimmt dessen Polarebene T_3 , so geht durch A_4 , den T_1 , T_2 und T_3 gemein, also ist diese die

A_2A_4 , dessen Seitenflächen die Polarebenen sind; ein solches Tetraëder wird als Polartetraëder bezeichnet.

Um ein Polartetraëder einer Fläche f ; einen Eckpunkt (A_1) kann man beliebig im Raume wählen; den zweiten Eckpunkt (A_2) kann man beliebig auf der Polarebene von A_1 wählen; den dritten Eckpunkt kann man beliebig auf einer Geraden, dem Schnitte der Polarebenen von T_1 und T_2 , wählen; der vierte ist durch diese drei bestimmt.

Oder man wählt eine Ebene (T_1) beliebig im Raume; die zweite Ebene (T_2) kann man unter den durch einen Punkt (den Pol von T_1) gehenden Ebenen beliebig wählen; die dritte kann man unter den durch eine Gerade (die die Pole von T_1 und T_2 verbindet) gehenden beliebig wählen; die vierte ist durch diese drei bestimmt.

^{*)} Den Beweis dafür, dass MR die Seite A_1A_3 halbt, kann man dem Satze (analyt. Geometrie § 5, No. 13) entnehmen. Theilt man die Seiten A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 eines Dreiecks der Reihe nach in den Verhältnissen $n_1 : n_2$, $n_2 : n_3$, $n_3 : n_1$, und verbindet die Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken, so gehen diese drei Geraden durch einen Punkt. Theilt man also A_2R im Verhältnisse $m : n = A_2N : NR$ und RA_1 im Verhältnisse $RQ : QA_1 = RN : NA_3 = n : m$, so wird A_1A_3 von RM im Verhältnisse $m : m$ getheilt, folglich ist $R_1 = R_1A_3$.

$$x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0, \\ u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0,$$

$$\alpha_4 \beta_4 = 1.$$

sich die Coordinaten des

$$1 \\ \xi_4^2 = 0, \\ \xi_4 \text{ des Centrums} \\ \xi_4 = \frac{\beta_4}{\beta} h_4,$$

wenn man β abkürzungsweise für $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ setzt.

17. Wenn man durch Coordinatentransformation von der Gleichung einer Fläche II. O. in Bezug auf ein Polartetraeder zur Gleichung derselben Fläche in Bezug auf irgend ein anderes Polartetraeder übergeht, so bleibt sowohl die Summe der Coefficienten in der Gleichung für Punktcoordinaten, als auch in der Gleichung für Liniencoordinaten ungeändert. Sind die Gleichungen im ursprünglichen Systeme

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0, \\ \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0,$$

und im neuen Systeme

$$A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_3^2 + A_4 \xi_4^2 = 0, \\ B_1 w_1^2 + B_2 w_2^2 + B_3 w_3^2 + B_4 w_4^2 = 0,$$

so gelten die Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Beweis. Da in unseren Gleichungen nur die Quadrate der Coordinaten vorkommen, so kann in den Transformationsformeln § 11, No. 15, 1 und No 17, 1 über die Coefficienten immer so verfügt werden, dass

$$1. \quad k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = +1 \quad \text{und} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = +1.$$

Unter dieser Voraussetzung sind die Transformationsformeln

$$\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4, \quad \xi_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4, \\ \xi_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4, \quad \xi_4 = a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4.$$

Setzt man dies in die Gleichung der Fläche

$$A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_3^2 + A_4 \xi_4^2 = 0,$$

so erhält man aus der Identität

$$2. \quad A_1 \xi_1^2 + A_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_3^2 + A_4 \xi_4^2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2$$

zunächst folgende vier Gleichungen, welche aussagen, dass in der transformirten Gleichung die Coefficienten, welche Produkte von je zwei Coordinaten multipliciren, verschwinden

$$3. \quad A_1 a_{i1} a_{k1} + A_2 a_{i2} a_{k2} + A_3 a_{i3} a_{k3} + A_4 a_{i4} a_{k4} = 0,$$

wobei man für i, k jede Combination zu zweien aus den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 zu nehmen hat, so dass man sechs Gleichungen dieser Art erhält.

Ferner erhält man aus 2.

$$\alpha_i = A_1 a_{i1}^2 + A_2 a_{i2}^2 + A_3 a_{i3}^2 + A_4 a_{i4}^2,$$

daher ergibt sich die Coefficientensumme

$$4. \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \sum A_k (a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2 + a_{4k}^2), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Multiplicirt man nun jeden der sechs Ausdrücke 3. mit $2 \cos e_{ik}$ (§ 11, No. 13, 6)

1. zweiter Ordnung,

$$+ b_2 x_2^2 + \dots + b_r$$

$$b_2 x_2^2 - \dots - b_r x_r^2$$

$$+ b_2 x_2^2 + \dots$$

2. Coefficienten kommen

3. positiv, $a_{m+1} \dots a_r$ negativ,

$b_1, b_2 \dots b_m$ positiv, $b_{m+1} \dots b_r$ negativ. Nimmt man nun zunächst an, dass $n < m$, so wäre die Anzahl der negativen Glieder in dem Polynom

$$r - m + n = r - (n - m),$$

also kleiner als r . Setzt man alle y , welche negative Coefficienten haben, gleich Null, also

$$5. \quad y_{m+1} = y_{m+2} = \dots = y_r = 0,$$

so kann man noch ausserdem über die x so verfügen, dass man eine Function $b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots$ mit positiven Coefficienten versehenen x annimmt.

$$6. \quad x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

Denn die letzten $r - m$ der Formeln 2. gehen dann in $r - n$ lineare Gleichungen der $r - n$ Grössen $x_{n+2}, x_{n+3} \dots x_r$ über, also mehr unbestimmte Grössen, als die Anzahl der Gleichungen beträgt, sind daher auf mehr als eine Weise durch von Null verschiedene Werthe der Unbestimmten erfüllbar.

Durch die Substitutionen 5. und 6. verschwinden in 4. alle negative Glieder, da nun eine Summe von positiven Grössen nicht verschwinden kann, so ist die Annahme falsch; also ist n nicht kleiner als m .

Nimmt man an, n sei grösser als m , so kann man, ohne auf Widersprüche zu stossen, alle y gleich Null setzen, welche in der Formel 4. positive Coefficienten haben, und alle x , welche in 3. negative Coefficienten haben. Dann fallen in 4. alle positiven Grössen hinweg, im Widerspruch mit der Annahme, dass die algebraische Summe aller in 4. stehenden Glieder identisch verschwindet.

Es ist nicht überflüssig, hervorzuheben, dass diese Schlussweise in dem Falle $m = n$ ihre Anwendbarkeit verliert; denn setzt man alle y , deren Coefficienten negativ, und alle x , deren Coefficienten positiv sind gleich Null, so erhält man aus den letzten $r - m$ Formeln der Gruppe 2. ebenso viele homogene Gleichungen für die Grössen $x_{n+1} \dots x_r$, die gerade so viel Unbestimmte enthalten, als die Anzahl der Gleichungen beträgt, und daher im Allgemeinen durch verschwindende Werthe der Grössen $x_{m+1} \dots x_r$ erfüllt werden. Aus $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_r = 0$ folgt dann auf Grund der Gleichungen 2. auch die übrigen y verschwinden, so dass nun die Identität 4. erfüllt ist, da alle Glieder derselben verschwinden.

19. Wenn in der Gleichung

$$\varphi = \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 + \beta_4 u_4^2 = 0$$

kein Coefficient Null oder unendlich gross ist und auch die Summe der Coefficienten nicht verschwindet, so ist die Fläche keine Grenzfläche, kein Kegel und kein Paraboloid; man kann dann die Gleichung durch die Summe der Coefficienten dividiren. Man kann daher im Falle

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \geq 0$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1.$$

Geht man nun durch die Transformationsformeln zu irgend einer

$$\frac{1}{b_1^2 h_1^2}.$$

Für die Coordinaten des Centrums nimmt f den Werth an

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 =$$

für die Coordinaten der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 erhält f die W

$$1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad 1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Daher liegen drei Ecken jedes Polartetraeders A_1, A_2, A_3 auf derselben Seite der Fläche, die vierte A_4 wird von M getrennt.

Für das Verhältniss, in welchem die Strecke, die das Ce Punkte P_2 der Ebene $A_1 A_2 A_3$ verbindet, von f geschnitten jetzt die Gleichung

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \left(\frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_{12}^2 - \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2 \right)$$

aus welcher folgt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_{12}^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_{22}^2 + \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_{32}^2}$$

Der Radicand wird für unendlich grosse Werthe von x_{12} , unendlich. Wir sehen daher: Die Ebene, die durch das Ce Ebene eines Polartetraeders gelegt wird, deren Ecken mit dem selben Seite der Fläche liegen, hat mit der Fläche keinen real Es giebt daher Ebenen durch das Centrum, die die Fläche Folglich ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid.

Setzt man in den Gleichungen des Ellipsoids und des zw boloids

$$b_1^2 x_1^2 - b_2^2 x_2^2 - b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0,$$

$$\text{der Reihe nach } x_1 = 0 \text{ und } x_4 = 0, \text{ so erhält man}$$

$$-b_2^2 x_2^2 - b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0, \quad \text{bez.} \quad b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2 - b_4^2 x_4^2 = 0,$$

Beiden Gleichungen kann durch reale Punkte nicht ge jedem Polartetraeder eines Ellipsoids und eines Hyperboloids giebt es daher eine Ebene, welche d schneidet. Hierdurch wird bestätigt, dass auf dem Ellipse zweischaligen Hyperboloide keine Geraden liegen; denn von e jede Ebene in einem realen Punkte getroffen.

C. Sind zwei Coefficienten der Function φ positiv, und zw man setzen

$$\varphi = b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 - b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2.$$

Die Coordinaten des Centrums sind jetzt

$$\xi_1 = b_1^2 h_1, \quad \xi_2 = b_2^2 h_2, \quad \xi_3 = -b_3^2 h_3, \quad \xi_4 = -b_4^2 h_4.$$

Die Gleichung in Punktecoordinaten ist

$$f = \frac{1}{b_1^2 h_1^2} x_1^2 + \frac{1}{b_2^2 h_2^2} x_2^2 - \frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2.$$

Für die Coordinaten des Centrums und der Ecken d nimmt die Function f die Werthe an

$$1. \quad 1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad -1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2$$

Daher liegen 2
auf derselben Seite
Fläche vom Centru
die andern beiden
eckigen Raume. G

$$f = \left(\begin{array}{l} \\ + \left(\end{array} \right.$$

und setzt

$$\frac{1}{b_1 h_1} x_1 -$$

$$\frac{1}{b_1 h_1} x_1 -$$

so wird der Gleich
kürlicher Wahl des

welche also den be

$$T = \mu_1' 2$$

Diese Ebenen
in denen T_1 und T
Dies charakteri
20. Ist in der

kein Coefficient Nul

so sind die Coord
ein Paraboloid (No.
gleiche Zeichen.

A. Haben drei
schreiben

Daher ist die C

$$f = \frac{1}{b_1^2 h}$$

Setzt man in b
giebt sich

$$b_1^2 u_1^2 + b_2^2 u_2^2 + b_3$$

Beiden Gleichu
nügt werden. Wir
Ecke, durch wel
legen lassen, un
Tetraëders hat m

Hierdurch ist d
linige Fläche wird
durch jeden Punkt

Für die Coordi
die Werthe an

Flächen zweiter Ordnung.

, A_3 durch die Flächen
anten und Flächen
en, die andern nicht.
asselbe Zeichen, so

$$b_3^2 u_3^2 - b_4^2 u_4^2 = 0.$$

daher

$$\frac{1}{b_3^2 h_3^2} x_3^2 - \frac{1}{b_4^2 h_4^2} x_4^2 =$$

chung des einschalige
wir haben daher das h

Paraboloid vor uns.

Für die Coordinaten der Tetraëderecken erhält f die Werthe

$$1 : b_1^2, \quad 1 : b_2^2, \quad -1 : b_3^2, \quad -1 : b_4^2.$$

Daher werden A_1 und A_2 , sowie A_3 und A_4 durch die F
trennt, während die Tetraëderkanten A_1A_3 , A_1A_4 , A_2A_3 , A_2A_4
geschnitten werden, und zwar, wie aus den Polareigenschaften
innerhalb jeder Strecke nur ein Schnittpunkt liegt, — eine Ben
Bezug auf jede Fläche II. O. von jeder Kante eines Polartetraëd
Fläche in realen Punkten trifft.

21. Wir schliessen hieran die Frage nach den Punkte
welche in Bezug auf zwei Flächen II. O. dieselbe Polar

Wir beziehen beide Flächen auf ein Polartetraëder einer d
Gleichungen in Punktcoordinaten seien

$$F = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0,$$

$$f = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{44} x_4^2 = 0$$

Die Polarebenen eines Punktes P_0 bezüglich beider Flächen

$$T = b_1 x_{10} \cdot x_1 + b_2 x_{20} \cdot x_2 + b_3 x_{30} \cdot x_3 + b_4 x_{40} \cdot$$

$$T' = f_{10}' \cdot x_1 + f_{20}' \cdot x_2 + f_{30}' \cdot x_3 + f_{40}' \cdot x_4 = 0$$

Sollen T und T' geometrisch gleichbedeutend sein, so muss
durch Multiplication mit einer Zahl λ identisch mit T' werden.

die Gleichungen

$$a_{11} x_{10} + a_{12} x_{20} + a_{13} x_{30} + a_{14} x_{40} = \lambda b_1 x_1$$

$$a_{12} x_{10} + a_{22} x_{20} + a_{23} x_{30} + a_{24} x_{40} = \lambda b_2 x_2$$

$$a_{13} x_{10} + a_{23} x_{20} + a_{33} x_{30} + a_{34} x_{40} = \lambda b_3 x_3$$

$$a_{14} x_{10} + a_{24} x_{20} + a_{34} x_{30} + a_{44} x_{40} = \lambda b_4 x_4$$

Reducirt man diese auf Null, so erhält man

$$(a_{11} - \lambda b_1) x_{10} + a_{12} x_{20} + a_{13} x_{30} + a_{14} x_{40} =$$

$$a_{12} x_{10} + (a_{22} - \lambda b_2) x_{20} + a_{23} x_{30} + a_{24} x_{40} =$$

$$a_{13} x_{10} + a_{23} x_{20} + (a_{33} - \lambda b_3) x_{30} + a_{34} x_{40} =$$

$$a_{14} x_{10} + a_{24} x_{20} + a_{34} x_{30} + (a_{44} - \lambda b_4) x_{40} =$$

Der Verein dieser vier homogenen linearen Gleichungen
Verschwinden der Determinante bedingt

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda b_3 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} - \lambda b_4 \end{vmatrix}$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades für λ . Hat man si
man die Wurzeln der Reihe in das System 2. ein und erhält

hen zweiter Ord

sind die glei
conjugirt comp
auch die Gle
unkte conjugir
ugirt complexe
ei conjugirt
ie bestimmte
1 eine reale
. O. haben i

ilfe der Gleic

und $c_{11}u_1^2 + 2c_{12}u_1u_2 + \dots + c_{44}u_4^2 = 0$
die Gleichungen von F und f in Ebenencoordinaten, so erl
aten der Ebenen, deren Pole für f und F zusammenfallen,
des Systems

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda d_1)u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3 + c_{14}u_4 &= 0 \\ c_{12}u_1 + (c_{22} - \lambda d_2)u_2 + c_{23}u_3 + c_{24}u_4 &= 0 \\ c_{13}u_1 + c_{23}u_2 + (c_{33} - \lambda d_3)u_3 + c_{34}u_4 &= 0 \\ c_{14}u_1 + c_{24}u_2 + c_{34}u_3 + (c_{44} - \lambda d_4)u_4 &= 0 \end{aligned}$$

wobei λ eine Wurzel der Gleichung ist

$$\Gamma = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda d_1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda d_2 & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - \lambda d_3 & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} - \lambda d_4 \end{vmatrix}$$

Die Gleichungen $C = 0$ und $\Gamma = 0$ haben daher
Anzahl reale Wurzeln.

22. Die soeben mitgetheilte Untersuchung hängt aufs I
der Frage nach den Kegeln II. O., die durch die Sc
Flächen II. O. gehen, sowie mit der Frage nach den G
die den gemeinsamen Tangentenebenen zweier Fl.
schrieben sind; oder allgemeiner: mit der Frage nach d
zu einem Flächenbüschel II. O. gehören, bez. nach den
einer Schaar von Flächen II. Kl. gehören.

Sind f und F zwei quadratische Functionen in Punkten

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{44}x_4^2 \\ F &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{44}x_4^2 \end{aligned}$$

so versteht man unter einem Flächenbüschel II. O. die
Flächen, deren Gleichungen unter der Form entha
2. $\varphi = \lambda_1 f + \lambda_2 F = 0$.

Alle Punkte, für welche $f = 0$ und zugleich $F = 0$
Gleichung $\varphi = 0$. Jede Fläche des Büschels enthält also al
und $F = 0$ gemeinsamen (realen oder imaginären) Punkte.

Umgekehrt: Alle Flächen II. O., die durch eine gegeb
1. Sp. gehen, bilden ein Büschel. Denn es ist in § 9,
worden, dass die Gleichung jeder dieser Flächen die Form
und $F = 0$ die Gleichungen zweier bestimmten, die Ra
Flächen II. O. sind. Ferner folgt aus § 9, No. 2: Durch

n ge

h A

id)

e).

is P

els

imm

er F

die

· Ka

λ

lie

δ , A

falls ein Büschel, und treffen die Gerade n ausser in A in C_1, C_2, \dots , die mit der Involution $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ proje

Da die Reihe B_1, B_2, \dots mit der Involution $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ und die Reihe C_1, C_2, \dots mit der Involution $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$; und da letztere mit der Reihe C_1, C_2, C_3, \dots so sind auch die Reihen B_1, B_2, B_3, \dots und C_1, C_2, C_3, \dots

Diese beiden Reihen haben offenbar den Punkt O zum ersten Doppelpunkt, und sind daher bestimmt, wenn man noch zwei Paar entsprechender Punkte B_1, C_1 und B_2, C_2 kennt. Der zweite Doppelpunkt B dieser Reihen ist der Punkt, in welchem die gesuchte Fläche f mit der Kante m ausser in O schneidet. Man findet diesen Doppelpunkt auf linearem Wege, wenn man die Gerade n (auf der Bildfläche) B_1, B_2 von einem Punkte D , und C_1, C_2 von einem Punkte E aus projectirt; die Punkte O, D, E , sowie die Schnittpunkte DB_1 und EC_1 , sowie von DB_2 und EC_2 bestimmen den Kegelschnitt K . Die Geraden DE und OB schneiden sich je zwei von D und E nach entsprechenden Punkten B_1, \dots und C_1, C_2, C_3, \dots gehende Strahlen schneiden. Der Punkt P ist daher der Punkt, in welchem dieser Kegelschnitt (ausser in O) schneidet.

Hat man B , so hat man auch die drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 , die die Ebenen α, β, γ die gesuchte Fläche f treffen.

Legt man nun z. B. eine Ebene δ durch A_1 und A_4 , so schneidet man auf linearem Wege den weiteren Schnittpunkt dieser Ebene mit dem Kegelschnitt L ; nach der in der vorigen Nummer gegebenen Construction (auf linearem Wege) aus diesen drei Punkten und dem Schnittpunkte B den Kegelschnitt finden, in welchem f von der Ebene δ geschnitten wird. Dreht man δ um die Gerade A_1A_4 , und wiederholt für die Ebenen α, β, γ diese Construction, so erhält man die gesuchte Fläche vollständig.

3. Man kann diese Lösung so anordnen, dass alle Constructionen linear sind.

Man durchschneide die Kanten l und m mit den Geraden F und G und nehme als Kegelschnitte L_1 und L_2 die durch F und G bestimmten Büschels $AA_1A_2A_3$; die Punkte F' und G' , in welchen L_1 und L_2 die Kanten l und m schneiden, geben die beiden Paare FF' und GG' ; λ und λ_2 der auf der Kante l liegenden Involution.

Die Geraden FA_4 und $F'A_4$ bilden dann den Kegelschnitt M_1 ; die Geraden GA_4 und $G'A_4$ den Kegelschnitt M_2 .

Durchschneidet man die Kante m mit der Geraden F in G_1' , so ist F_1F_1' das Paar μ_1 , und G_1G_1' das

bündel und

man sofo

K_3 .
und K_2 ,
auch die r
eder auf
de $C =$
und den
 $= 0$. Da
ikt gehen,
enthält,
chliessen
kte gem
in; die

welche den Geraden in Σ' entsprechen, haben da
ame Punkte. Dem Schnittpunkte zweier Geraden
pricht der vierte Schnittpunkt der beiden Kegelsch
nd T_3' entsprechen.

Die drei Punkte, in denen sich die Kegelschnitte K der
eissen die Grundpunkte auf Σ .

In gleicher Weise ergibt sich, dass jeder Geraden T au
 Γ auf Σ' entspricht, und dass alle diese Kegelschnitte drei
aben, welche als die Grundpunkte auf Σ' bezeichnet we

Der Verein der drei Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$
die Proportion ersetzt werden

5.
$$A : B : C = D : E : F.$$

Die drei Grundpunkte auf Σ erfüllen diese Proportion
Punkte werden also die Verwandtschaftsgleichungen 2. ident
Jedem Grundpunkte auf Σ entsprechen die Punkte d

$$Ax' + By' + C = 0,$$

wenn man darin x, y durch die Coordinaten die
ersetzt; ebenso entsprechen jedem Grundpunkte a
der Geraden

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

wenn man hierin für x', y' die Coordinaten dieses G.

Das Vorhandensein dieser ausgezeichneten Punkte un
Systemen Σ und Σ' fordert dazu auf, homogene Coordinaten
zu legen, und die ausgezeichneten Elemente zu den Achsendrei

In Bezug auf zwei beliebig gewählte Coordinatendreiecke
man die Verwandtschaftsgleichungen

$$G_1'x_1 + G_2'x_2 + G_3'x_3 = 0 \quad \text{und} \quad H_1'x_1 + H_2'x_2 + H_3'x_3 = 0$$

worin die G' und H' lineare Functionen von x_1', x_2', x_3' s

Wir wollen nun in Σ die drei Geraden zu Coordinatenach
den Grundpunkten in Σ' entsprechen, und zwar mögen den
 Π_1', Π_2' der Reihe nach die Achsen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sein.
Hieraus folgt, dass für die Coordinaten von Π_1' die Functionen
 G_1' und H_1' verschwinden, sowie ferner, dass für die Coordinaten
von Π_2' die Functionen G_2' und H_2' verschwinden, und endlich
für die Coordinaten von Π_3' die Functionen G_3' und H_3' verschwinden.
Wir wollen nun in Σ die drei Geraden zu Coordinatenachsen
nehmen, die den Grundpunkten in Σ' entsprechen, und zwar mögen den
 Π_1', Π_2', Π_3' der Reihe nach die Achsen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sein.
Hieraus folgt, dass für die Coordinaten von Π_1' die Functionen
 G_1' und H_1' verschwinden, sowie ferner, dass für die Coordinaten
von Π_2' die Functionen G_2' und H_2' verschwinden, und endlich
für die Coordinaten von Π_3' die Functionen G_3' und H_3' verschwinden.
Wir wollen nun in Σ die drei Geraden zu Coordinatenachsen
nehmen, die den Grundpunkten in Σ' entsprechen, und zwar mögen den
 Π_1', Π_2', Π_3' der Reihe nach die Achsen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sein.
Hieraus folgt, dass für die Coordinaten von Π_1' die Functionen
 G_1' und H_1' verschwinden, sowie ferner, dass für die Coordinaten
von Π_2' die Functionen G_2' und H_2' verschwinden, und endlich
für die Coordinaten von Π_3' die Functionen G_3' und H_3' verschwinden.

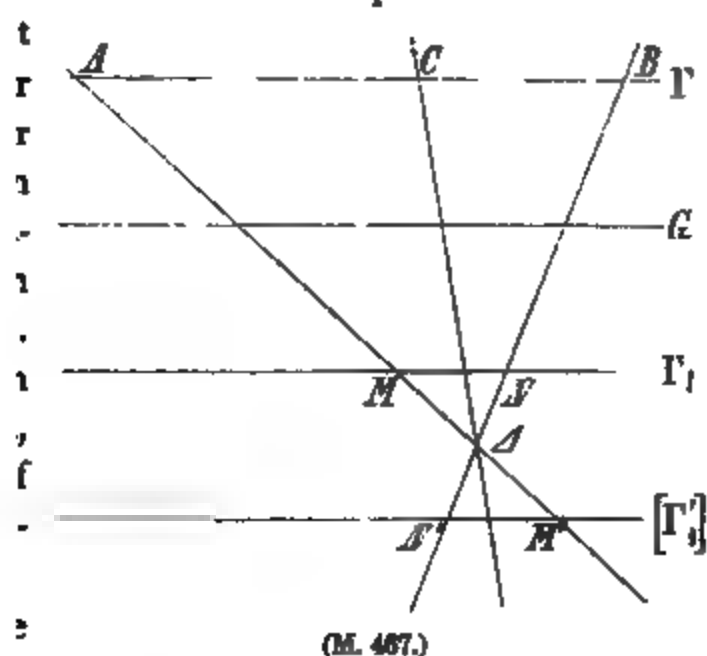
nen giebt es also ein Paar gleich-
ungleichsinnig congruente Gerade.
is, denen congruente Gerade im
l symmetrisch zu der Gegenachse

iden projectiven Strahlbüscheln zwei ent-
haben die beiden Büschel noch ein paar
n; denn die Doppelstrahlen zweier auf
eal oder beide imaginär. Da man nun
ise so auf einander legen kann, dass

ein bestimmtes Paar entsprechender
eder Strahl in einem von zwei
weier Winkel, die den entsprechen-
ie nach gleich sind; zwei dieser
ch, die andern beiden sind ent-
man, dass bei zwei projectiven
m Punkte der einen Reihe zwei
chenden Strecken dem absoluten
er sich entsprechenden Strecken
l entgegengesetzt gleich.

en congruenten Geraden, die sich ohne
zur Deckung bringen lassen, sowie Γ_1
congruente Gerade, so lege man die
den Punkte von Γ und Γ' sich decken;

i Strahlbüschel haben einen entsprechen-
noch ein Paar entsprechende durch A



echenden Punkte Δ nach einem selbst-
entsprechenden Punkte auf Γ . Es decken sich folglich zwei entsprechende
Strahlenbüschel beider Systeme und ihr gemeinsamer Träger ist Δ .

Da nun von den Strahlen durch Δ entsprechende Gerade in entsprechenden
Punkten geschnitten werden, so folgt, dass $MN = M'N'$; folglich sind die
Dreiecke $MN\Delta$ und $M'N'\Delta$ congruent, und Δ auf der Mittellinie des Streifens
' $[\Gamma_1']$ gelegen.

Dreht man hierauf die Ebene Σ' um die Achse Γ um einen gestreckten

i nac
 8).
 en wi
 nlieg



)
 ingl
 ne 4
 ichs
 Büsc
 der
 e die
 das 1
 Zwe
 o zu
 idun
 oder
 1 Ge
 ältni

i mai

y_1'
 y_2'
 y_3'
 man

H_2
 H_2
 H_3

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} = R,$$

Verhältniss

$$\frac{P_3}{P_3'} = \frac{H_{31} H_{32} H_{33}}{R}.$$

ableiten

$$\frac{P_3}{P_3'} = \frac{R'}{H_{31}' H_{32}' H_{33}'},$$

setzt

$$= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}.$$

nahe an P_1 , so sind die Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $P_1' P_2' P_3'$, und die Ausdrücke H_{31} , H_{32} , H_{33} einander verschwindend kleiner an den entsprechenden Flächen f und f' hat man also

$$\frac{f}{f'} = \frac{H_{31}^2}{R}.$$

In diesen Worten auf eine Abart der projectiven

auch $A_3 = B_3 = 0$ und die Functionen H_3 und constanten C_3 und Γ_3 . Wenn man sie noch als bez. von x' und y' betrachten will, so muss man betrachten, in denen die Coefficienten der Coordinaten

$$0 \text{ und } H_3' = 0$$

grosse Werthe der Coordinaten genügt werden, in diesem besonderen Falle der projectiven Ebenachsen unendlich fern. Man bezeichnet dies Affinität. Das Verhältniss entsprechender

$$\frac{P_3 P_3'}{P_3' P_3'} = \frac{C_3^2}{R},$$

der Punkte $P_1 P_2 P_3$. Wir haben daher den Satz, dass das Verhältniss entsprechender Flächen constant ist.

In unendlich fernen Punkten in Σ ein unendlich

ferner in Σ' entspricht, so folgt weiter: Je zwei entsprechende Gerade in affinen Systemen enthalten ähnliche Punktreihen.

13. Die Gleichungen entsprechender Punkte zweier projectiven Systeme No. 5, 7 beziehen sich auf Coordinatensysteme in den Ebenen Σ und Σ' ; durch die Coefficienten $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2$, $\lambda_3 a_3$. . . werden Beziehungen ausgedrückt, die von jeder Coordinatenbestimmung unabhängig sind, diese Gleichungen gelten auch, wenn die Punkte von Σ und Σ' auf räumliche Coordinatensysteme bezogen werden. Wir wollen für die folgende Untersuchung voraussetzen, dass sie auf ein Coordinatentetraeder bezogen sind.

Aus den Functionen P_1 , P_2 , P_3 . . . und aus einer willkürlich gewählten linearen Function in Ebenencoordinaten Π bilden wir die Functionen

$$P_1' = P_1 + \delta_1 \Pi, \quad P_2' = P_2 + \delta_2 \Pi, \quad P_3' = P_3 + \delta_3 \Pi.$$

Analytisch

Punkte $P_1' =$
 P_2' sind die
aus projicirt.

$$+ a_3 P_3' = a_1 P_1$$

Projection des]

$$P_4 = a_1 P_1$$

t; denn aus

$$P_4' = a_1 P_1$$

P_4' mit P_1', P_2'

$$P_1 + a_2 P_2 +$$

raden $P_4 \parallel$ lie

se ist ersichtlic

$$- \lambda_2 a_2 P_2' + \lambda_1$$

$$- \lambda_3 a_3 P_3' + \lambda_1$$

unktes

$$P = \lambda_1 a_1 P_1 -$$

t

n 1. und 2. fol

stems Σ auf

t die Parallelp

lllich fernem C

enn $\Pi = 0$ die

nie α der Ebe

me so vereint,

eine Gerade β

und Σ_1 enthal

d die Ränder

Σ_1 . Die Sch

trieebene der

Die Ebenen,

Σ und Σ_1 in de

ective ebene

ine eine Cen

gegen Σ , dass

und Γ' mit den

entsprechende

Geraden; da

aden AA' und

f Γ liegenden

uf die Ebene Σ

auch mit Σ' pr

derselben Ebe

hende Punkte

en liegen; folg

n Σ .

mtheit aller Str

ichnet. Sowie

orstellen kann,

kann man sich ein Strahlbündel als den durch welche die Punkte einer Ebene vom Σ projicirt werden.

Man haben wir die Vorstellung einer mit einem Punktsystem) mit der Vorstellung der mit einem Strahlensystem) vereinigt; ebenso wollen wir einen Ebenenbündel immer vereint vorstellen; man kann der andern Bezeichnung bedienen, je nachdem man bei einem ebenen Querschnitte der Figur Σ die Schnittgeraden der Ebenen

und ein Strahlbündel, durch welches Σ projicirt wird, in Beziehung setzen, indem man jedem Punkte auf Σ den projicirenden Strahl, jeder Geraden auf Σ die projicirende Ebene zuordnet.

Strahlbündel, welche projective ebene Systeme projiciren, werden als projective Strahlbündel bezeichnet, und zwar entsprechen sich darin die Strahlen, welche entsprechende Punkte, sowie die Ebenen, welche entsprechende Gerade projiciren.

In zwei projectiven Strahlbündeln entspricht jedem ebenen Strahlbüschel des einen Systems ein projectives ebenes Strahlbüschel des andern; jedem Ebenenbüschel des einen ein projectives Ebenenbüschel des andern.

Ebene Querschnitte projectiver Strahlbündel sind projectiv. Entsprechen den vier Ebenen

$$T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 = 0, T_4 = a_1 T_1 + a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0$$

eines Ebenenbündels die Ebenen

$$T'_1 = 0, T'_2 = 0, T'_3 = 0, T'_4 = b_1 T'_1 + b_2 T'_2 + b_3 T'_3 = 0$$

eines projectiven Ebenenbündels, so sind die Gleichungen je zweier entsprechenden Ebenen beider Bündel

$$T = \lambda_1 a_1 T_1 + \lambda_2 a_2 T_2 + \lambda_3 a_3 T_3 = 0, T' = \lambda_1 b_1 T'_1 + \lambda_2 b_2 T'_2 + \lambda_3 b_3 T'_3 = 0.$$

Denn setzt man in diesen Gleichungen z. B. $z = 0$, so erhält man die Gleichungen der Geraden der Querschnitte beider Büschel mit der XY -Ebene, und erkennt sofort, dass beide Querschnitte projectiv sind.

Entsprechend den congruenten Geraden und den congruenten Strahlbüscheln ebener projectiver Systeme giebt es in zwei projectiven Strahlbündeln zwei Paar entsprechende congruente ebene Strahlbüschel und zwei Paar entsprechende congruente Ebenenbüschel; wir müssen uns indessen versagen, hierauf näher einzugehen.*)

16. Doppelemente auf einander liegender projectiver Ebenen. Werden zwei auf einander liegende ebene Systeme auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, so fällt ein Punkt P mit seinem entsprechenden P' zusammen, wenn man λ so wählt, dass die Gleichungen zusammen bestehen

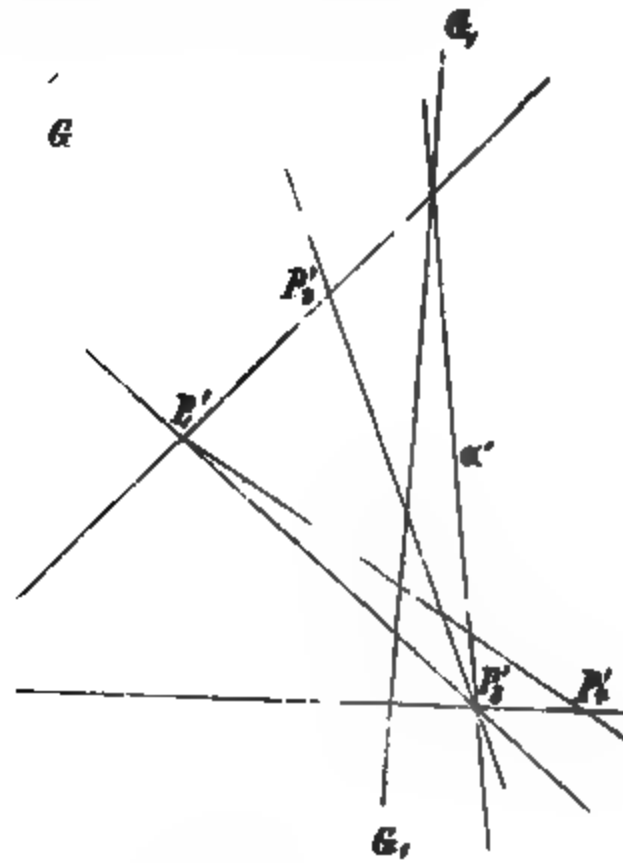
$$1. \quad \frac{\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \lambda_3 a_3 x_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3} = \frac{\lambda_1 b_1 x'_1 + \lambda_2 b_2 x'_2 + \lambda_3 b_3 x'_3}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3},$$

$$\frac{\lambda_1 a_1 y_1 + \lambda_2 a_2 y_2 + \lambda_3 a_3 y_3}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3} = \frac{\lambda_1 b_1 y'_1 + \lambda_2 b_2 y'_2 + \lambda_3 b_3 y'_3}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3},$$

Setzt man abkürzungsweise

*) Vergl. u. A. des Verfassers Schrift: Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Braunschweig 1872, pag. 219.

lel zu P_1P_2 gelegt wird, entspricht inkte auf $P_1'P_2'$ verbindet.



G_1 sind, und auf denen von $P_1'P_2'$ he der auf G von P_1P_2 und α ab-

geschnittenen Strecke gleich sind, sind die Geraden Γ' und Γ_1' , denen in Σ congruente Gerade Γ und Γ_1 entsprechen.

Dem von $P_1'P_2'$ und α' bestimmten Strahlbüschel entspricht das Parallelstrahlenbüschel, zu welchem P_1P_2 und α gehören. Die beiden Strahlen des Büschels $(P_1'P_2', \alpha')$, deren Winkel mit G_1 gleich den Winkeln der Geraden α und G sind, enthalten die Punkte Δ' und Δ_1' ; die entsprechenden Strahlen in Σ enthalten die Punkte Δ und Δ_1 ; man erhält die Träger $\Delta, \Delta_1, \Delta', \Delta_1'$, der congruenten Büschel, indem man auf diese beiden Paaren entsprechender Strahlen die Punkte bestimmt, deren Abstände von G und G_1 gleich dem Abstände der Geraden Γ' von G_1 bez. der Geraden Γ von G sind.

Die entsprechenden Strahlen zweier entsprechenden Strahlbüschel in zwei auf einander liegenden projectiven Systemen schneiden sich auf Punkten eines Kegelschnitts, der durch die Doppelpunkte der beiden Systeme geht; denn zwei Strahlen der beiden Büschel, welche nach demselben Doppelpunkte gehen, sind entsprechende Gerade. Sämmtliche Kegelschnitte, die durch die Paare entsprechender Strahlbüschel erzeugt werden, haben also die drei Doppelpunkte gemein. Zwei von diesen Kegelschnitten, welche durch die in A und A' , bez. durch die in B und B' liegenden entsprechenden Strahlenbüschel erzeugt werden, haben ausser den Doppelpunkten noch den immer realen Punkt gemein, in welchem sich die Geraden AB und $A'B'$ schneiden; denn AB und $A'B'$ sind entsprechend in beiden Paaren von entsprechenden Strahlbüscheln. Die Construction der Doppelpunkte und Doppelgeraden zweier auf einander liegenden ebenen Systeme ist somit auf die Fundamentalaufgabe für Constructionen dritten und vierten Grades zurückgeführt: Die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte zu finden, von denen ein Schnittpunkt bekannt ist.

§ 15. Raumcurven dritter Ordnung und abwick

1. Als Raumcurve III. O. (R_3) definirt welcher sich zwei Flächen II. O. durchdringen haben.

Diese Gerade bildet mit R_3 zusammen eine Raumcurve IV. O. Diese Raumcurve mit jeder Ebene vier Punkte gemein. Eine Raumcurve III. O. von jeder Ebene in drei Punkten geschnitten, von denen wenigstens einer real ist.

2. Ist α eine Gerade, die mit R_3 zusammen eine Fläche II. O. bildet, so lege man durch α eine Ebene F_1 und F_2 . Die durch α gelegten Ebenen schneiden das System, zu welchem α nicht gehört. Projicirt man F_2 auf F_1 von einer Geraden α' auf F_1 , bez. aus, die mit α zu demselben Systeme gehören, Ebenenbüschel, deren Träger die Geraden α, α' sind, erzeugen F_1 , das erste und dritte erzeugen R_3 , treffen sich drei entsprechende Ebenen der drei Büschel.

Umgekehrt: Sind $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Träger dreier Ebenenbüschel, erzeugen die Büschel α und α' eine Fläche II. O. F_1 ; F_1 und F_2 enthalten beide die Gerade α , demnach noch in einer R_3 , in deren Punkten je drei Büschel zusammentreffen.

Wir schliessen daher: Der Ort der Schnittpunkte dreier projectiven Ebenenbüschel ist eine Gerade, der drei Träger dieser Büschel bilden mit R_3 ständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O.

3. Die Büschel α' und α'' erzeugen eine Fläche II. O. F_1 , die α zweimal schneidet. Construirt man zu den beiden Büscheln α' und α'' , welche nach einem solchen ständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. entsprechende Ebene durch α , so erkennt man, dass die drei entsprechenden Ebenen der drei Büschel durch α gehen. Jede Gerade α , welche mit einer Fläche II. O. F_1 ständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. hat, ist real oder conjugirt complexen Punkten, daher Secanten der R_3 .

4. Durch einen Punkt des Raumes, der nicht auf R_3 liegt, gibt es nur eine Secante einer R_3 , d. i. nur eine Gerade, die mit R_3 in einem reellen oder conjugirt complexen Punkte trifft. Secanten möglich, so hätte die Ebene dieser Secante mit R_3 ständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. im Widerspruche mit No. 1.

Jede Secante von R_3 bildet mit R_3 den ständigen Durchschnitt zweier Flächen II. O. Denn wenn α' Secante ist, so ist α, R_3 und ein Punkt P auf α' , der nicht auf R_3 liegt, bestimmte Fläche II. O. F_1 . Diese Fläche enthält α sowie die beiden Schnittpunkte mit R_3 enthält. Projicirt man F_2 auf F_1 von einem dazu projectiven α' projectiven die Geraden auf F_1 , α und ein dazu projectives, dessen Träger α'' auf α liegt, erzeugen F_1 , das erste und dritte erzeugen R_3 , treffen sich drei entsprechende Ebenen der drei Büschel.

Geraden auf F_2 . Entsprechende Ebenen der π durch gemeinsame Punkte von F_1 und F_2 , wenn ist A auf α gelegen, so entsprechen den π zwei verschiedene Ebenen des Büschels α . Die Fläche II. O., die R_3 und α' enthält, also der Durchschnitt diese Fläche und der Fläche F_1 , von II. O., die R_3 enthalten und nicht zu den Flächen F_1 und F_2 aus No. 1, und die durch α'' erzeugte Fläche), so ist die Gleichung F von der Form

$$\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \mu_3 F_3 = 0.$$

Beliebige Punkte des Raumes, so geht durch P diese Secanten und durch R_3 ist eine Fläche II. O. also ist durch R_3 und zwei beliebige Punkte eindeutig bestimmt. Sind nun $F_{11}, F_{21}, F_{31}, F_{12}, F_{22}, F_{32}$ für die Coordinaten von P an-

nehmen, so enthält die Fläche II. O.

$$2. \quad F = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \end{vmatrix} = 0$$

die Punkte P_1 und P_2 , sowie alle gemeinsamen Punkte von F_1, F_2 und F_3 , also die R_3 , und ist von der Form 1.

6. Durch einen Punkt F auf R_3 gehen unzählige Secanten der R_3 ; durch zwei derselben α und α' und durch die R_3 ist eine Fläche II. O. f bestimmt.

Die Fläche f ist ein Kegel; denn wäre f kein Kegel, so würde $\alpha\alpha'$ Tangentenebene von f , folglich die Tangente der Raumcurve in P auf $\alpha\alpha'$ gelegen sein; dies ist aber für keinen Punkt der Raumcurve der Fall, da sonst die Ebene $\alpha\alpha'$ ausser dem Punkte P und den zwei noch auf α und α' gelegenen Curvenpunkten noch den unendlich nahe bei P gelegenen Punkt der Curve mit derselben gemein haben würde. Wir erhalten somit: Eine R_3 wird von jedem ihrer Punkte aus durch einen Kegel II. O. projicirt.

Sind sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 einer R_3 gegeben, so ist damit auch der Kegel II. O. bestimmt, der die R_3 von einem dieser Punkte z. B. von 1 aus projicirt. Denn alsdann sind von diesem Kegel K_1 die fünf Mantellinien bekannt, die 1 mit den andern fünf Punkten verbinden, und durch fünf Mantellinien ist ein Kegel II. O. eindeutig bestimmt. Ebenso ist der Kegel K_2 bestimmt, der die R_3 von 2 aus projicirt. Beide Kegel haben ausser der Mantellinie 12 eine bestimmte R_3 gemein. Daher schliessen wir: Eine Raumcurve III. O. ist durch sechs Punkte bestimmt. Zugleich ist ersichtlich, wie eine R_3 aus sechs gegebenen Punkten linear construirt werden kann.

7. Legt man eine Ebene T durch eine Secante α (No. 1) einer R_3 , so schneidet diese die Fläche F_1 ausser in α noch in einer Geraden β , welche mit α nicht zu demselben Systeme gehört. Auf α liegen zwei Punkte der R_3 , welche real oder conjugirt complex sind; folglich liegt auf β der dritte immer reale Schnittpunkt der Ebene T mit der Curve R_3 . Wenn also die Fläche F die Raumcurve R_3 enthält, so haben alle Geraden auf F , die nicht Secanten von R_3 sind, mit R_3 einen realen Punkt gemein.

8. Wenn die Gerade β mit der Raumcurve R_3 nur einen Punkt P gemein hat, so erfüllen alle Secanten von R_3 , die β schneiden, eine

ger zweier Büschel zwei Tangenten σ und τ die Secante α der R_3 benutzt, welche die Tangenten σ und τ verbindet.

Ebenen (§ 10, No. 3) in den Punkten A und Büschels σ den Ebenen der Büschel α und τ , Punkte A unendlich nahen Punkte treffen; die Ebene die Tangente σ enthält, denn diese enthält die Tangente τ nahe bei A gelegenen Curvenpunkt; und im Büschel α die Ebene die Tangente τ enthält. Es entsprechen sich daher

$$\sigma\alpha \propto \tau\alpha.$$

Ebene des Büschels σ angesehen werden, welche R_3 in einem dem Punkte B unendlich nahen Punkte trifft; im Büschel α entspricht ihr daher die Ebene, welche die Tangente τ enthält und im Büschel τ die Schmiegungsebene T_3 . Es entsprechen sich also die drei Ebenen

$$\sigma\alpha \propto \tau\alpha \propto T_3.$$

Sind $T_1 = 0$ und $T_3 = 0$ die Gleichungen der Ebenen $\sigma\alpha$ und $\tau\alpha$, so kann man sich die Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 immer mit solchen Faktoren multiplicirt denken, dass die Gleichungen dreier entsprechenden Ebenen der drei projectiven Büschel σ, α, τ die Form haben

$$T = \lambda_1 T_0 - \lambda_2 T_1 = 0, \quad T' = \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 = 0, \quad T'' = \lambda_1 T_2 - \lambda_2 T_3 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch λ_1 und bezeichnet den Quotienten $\lambda_2 : \lambda_1$ mit λ , so gehen diese Gleichungen über in

$$1. \quad T = T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad T' = T_1 - \lambda T_2 = 0, \quad T'' = T_2 - \lambda T_3 = 0.$$

Diese drei linearen Gleichungen für x, y, z enthalten einen veränderlichen Parameter λ , und zwar erscheint λ als die einzige unabhängige Veränderliche. Durch λ kann man die Coordinaten jedes Curvenpunktes ausdrücken, indem man das System 1. nach x, y, z auflöst.

Die Auflösungen eines Systems von drei linearen Gleichungen sind bekanntlich Quotienten, welche als gemeinsamen Nenner die Determinante der Gleichungen und als Zähler Determinanten dritten Grades in den Coefficienten der Gleichungen haben. Die Coefficienten der Gleichungen 1. sind lineare Functionen von λ ; die Lösungen des Systems 1. haben daher die Form

$$2. \quad \begin{aligned} x &= (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3) : (d_0 + d_1 \lambda + d_2 \lambda^2 + d_3 \lambda^3), \\ y &= (b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda^3) : (d_0 + d_1 \lambda + d_2 \lambda^2 + d_3 \lambda^3), \\ z &= (c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda^3) : (d_0 + d_1 \lambda + d_2 \lambda^2 + d_3 \lambda^3). \end{aligned}$$

Die Coordinaten der Punkte eines R_3 lassen sich daher als gebrochene rationale Functionen eines Parameters λ darstellen, und zwar in der Form

$$3. \quad x = \frac{\varphi_0}{\varphi_3}, \quad y = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

wobei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ganze Functionen dritten Grades von λ sind.

Setzt man die Werthe 2. in die Gleichung eines Curvenpunktes ein

$$xu + yv + zw - 1 = 0,$$

so erhält man, nachdem man mit φ_3 multiplicirt hat

$$\varphi_0 u + \varphi_1 v + \varphi_2 w - \varphi_3 = 0.$$

Ordnet man dies nach steigenden Potenzen von λ , so entsteht

$$4. \quad A_0 + \lambda \cdot A_1 + \lambda^2 \cdot A_2 + \lambda^3 \cdot A_3 = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} & a_0 u + b_0 v + c_0 w \\ & a_1 u + b_1 v + c_1 w \\ & 0, A_1 = 0, A_2 = \\ & 1. \end{aligned}$$

schliesst leicht, da

$A_0 + \lambda \cdot$
, wenn λ alle
II. O. erfüllen.
der Gleichung 1
lineare Gleichun
e demgemäss, so
 $(a_1 -$
 $(b_1 -$
 $(c_1 -$
minante dieses S

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 - \\ b_1 - \\ c_1 - \end{vmatrix}$$

allt in ein Polyn
hwinden, welche
diesen Determina
bleiben mithin r
 $= (a_1 b_1 c_1) -$
er (p, q, r) die I

$$(p, q$$

· Weise reducere
t

$$\lambda^2 = \frac{T_0}{T_3}$$

$- (a_0 b_1 c_1) +$
 $- (a_1 b_0 c_1) +$
 $- (a_2 b_1 c_0) +$
ungen 3. ergebe

ichungen
 $- \lambda T_1 = 0,$
i Gleichungen N
genschaft, dass d
ichen Parameter
nd mit den Keg
 A_1, A_2 lineare
unkte, deren Gle

Der barycentrische C

ist für die Coordinaten jedes Punktes

$$x = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

von λ sind.

der Form enthalten sind

$$A_2 = 0$$

$A_1 A_2$; denn die Coordinaten dieser g von λ .

Coordinatensystem, dessen XY -Ebene setzen dann $w = 0$; hierdurch mag

$$B_2 = 0.$$

Bestimmung eines Punktes unserer Curve System XOY . Aus dieser Gleichung

$$= \frac{b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2}{c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2}.$$

als lineare Gleichungen in Bezug auf λ der Form

$$= T_0 : T_2,$$

Coordinaten x und y sind. Aus diesen

$$T_1.$$

durch die erste derselben und durch 4. Gleichung behält

$$- \lambda T_2 = 0.$$

die der Gleichung 2. entspringen, die einer projectiven Büschel sind; die folgt sich durch Elimination von λ aus $T_1^2 = 0$. Aus derselben ist ersichtlich, dass die Punkte berühren, in denen sie

III. O. zwei Punkte A und B gewählt, T_2 bestimmt; die Functionen T_0, T_1 , einen constanten Faktor bestimmt. T_2 schneidet sich in demselben

die Ebenen

$$1. \quad a_0 T_0 - a_1 T_1 = 0, \quad a_1 T_1 - a_2 T_2 = 0, \quad a_2 T_2 - a_3 T_3 = 0,$$

so sind die Verhältnisse der Coefficienten a_1, a_2, a_3 bestimmt, und die Punkte der Curve werden für jedes λ als Schnittpunkte der drei Ebenen erhalten

$$2. \quad T_0 - \lambda \cdot a_1 T_1 = 0, \quad a_1 T_1 - \lambda \cdot a_2 T_2 = 0, \quad a_2 T_2 - \lambda \cdot a_3 T_3 = 0.$$

Hieraus ist ersichtlich: Eine Raumcurve III. O. ist durch zwei Punkte, die Tangenten und die Osculationsebenen in diesen Punkten, sowie durch einen dritten Punkt eindeutig bestimmt.

Der Punkt A , in welchem sich die Ebenen T_0, T_1, T_2 schneiden, dessen

*) Möbius, Der baryc. Calcul, 5. Kapitel. CLEBSCH, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Crelles Journal, Bd. 64, S. 43. 1865.

Schmiegungebene
von λ reduciren si

Dividirt man
sich die Gleichung
dessen Schmiegungebene
kann daher drei
0, ∞ , 1 zuerthe
der Curve einde

Wenn wir vora
werthe 0, ∞ , 1 zu
durch die ihnen
Punkten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

14. Die Gleichung

lässt sich schreiben

Sie enthält da

folglich auch den
 $T_0 -$
Da man aber

so schliesst man, ϵ
die Ebene der Punkte
Die Ebenengleichung

kann man in den
 $\mathfrak{L}_2 = T_1 - \lambda_1 \mathfrak{L}_1$
und schliesst daraus
die Ebene B, λ_1, \dots
Der Verein

1.

charakterisirt sich
Ist λ_2 von λ_1
 $\lambda_1 \lambda_2$ Tangente der
Falle $\lambda_2 = \lambda_1$ zu sein
im Punkte λ

2.

15. Die Ebenengleichung

1. $\mathfrak{L} = T_0 - (\lambda_1 \mathfrak{L}_1 + \lambda_2 \mathfrak{L}_2)$
lässt folgende Anordnungen zu
2. $\mathfrak{L} = T_0 - (\lambda_1 \mathfrak{L}_1 + \lambda_2 \mathfrak{L}_2)$
3. $\mathfrak{L} = T_0 - (\lambda_1 \mathfrak{L}_1 + \lambda_2 \mathfrak{L}_2)$

Die Gleichung
geht durch den Schwerpunkt
durch λ_1 und λ_2 gehen
 $\mathfrak{L} = T_0 - (\lambda_1 \mathfrak{L}_1 + \lambda_2 \mathfrak{L}_2)$

i Curvenpunkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Tangente des Curven-
, geht aus 4. hervor, wenn

$T_2 - \lambda_1^2 \lambda_2 T_3 = 0$.
hält man die Gleichung der
man in 5. $\lambda_3 = \lambda_1$ zu setzen,
sebene im Punkte λ
 $T_3 = 0$.

$c + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1$,
 $c + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2$,
iene zu
 $\delta_1 \lambda + 3\delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3$,
 $\delta_1 \lambda + 3\delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3$,
 $\delta_1 \lambda + 3\delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3$.
e sind also gebrochene
rameters λ .
ner, und betrachtet die dann
der drei Grössen $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$,

$\lambda^3 - (\alpha_3 - \delta_3 \mu) \lambda^2 = 0$,
 $\lambda^3 - (\beta_3 - \delta_3 \nu) \lambda^2 = 0$,
 $\lambda^3 - (\gamma_3 - \delta_3 w) \lambda^2 = 0$.
eme No. 11, 1 schliesst man,
quotienten linearer Functionen
Form
 $\lambda = P_2 : P_3$,
 b_i ,
des Systems sind

nachheriger Beseitigung der

$$P_3 - \lambda P_2 = 0.$$

$\mathfrak{P}'' = P_2 - \lambda P_3 = 0$
hen, welche zu Trägern die

nde Punkte \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' gehen,
aus den Gleichungen $\mathfrak{P} = 0$
ich

ungen $\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{P}'' = 0$
0.

kelbare Flächen dritter

projectiven Reihen α'
 r \mathfrak{R}_3 eingeschrieben
 ächen \mathfrak{F}_2 und \mathfrak{F}_3 da
 ' und α'' mit \mathfrak{R}_3 eine

are Fläche III. Kl.
 te dreier projecti
 en sind die Tr
 nmen eine vollst

Umgekehrt schliess
 chenden Punkte
 ine \mathfrak{R}_3 .

der \mathfrak{R}_3 , welche zu
 els, welche entsprec
 en projectiven Reihe
 ir schliessen daher:
 en eine vollständige
 n zwei Ebenen de
 ie in zwei Ebenen

einen nur eine Li
 enen einer \mathfrak{R}_3 ist
 nsammen eine al

Ω ., die nicht zu den
 wird die Gleichung
 halten

$$\mu_3 \mathfrak{F}_3 = 0.$$

nicht berühren, entl
 iden Linien und dur
 st durch eine \mathfrak{R}_3 un

II. Kl. eindeutig be
 en $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ für di

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{F}_1 \\ \mathfrak{F}_2 \\ \mathfrak{F}_3 \end{vmatrix} = 0$$

den Ebenen T_1 ur
 eichung ist von der
 sen wir: Die Lin
 er \mathfrak{R}_3 liegen, best
 in welchen eine
 umhüllen einen K
 er \mathfrak{R}_3 ist die Grenz
 von den fünf andern
 elebene hat und vor
 allen Ebenen der \mathfrak{R}
 ein. Dies zeigt: Ein
 nen bestimmt.

der Schnitt P_1 von α und σ , und auf τ der Schn

Die Ebene von \mathfrak{R}_3 , welche der Ebene αP_3
 P_1 , α in P_2 und τ in P_3 , also entsprechen sich :

Die linearen Functionen P_0, P_1, P_2, P_3 lasse
Zahlen multipliciren, dass die Gleichungen entspre
 $P_0 P_1, P_1 P_2, P_2 P_3$ die Form haben

$$P = \mu_1 P_0 - \mu_2 P_1 = 0, \quad P' = \mu_1 P_1 - \mu_2 P_2 =$$

Dividirt man durch μ_1 und setzt $\mu_2 : \mu_1 = 0$,

$$1. \quad P = P_0 - \mu P_1 = 0, \quad P' = P_1 - \mu P_2 =$$

Jede Ebene, deren Coordinaten diesen drei
Werth der veränderlichen Zahl genügen, berührt
selben u, v, w durch μ ausdrücken und erhält s
Ebene der \mathfrak{R}_3 als rationale Functionen ei
lösungen des Systems 1. haben die Form

$$2. \quad \begin{aligned} u &= (\alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \alpha_3 \mu^3) : (\delta_0 + \\ v &= (\beta_0 + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu^2 + \beta_3 \mu^3) : (\delta_0 + \\ w &= (\gamma_0 + \gamma_1 \mu + \gamma_2 \mu^2 + \gamma_3 \mu^3) : (\delta_0 + \end{aligned}$$

Setzt man die Werthe 2. in die Gleichung ein

$$ux + vy + wz = 1 =$$

so erhält man nach Beseitigung des Nenners eine

$$A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \mu^3$$

worin A_0, A_1, A_2, A_3 lineare Functionen in Punl

11. B. Ebenso, wie in No. 11, schliesst man
deren Gleichungen aus

$$A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \mu^3$$

erhalten werden, indem man dem Paramet
bis $+\infty$ ertheilt, umhüllen eine abwickelb

12. B. Die Eigenschaft, dass die Coordinaten
Functionen eines Parameters ausdrücken lassen,
III. Kl. mit der Geraden und dem Kegel II. O. g
Gleichungen dreier Ebenen, so geht jede Ebene, der

$$1. \quad A_0 + \mu A_1 = 0$$

durch die Gerade $A_0 A_1$.

Jede Ebene, deren Gleichung die Form hat

$$2. \quad A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 =$$

geht durch den Schnittpunkt der Ebenen $A_0 A_1$,
von T auf der XY -Ebene entsteht, wenn man in
dann eine Gleichung von der Form

$$3. \quad B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 =$$

worin B_0, B_1, B_2 lineare Functionen von x und
erhält man für die Coordinaten der Spur Ausdrück

$$u = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2}{\gamma_0 + \gamma_1 \mu + \gamma_2 \mu^2}, \quad v = \frac{\beta_0}{\gamma_0}$$

löst man diese Gleichungen nach μ und μ^2 , so er

ichen

ngen

llt v

$P_1 P_2$)

n sie

nen

ffen,

hnitt

le, di

er mi

zen v

noch

haben

e R_1

al is

rch e

dur

er re

ch fei

e Wu

oder

Wurzeln, oder eine reale und zwei conjugirt complexe Wurzeln, oder eine Curve drei getrennte reale, zwei vereinte und einen von diesen, oder drei vereinte reale, oder nur einen realen unendlich fernen Punkt als Tangenten der Curve, die sie in den unendlich fernen Punkten als Asymptoten der Curve bezeichnet. Giebt es drei reale unendlich ferne Punkte, so giebt es drei Asymptoten, die nicht unendlich fern sind; sind zwei unendlich ferne Punkte real und vereint, so hat die Curve eine unendlich ferne Tangente (unendlich ferne Asymptote), und eine andere Asymptote, die nicht unendlich fern ist; sind drei reale unendlich fern vereint, so ist die unendlich ferne Ebene Osculationsebene der Curve; ist ein realer unendlich ferner Punkt vorhanden, so hat die Curve nur einen unendlich fernen Punkt.

Hiernach zerfallen die Raumcurven III. O. in vier Gattungen, die ihren Gestaltsverhältnissen nach wesentlich verschieden sind:

1. Cubische Hyperbel, mit drei realen Asymptoten;

2. Cubische hyperbolische Parabel, mit einer realen Asymptote und einer unendlich fernen Tangente;

3. Cubische Parabel, mit einer unendlich fernen Osculationsebene;

4. Cubische Ellipse, mit einer realen und zwei imaginären Asymptoten.

19. Eine Raumcurve wird von einem Punkte P_0 aus projectirt.

Die beiden Punkte der Fläche II. O. $f = 0$, welche auf der Curve liegen, theilen die Strecke $P_0 P$ in Verhältnissen μ , welche durch die Gleichung

$$1. \quad f_0 + 2\mu(f_{10}'x_1 + f_{20}'x_2 + f_{30}'x_3 + f_{40}'x_4) + \mu^2(f_{11}''x_1^2 + 2f_{12}''x_1x_2 + 2f_{13}''x_1x_3 + 2f_{14}''x_1x_4 + f_{22}''x_2^2 + 2f_{23}''x_2x_3 + 2f_{24}''x_2x_4 + f_{33}''x_3^2 + 2f_{34}''x_3x_4 + f_{44}''x_4^2) = 0$$

chnung,

leger,

Lgl. Polytechnikum zu I

ung.

derlichen Grösse
n verschiedene
unction der V

Da y sich mit x ändert, so ist auch y eine veränderliche Grösse von y von den Werthen der Grösse x abhängen, so bezeichnen wir abhängige Veränderliche im Gegensatze zu der unabhängigen x .

Wir beschränken uns bis auf Weiteres darauf, Functionen zu betrachten.

Wenn man nur die Thatsache ausdrücken will, dass y eine Function von x ist, ohne die Art der Abhängigkeit anzugeben, so bedient man sich der Bezeichnung $y = f(x)$; verschiedene Functionen kann man durch verschiedene Buchstaben oder durch Indices unterscheiden $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Um den Werth anzudeuten, den die Function $f(x)$ für einen bestimmten Werth von x annimmt, setzt man diese Werthe hinter das Functionensymbol f an; demnach sind $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(\xi)$, $f(\eta)$, $f(a\xi)$ die Werthe, welche $f(x)$ annimmt, wenn man die Variable x durch die Werthe 0 , 1 , 2 , ..., ξ , 2ξ , $a\xi + b$ ersetzt.

2. Nimmt die Variable x um einen Betrag Δx zu, so nimmt die Function y um einen Betrag Δy zu, den wir mit Δy bezeichnen. Dann hat man also

$$y = f(x), \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Hieraus folgt durch Subtraction

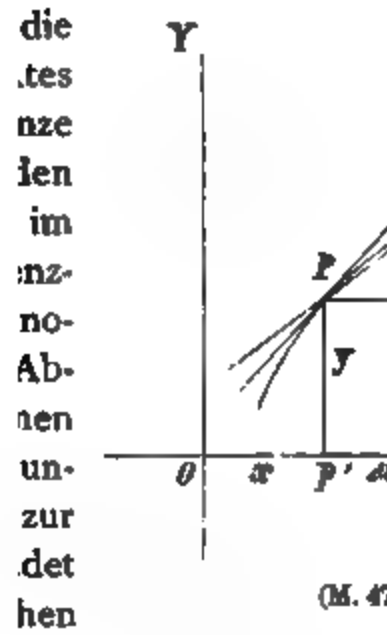
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Wenn Δx mehr und mehr abnimmt, und der Grenze Null nähert sich, so nähert sich im Allgemeinen auch Δy der Grenze Null. Sowohl Δx als auch Δy sind also einem unendlich kleinen Zuwachse Δx der Variable x proportional. Eine Function, die einem unendlich kleinen Zuwachse Δx der Variable x einen unendlich kleinen Zuwachs Δy der Function entgegengesetzt, heisst eine stetige Function von x .

^{*)} Δx ist hier ein einheitliches Zeichen; die Verwechselung mit dem Factor Δ ist nicht zu befürchten, da von einem solchen Factor n

ing.

$$= \tan QPP_1.$$



der Curve PP_1 im
t der Tangente PT

$$= \tan \epsilon$$

bezeichnet. Deutet
ersetzung der Buchst
kleinen Zuwachs von

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Differenzen der C

Punkte P_1 und P sind, haben wir in Δx und Δy die verschv
Differenzen der Coordinaten des dem Punkte P unendlich nahen
und des Punktes P vor uns; im Zusammenhange damit bezeichn
 Δy als das Differential von x , bez. von y , und demgemäss
Differentialquotienten von y . Aus der Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

leitet man die Gleichung ab

$$\Delta y = f'(x) \Delta x.$$

Nachdem man den Grenzwert

$$\lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

bestimmt hat, liefert diese Gleichung das Differential von y als
des Differentials der unabhängigen Variablen x .

Die Differentialrechnung hat zunächst die Aufgabe,
quotienten der Functionen zu ermitteln; hieran reihen sich danr
suchungen, sowie analytische und geometrische Anwendungen.

6. Ehe wir dazu übergehen können, die Differentialquotienten
aufzusuchen, haben wir einige Grenzwerte zu bestimmen, ur
Grundlage für die folgenden Untersuchungen zu gewinnen.

*) *limes*, die Grenze.

D W

$\frac{1}{2}$

+

...

.

nde

$\frac{1}{3-4}$

nd

n 2

äten

werden wir Mittel gewinnen, e bis zu jedem verlangten Genauigkeit leichter Mühe zu berechnen; wir werden dann finden, dass e stellen genau den Werth hat

$$e = 2,718281828459.$$

Ist m keine ganze Zahl, sondern zwischen den ganzen Zahlen gelegen, so dass

$$m = p + r,$$

wo r einen echten Bruch bezeichnet, so ist offenbar

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^m.$$

Diese Ungleichung lässt die Schreibweise zu

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+r} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1-(1-r)}$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\right]^{1+\frac{r}{p}} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left[\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1}\right]^{1-r}$$

Wächst m unendlich, so wächst auch p unendlich und die $(1-r):(p+1)$ convergiren gegen den Grenzwert Null; die Glieder convergiren daher gegen den Grenzwert e , folglich auch

Ist m eine negative Zahl, etwa $m = -n$, so hat man

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

Geht nun m zur Grenze $-\infty$, so wird $n = +\infty$; da nur zur Grenze Null übergeht, so sieht man, dass auch für einen n Werth von ∞ , — d. i. für jeden unendlichen Werth von ω die

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega = e.$$

ktionen.

$$=dx.$$

$$=-1;$$

$$=-dx.$$

$$\frac{x}{x}=a.$$

$$dx.$$

n $a+x$,
drei Fälle
alquotient

$$\frac{1}{(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dx}{x^3}.$$

bt sich fo

$$+\frac{\Delta x}{x})^n$$

C)

$$=m,$$

$$x^{m-1}dx.$$

$$:4)=4x^4$$

$$lx, \quad d\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\frac{x}{x},$$

$$=-\frac{d}{2\gamma}$$

$$:a^x.$$

$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

er Functionen.

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x}$$

man hierau

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x}$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \frac{\cos \frac{x+y}{2}}{1}$$

$$\frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2}}{\beta - \alpha}$$

$$\frac{1}{1 + \Delta x \cos x}$$

$$\tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

et man die

$$\frac{dx}{x^2}$$

nächst

also nach 1

$$\frac{dx}{\cos^2 x}$$

'x, so folgt

$$\frac{dx}{x} = - \frac{1}{\sin x}$$

hält

$$\frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

r ergibt sic

$$\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\sec x}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 x}$$

rc sin x vers

is eines Bo

folgt, dass

aum innehä

1 .

benen Sinus

ler Functionen

wird die Definition von $\text{Arc sin } x$ so erweitert werden, dass die Functi
eine Bedeutung hat.

und unentwickelt

und $\text{Arc cos } x$

ist das Vo

$$\text{arc cos } x = -$$

Unter Arc ta

jeden realen

reale Werthe der Function $\text{Arc tang } x$, und zwar unendlich mit $\text{Arc tang } x$ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen x gleich x ist, so dass also

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \text{arc tang } x \leq +\frac{1}{2}\pi,$$

so findet man alle möglichen Werthe von $\text{arc tang } x$ aus

$$\text{Arc tang } x = \text{arc tang } x + k\pi.$$

Aus $d \text{ tang } \varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ findet man

$$d\varphi = \cos^2 \varphi \cdot d \text{ tang } \varphi.$$

Setzt man nun $\text{tang } \varphi = x$, so ist $x = \text{Arc tang } \varphi$ und $\varphi = 1 : (1 + x^2)$. Daher hat man

$$d \text{ Arc tang } x = \frac{dx}{1 + x^2}, \quad \frac{d \text{ Arc tang } x}{dx} =$$

§ 3. Differentiation zusammengesetzter und unentwickelter Functionen.

1. Differentiation einer Summe und einer Differenz zweier Functionen von x , so ist

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \lim \frac{u + \Delta u \pm (v + \Delta v) - (u \pm v)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Daher ist

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}, \quad \text{oder} \quad d(u \pm v) = \left(\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \right) dx$$

2. Differentiation eines Polynoms. Ist

$$y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_n u_n$$

und bedeuten a_1, a_2, \dots, a_n constante Coefficienten, hi u_1, u_2, \dots, u_n Functionen von x , so ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{a_1(u_1 + \Delta u_1) + \dots + a_n(u_n + \Delta u_n) - (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n)}{\Delta x}$$

$$= \lim \left(a_1 \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + a_2 \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + \dots + a_n \frac{\Delta u_n}{\Delta x} \right).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \frac{du_1}{dx} + a_2 \frac{du_2}{dx} + a_3 \frac{du_3}{dx} + \dots + a_n \frac{du_n}{dx}$$

Oder

$$d(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_n u_n) = a_1 du_1 + a_2 du_2 + a_3 du_3 + \dots + a_n du_n$$

Hiernach ist z. B. (vergl. § 2, No. 4)

$$d(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n) = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx$$

dean $d(1) = 0, \quad dx = dx, \quad dx^2 = 2x dx, \quad dx^3 = 3x^2 dx, \dots$

3. Differentiation eines Produktes.

$$\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x},$$

$$\frac{c}{x^2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (dx +$$

$$\frac{dx}{+x^2} = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$) dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\cdot dx - x d\sqrt{a+}$$

ist

$$\sqrt{a+bx^2} \cdot dx - x d\sqrt{a+bx^2} = \left(\sqrt{a+bx^2} - \frac{bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} \right) dx$$

Also folgt

$$d \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{a dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

H. Differential von $x \ln x - x$.

$$d(x \ln x - x) = x d \ln x + \ln x \cdot dx - dx$$

$$= x \cdot \frac{dx}{x} + \ln x dx - dx; \text{ folglich ist}$$

$$d(x \ln x - x) = \ln x \cdot dx.$$

I. Differential von $\ln \sin x$ und $\ln \cos x$.

$$d \ln \sin x = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} dx, \text{ d. i.}$$

$$d \ln \sin x = \cot x \cdot dx.$$

$$d \ln \cos x = \frac{d \cos x}{\cos x} = - \tan x dx.$$

K. Differential von $\ln \tan x$.

$$d \ln \tan x = \frac{d \tan x}{\tan x} = \frac{dx}{\cos^2 x \tan x} = \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

$$d \ln \tan x = \frac{2 dx}{\sin 2x}.$$

Setzt man $2x = u$, so ist $2dx = du$, und man erhält

$$d \ln \tan \frac{u}{2} = \frac{du}{\sin u}.$$

L. Differential von $\ln \cot x$.

Da $\ln \cot x = \ln(1 : \tan x) = - \ln \tan x$, so ist auch

ln.

Fu

it

$\frac{y}{c} =$

$\gamma +$

$+ 20$

folglich $\frac{dy}{dx} = - \frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}.$

C. Für $F(x, y) = y - x \sin y = 0$ ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - x \cos y,$$

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{1 - x \cos y}.$

D. Aus $F(x, y) = x^y - y^x$ folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1} - y^x \ln y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^y \ln x - xy^{x-1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y}{x^y \ln x}$$

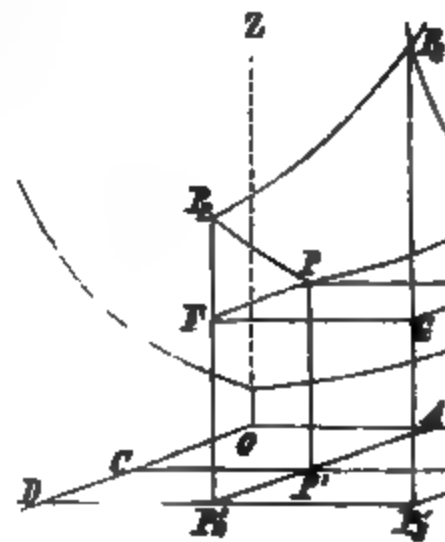
§ 4. Differential einer Function mehrerer Variabeln

1. Unter den Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln sind diejenigen zweier Variabeln am leichtesten zugänglich, weil sie am anschaulich gemacht werden können. Sind x, y zwei unabhängig ist z die abhängige, so dass $z = f(x, y)$, so lehrt die analytische Geometrie, die Variabeln x und y als Coordinaten eines Punktes P' in der Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems zu betrachten, parallel der Z -Achse gemessene Ordinate eines zum Grundriss P' gehörenden Raumpunktes P . Durchlaufen nun x und y alle möglichen realen Werthe, so beschreibt P' die ganze Horizontalebene, und P beschreibt eine durch die Gleichung $z = f(x, y)$ charakterisirte Fläche, durch welche die Function $f(x, y)$ geometrisch dargestellt wird.

Es sei P ein Punkt der Fläche $z = f(x, y)$, und $OA = x, AP' = y, P'P = z$. Wächst x um $\Delta x = AB$, während y unverändert bleibt, so bewegt sich P' parallel der P_1P' , und man hat

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{EP_1}{PE} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Der Grenzwert dieses Differenzquotienten $\Delta z : \Delta x$, der unter der Voraussetzung gebildet wird, dass y dabei als constant gilt, ist der partialquotient von z in Bezug auf x (oder kürzer »von z nach x «).



(M. 474.)

trigonometrische
Punkte P mit de
Aendert sich
eine Bahn auf d
wenn man die je

Der Grenzw
auf y ; er ist die
Curve PP_2 in P
Aendern sich
und P nach P_2'
bewegt sich der

Weg, den er dabei auf der Fläche beschreibt, hängt davon ab, in welcher Weise Δx und Δy abnehmen, und ist unbestimmt, so lange über die Art der Abnahme von Δx und Δy nichts Näheres bekannt ist. Wenn z. B. zuerst Δy verschwindet und dann Δx , so geht der Punkt von P_2 parallel zur YZ -Ebene nach P dann parallel der XZ -Ebene nach P ; verschwindet zuerst Δx und dann Δy geht der Punkt von P_2 zunächst nach P_2 und dann nach P ; nehmen Δx und Δy zugleich ab, so liegt der Weg des Punktes im Innern des Curvenvierecks $PP_1P_2P_2'$.

Um einen Weg festzusetzen, auf welchem P_2 nach P gelangen soll, können wir den Weg vorschreiben, den die Horizontalprojection durchlaufen soll; geschieht, indem wir y als eine gegebene Function von x betrachten. Setzt man $y = \varphi(x)$, so erscheint $z = f(x, y)$ als eine Function von x allein und es

$$\frac{dz}{dx} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Hierfür kann man wie in § 4, No. 9 setzen

$$\lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dies ergibt

$$1. \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Durch Multiplication mit dx kann man dies ersetzen durch

$$2. \quad dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy.$$

Man bezeichnet die Ausdrücke

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy$$

als die partialen Differentiale von z ; es sind dies die unendlich kleinen Aenderungen, welche z erfährt, wenn nur x oder nur y sich um einen wenig ändern. Der Ausdruck dz , der die verschwindend kleine Aenderung angiebt, welche durch verschwindend kleine Aenderungen beider Variablen erzeugt wird, heisst das totale Differential von z . Man erhält somit
Satz: Das totale Differential einer Function zweier Variablen ist die Summe ihrer partialen Differentiale.

Der Sinn der Gleichung

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

ist folgender: Je näher die Veränderungen Δx und Δy der Grenze Null kon-

rerer Variabeln.

ung von x m

gehöriger V

$$dy) : dx : dy.$$

Variabeln x_1 ,

man zunächst x_3 als Function von x_2 betrachten und nun r
gehenden das totale Differential von y finden. Richtet man
so ein, dass die Art des Zusammenhanges von x_2 und x_3 in
Ausdruck findet, so gelten sie unabhängig von jeder Art dieses
gelten also ohne Rücksicht auf jede Abhängigkeit von x_1 ,
nichts anderes sagen will, als dass sie für jede mögliche Abl
haben).

Denken wir uns x_3 als Function von x_2 , und demgemäss
ersetzt, und bezeichnen das Resultat dieser Substitution mit (\mathcal{J})

$$dy = \frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_2} dx_2.$$

Auf den partialen Differentialquotienten von y nach x_1 k
fluss, ob man sich x_3 mit x_2 verbunden denkt oder nicht
Differentiation beide Grössen als Constante betrachtet werden;

$$\frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Für $\frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_2}$ ergibt sich durch Anwendung der Formel (No.

$$\frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_2}.$$

Setzt man diesen Werth in 1. ein und beseitigt den Divisor

$$1. \quad df(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

Nimmt man an, die Formel

$$df(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots$$

sei für eine bestimmte Zahl n bewiesen, so gilt auch die Form

$$2. \quad df(x_1 \dots x_n, x_{n+1}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1}$$

Denkt man sich bei einer Function von $(n+1)$ Variab
 x_{n+1} abhängig von x_n und ersetzt dementsprechend x_{n+1} in der
 x_n , so erhalte man hierdurch die Function (\mathcal{J}). Man hat dann

$$3. \quad df = \frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_n} dx_n$$

Für die partialen Differentiationen nach $x_1, x_2, x_3 \dots$
gültig, ob x_n und x_{n+1} abhängig von einander sind oder nicht
hier überall (\mathcal{J}) durch f ersetzen. Für den letzten Differential
erhält man nach No. 1, 1

$$\frac{\partial(\mathcal{J})}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{dx_{n+1}}{dx_n}.$$

4.

Var
gilt,

und

so l

man

eine

so l
Vari
Funct
ergie

gleich

so l
Vari

Gleich

1.

$$\left. \begin{array}{l} f_3 \\ \varphi_3 \\ \psi_3 \end{array} \right| \begin{array}{l} + a_{23}x_3, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \\ + b_{23}x_3, b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{33}x_3 \\ + c_{23}x_3, c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3 \end{array} \Bigg|$$

ug auf die veränderlichen x_1, x_2, x_3 .
t von einander abhängen, so ver-
bestimmte Werthe von x_1, x_2, x_3 ,
Ort dieser Punkte ist die durch die
rdnung. Für jeden Punkt dieser
Kegelschnitte $f = 0, \varphi = 0, \psi = 0$
r Polaren für den Punkt x_1, x_2, x_3

$\xi_3 = 0, \psi_1 \xi_1 + \psi_2 \xi_2 + \psi_3 \xi_3 = 0$;
für, dass diese Geraden ein Büschel
es Punktes der Ebene in Bezug auf
verschwindet f für die Coordinaten

tisch verschwindet, und nicht zwei
, bilden die Polaren der drei Kegel-
el. Sind nun r_1, r_2, r_3 reale oder
ichungen $f = 0, \varphi = 0$ genügen,

(die Coordinaten eines realen oder imaginären Schnittpunkts dieser beiden
Kegelschnitte), und setzt man diese Werthe in $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$
ein, so ist (Anal. Geom. d. Eb. § 13, No. 2, 5)

$$\begin{aligned} f_1 r_1 + f_2 r_2 + f_3 r_3 &= \frac{1}{2} f(r_1, r_2, r_3) = 0, \\ \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 + \varphi_3 r_3 &= \frac{1}{2} \varphi(r_1, r_2, r_3) = 0. \end{aligned}$$

Folglich geht auch die Polare von r_1, r_2, r_3 in Bezug auf $\psi = 0$ durch
 r_1, r_2, r_3 , so ist also auch

$$\psi_1 r_1 + \psi_2 r_2 + \psi_3 r_3 = 0.$$

Da nun

$$\psi_1 r_1 + \psi_2 r_2 + \psi_3 r_3 = \frac{1}{2} \psi(r_1, r_2, r_3),$$

so folgt, dass r_1, r_2, r_3 der Gleichung $\psi = 0$ genügen. Der Kegelschnitt
 $\psi = 0$ geht daher durch die vier realen oder imaginären Schnittpunkte der
Kegelschnitte $f = 0$ und $\varphi = 0$; folglich (Anal. Geomet. d. Eb. § 14) bilden
die drei Kegelschnitte ein Büschel, d. h. es giebt zwei von den Coordinaten
unabhängige Zahlen λ und μ , durch welche die Identität hergestellt wird

$$\psi = \lambda f + \mu \varphi,$$

in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satze in No. 5.

10. Wie bei homogenen quadratischen Functionen dreier Variabeln, so sind
auch bei vier Variabeln die in der analytischen Geometrie des Raumes mehrfach
verwendeten abgeleiteten Functionen die halben partialen Differentialquotienten
der Function nach den Coordinaten. Ist

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 \\ + 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2, \end{aligned}$$

« sind die abgeleiteten Functionen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}$$

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}$$

Multipliziert man dieselben der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 und addiert, so erhält man die Identität

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = f$$

Ebenso gilt für drei Variable

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 = f$$

Diese beiden Formeln, von denen die zweite im allgemeinen Gebrauch gemacht worden ist, können als Spezialfälle des Satzes über homogene Functionen betrachtet werden.

Eine ganze algebraische Function ist die Summe von Gliedern, deren jedes die Form

$$Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$$

hat, worin A ein constanter Faktor ist, und $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Exponenten bedeuten, doch so, daß die Summe der Exponenten in jedem Gliede dem Grade der Function gleich ist. Die Function ist homogen, wenn also

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = n$$

Setzt man zur Abkürzung

$$v = Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$$

so erhält man

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \alpha \cdot Ax_1^{\alpha-1} x_2^\beta x_3^\gamma \dots$$

Ebenso ergeben sich

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} x_2 = \beta v, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3} x_3 = \gamma v$$

Hieraus erhält man durch Addition

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_3} x_3 + \dots = v$$

Wendet man diese Formel auf eine Summe u von k solchen Gliedern v_1, v_2, \dots, v_k an, so erhält man

$$u = v_1 + v_2 + \dots + v_k$$

und beachtet, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_k} x_k = u$$

Hieraus folgt EULER's Fundamentalsatz

c und Tangentialpunkt ebener Curven.

$$c^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \text{ folgt}$$

$$^2 y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y = 2(a^2 - b^2) \\ = -\frac{b^2}{c^2} y.$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{b}{c^2 v}.$$

und addirt, so erhält man sch

Evolutengleichung in der Form

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = c^4.$$

Beseitigt man die Nenner, so erkennt man, dass sie vom vierte in Uebereinstimmung mit No. 10.

Für die Cycloide haben wir die Formeln im vorigen Abschnitt gestalten, dass sie dem Falle entsprechen, wenn x und y als Functionen von t gegeben sind. Nehmen wir die Normalengleichung zur Form No. 2, 4 und ersetzen y' durch $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$, so erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} (\xi - x) + \frac{dy}{dt} (\eta - y) = 0.$$

Es ist daher

$$u = \frac{dx}{dt} : \left(\frac{dx}{dt} x + \frac{dy}{dt} y \right), \quad v = \frac{dy}{dt} : \left(\frac{dx}{dt} x + \frac{dy}{dt} y \right),$$

und man erhält somit u und v durch t ausgedrückt. Die Evolute ist die Resultante dieser Gleichungen in Bezug auf t .

Aus den Formeln in No. 6 ergibt sich für die Cycloide

$$\frac{dx}{dt} x + \frac{dy}{dt} y = xy + aty - xy = aty,$$

und daher

$$1. \quad u = \frac{1}{at}, \quad v = \frac{\sin t}{at(1 - \cos t)} = \frac{1}{at \tan \frac{1}{2}t}.$$

Die Gleichung der Evolute folgt hieraus zu

$$2. \quad u - v \tan \frac{1}{2at} = 0, \quad \text{oder} \quad 2au \cdot \arctan \frac{u}{v} = 1$$

Aus der Gleichung der Cycloidentangente

$$\frac{dy}{dt} (\xi - x) - \frac{dx}{dt} (\eta - y) = 0$$

folgen die Coordinaten der Tangente

$$u = \frac{dy}{dt} : \left(\frac{dy}{dt} x - \frac{dx}{dt} y \right), \quad v = -\frac{dx}{dt} : \left(\frac{dy}{dt} x - \frac{dx}{dt} y \right)$$

Da nun

$$\frac{dy}{dt} x - \frac{dx}{dt} y = a^2 (t \sin t - \sin^2 t - 1 + 2 \cos t - \cos^2 t) \\ = a^2 (t \sin t - 2 + 2 \cos t),$$

so ergibt sich

$$u = \frac{\sin t}{aM}, \quad v = \frac{\cos t - 1}{aM}, \quad M = t \sin t - 2 + 2 \cos t$$

Verschiebt man die Coordinatenachsen und wählt den Scheitel \wedge Nullpunkte, so erhält man die Coordinaten U und V der Tangentensysteme aus u und v durch die Formeln (Anal. Geom. der Ebene §

wobei α und β c

Da nun
 $1 - a\pi u$
 so erhält man

$$U =$$

Setzt man t

Vergleicht m
 der Cycloide
 parallel verschob
 achse und um —

12. Fusspu
 in Bezug auf ein
 projectionen des
 Coordinatenachse

die Gleichung de
 der Geraden $u, 1$

für den Winkel, 1

Der Endpunct
 sind

$$\xi =$$

Hieraus folgt

Setzt man d
 die Bedingung, d
 Curve normal zu
 Fusspunktcurve;

1.

So ist z. B. 1

Daher hat c
 Ellipsentangenten

Einen Punkt
 legenen Punkt d
 Curven bezeichne
 selben lässt sich
 einfacher Weise c1

entialpunkt ebener Curven

Coordinaten der verbu

$$-y) = 0$$

Normalen zur Tange
0.

it man

$$= 0, \quad \text{oder}$$

$$+ \eta y.$$

s

$$d\xi + \eta dy + y d\eta.$$

so giebt die vorige G

$$d\xi + y d\eta.$$

$$\frac{x}{2}$$

$$-\frac{y}{2}.$$

$$-\frac{y}{2}$$

$$\frac{y}{2} : \left(\xi - \frac{x}{2} \right).$$

den Normalen einer Curve von der Curve aus nach derselben Seite hin eine gegebene Strecke ab, so bilden die Endpunkte eine neue Curve, die als Parallelcurve der gegebenen Curve bezeichnet wird.

Der Winkel λ , den die Normale der Curve $F(x, y) = 0$ im Punkte x, y mit der Abscissenachse bildet, ergibt sich aus

$$\cos \lambda = -\frac{dy}{ds} = -\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \sin \lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Hierbei ist in beiden Formeln derselbe Werth der Wurzel zu

Die Coordinaten ξ, η des Punktes Π , den man erhält, wenn die Normale die Strecke l abschneidet, sind daher

$$\xi = x - l \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \eta = y + l \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Die Gleichung der Parallelcurve ergibt sich, indem man aus d. und der Gleichung $F(x, y) = 0$ die Coordinaten x, y eliminirt, um die Gleichung der Parallelcurve im Punkte Π zu erhalten, siehe Gleichungen 2.

$$\xi = x + l \cos \lambda, \quad \eta = y + l \sin \lambda$$

und differenzieren; wir erhalten

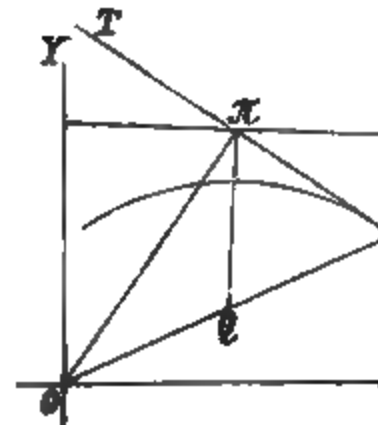
$$d\xi = dx - l \sin \lambda d\lambda, \quad d\eta = dy + l \cos \lambda d\lambda.$$

Hieraus folgt weiter

$$\cos \lambda d\xi + \sin \lambda d\eta = \cos \lambda dx + \sin \lambda dy.$$

Aus 1. ergibt sich $\cos \lambda dx + \sin \lambda dy = 0$; daher ist

$$\cos \lambda d\xi + \sin \lambda d\eta = 0,$$



(M. 479.)

folglich

Die Tangente der Pa
Tangente der gegebenen C

Man kann daher die Paralle
definiren, die von den Geraden
benen Curve parallel sind und

14. Confocale Kegelsch

$$1. \quad \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} = 1$$

hervorgehen, wenn man μ alle
punkte; denn es ist

$$a^2 + \mu$$

Man bezeichnet sie daher :

Die Gleichung des Kegelsc

$$2. \quad \frac{(a^2 + \mu)u^2}{a^2 u^2 + b^2 u^2} + \frac{(b^2 + \mu)v^2}{b^2 v^2 + a^2 v^2} = 1$$

Die linke Seite der Gleich
 $a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1$ und $u^2 + v^2$
focalen Kegelschnitte mit gege
schnittschaar.

Setzt man in 2. nach einan
besondere Kegelschnitte der Sch

$$3. \quad (a^2 - b^2)u^2 = 1$$

Aus 3. folgt $u = \pm 1 : c$;
Brennpunkte.

Aus 4. ergibt sich $v^2 =$
imaginäre Punkte auf der Ordi
imaginären Brennpunkte.

Die Kegelschnitte der Scha
Ebene gehen, erhält man, indem

$$5. \quad \frac{\xi^2}{a^2 + \mu} + \frac{\eta^2}{b^2 + \mu} = 1$$

Beseitigt man die Nenner, s

$$\xi^2(b^2 + \mu) + \eta^2(a^2 + \mu) = (a^2 + \mu)(b^2 + \mu)$$

Ersetzt man in dieser qua
 $- a^2, - b^2, + \infty$, so erhält

$$\xi^2(b^2 - a^2) + \eta^2(a^2 - b^2) = 0$$

Der erste Werth ist negativ
die Gleichung 6. immer zwei re
und $- b^2$ liegt, während die an
Kegelschnitt 1. eine Ellipse, für
Ebene gehen daher zwei Ke
eine ist eine Ellipse, der an

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\xi^2}{a^2 + \mu_0} + \frac{\eta^2}{b^2 + \mu_0} = 1$$

folgt durch Subtraction und nach
Faktor $\mu_0 - \mu_1$ die Gleichung

$$6. \quad \frac{\xi^2}{(a^2 + \mu_0)(a^2 + \mu_1)} + \frac{\eta^2}{(b^2 + \mu_0)(b^2 + \mu_1)} = 0.$$

Bilden die durch Π gelegten Tangenten der beiden durch Π gehenden Kegelschnitte der Schaar mit der Abscissenachse die Winkel φ_0 und φ_1 , so ist

$$\operatorname{tang} \varphi_0 = -\frac{\xi(b^2 + \mu_0)}{\eta(a^2 + \mu_0)}, \quad \operatorname{tang} \varphi_1 = -\frac{\xi(b^2 + \mu_1)}{\eta(a^2 + \mu_1)}.$$

Daher hat man

$$\operatorname{tang} \varphi_0 \operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\xi^2(b^2 + \mu_0)(b^2 + \mu_1)}{\eta^2(a^2 + \mu_0)(a^2 + \mu_1)},$$

also mit Rücksicht auf 6.

$$7. \quad \operatorname{tang} \varphi_0 \operatorname{tang} \varphi_1 = -1.$$

Dies ergibt: Je zwei Kegelschnitte einer confocalen Schaar schneiden sich unter rechten Winkeln, wenn man unter dem Winkel, unter dem sich zwei Curven schneiden, den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkte versteht. Zugleich sieht man, dass immer nur zwei ungleichartige Curven der Schaar sich in realen Punkten schneiden, nicht aber zwei confocale Ellipsen oder zwei confocale Hyperbeln.

15. Wir fragen nach den Curven $\eta = \varphi(x)$, die für dieselbe Abscisse x gleiche oder entgegengesetzt gleiche Subnormale oder Subtangente haben, wie eine gegebene Curve $y = f(x)$.

Sollen die Subnormalen gleich oder entgegengesetzt gleich sein, so hat man die Beziehung

$$1. \quad \eta \frac{d\eta}{dx} = \pm y \frac{dy}{dx},$$

aus welcher folgt

$$2. \quad 2\eta \frac{d\eta}{dx} \mp 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun ist $2\eta \frac{d\eta}{dx} = \frac{d(\eta^2)}{dx}$, $2y \frac{dy}{dx} = \frac{d(y^2)}{dx}$; daher folgt aus 2.

$$3. \quad \frac{d(\eta^2 \mp y^2)}{dx} = 0.$$

Hieraus schliesst man, dass $\eta^2 \mp y^2$ von x unabhängig, also gleich einer Constanten A ist. Man erhält daher die Gleichung der gesuchten Curve in der Form

$$4. \quad \eta^2 = f(x)^2 + A, \quad \text{bez.} \quad \eta^2 = -f(x)^2 + A.$$

Da A in beiden Fällen unbestimmt bleibt, so gibt es für beide Aufgaben unendlich viele Lösungen.

Die Forderung, dass die Curve $\eta = \varphi(x)$ für alle Punkte gleiche oder entgegengesetzt gleiche Subtangenten haben soll, wie die gegebene, führt auf die Beziehung

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{dx} = \pm \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{d \ln \eta}{dx} \mp \frac{d \ln y}{dx} = \frac{d(\ln \eta \mp \ln y)}{dx} = 0;$$

daher ist $\ln \eta \mp \ln y$ von x unabhängig; bezeichnet man diesen Werth mit $\ln A$, so erhält man

$$\ln \eta \mp \ln y = \ln A.$$

Hieraus folgen, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, die beiden Gleichungen

5. $\eta = Af$

Hat man Tangente und N erhält man ohne Weiteres auch Abscisse gehörenden Punkts ein

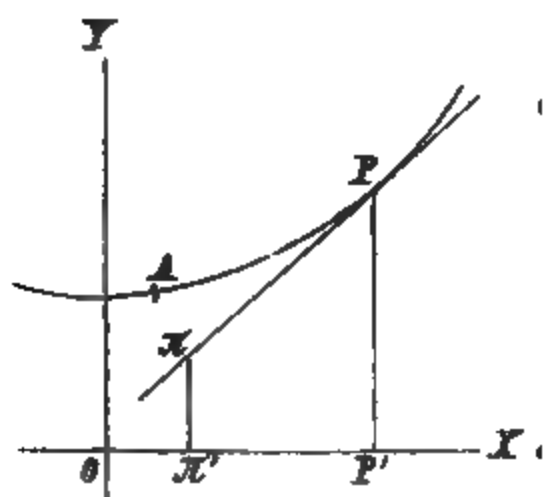
Ist z. B. $f = bx : a$, also gehende Gerade, so sind

$$\eta^2 = \left(\frac{b}{a}x\right)^2 -$$

die Gleichungen einer Hyperbel

Die Subnormale eines Hyp gehörigen Asymptotenpunktes, um gegengesetzt gleich der Subnorma

16. Unter der Evolvente Curve, die von einem Punkte e wird, wenn diese Tangente sich Bei einer bestimmten Lage der beschreibende Punkt mit einem Punkt sei A . Berührt die Tan



(M. 480.)

$\cos \tau \cdot d$

Die Tangente der Evc Normale der Evolvente fällt

Hiernach ist die gegebene gegebenen Curve gehören unzähligen Lagen des Punktes alle diese Evolventen sind Para

17. Formeln für Polarc Polarcoordinaten

so hat man für das Differential

$$\frac{\partial}{\partial}$$

Die Polarcoordinaten eines auf ein System, welches mit de

*) HERMITE, Cours d'Analyse de

Abscissenachse die Nulllinie des polaren ist, hängen bekanntlich durch die Formeln zusammen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Nach der Regel für das Differential eines Produkts findet man hieraus

$$1. \quad dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi,$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi}{\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi} = \frac{r' \tan \varphi + r}{r' - r \tan \varphi},$$

wobei r' für den Differentialquotienten $dr : d\varphi$ gesetzt worden ist. Ersetzt man $dy : dx$ durch $\tan \tau$, so erhält man aus 2.

$$3. \quad r' = \frac{r(1 + \tan \tau \tan \varphi)}{\tan \tau - \tan \varphi} = \frac{r}{\tan(\tau - \varphi)}.$$

Bezeichnet man mit σ den Winkel (r, T) , so ist $\sigma = \tau - \varphi$, und man erhält daher

$$4. \quad \tan \sigma = \frac{r}{r'}.$$

Durchschneidet man die Tangente T und die Normale N der Curve mit einer Geraden, die durch den Nullpunkt normal zu r gelegt ist, so erhält man zwei Abschnitte MO und OS , welche die Namen Polarsubnormale und Polarsubtangente führen. Man hat $MO = OP \cot \sigma$, $OS = OP \tan \sigma$ und daher

$$5. \quad \text{Polarsubnorm.} = r', \quad \text{Polarsubtang.} = \frac{r^2}{r'}.$$

Für das Bogendifferential gewinnt man aus 1. durch Quadriren und Addiren

$$6. \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + (r d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi.$$

18. Wir wenden diese Formeln zunächst auf die Kegelschnitte an. Nimmt man einen Brennpunkt F zum Pol und die grosse Achse als Nulllinie, und rechnet sie noch dem nächsten Scheitel positiv, so ist die Polargleichung für alle drei Arten von Kegelschnitten

$$1. \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Hieraus ergibt sich

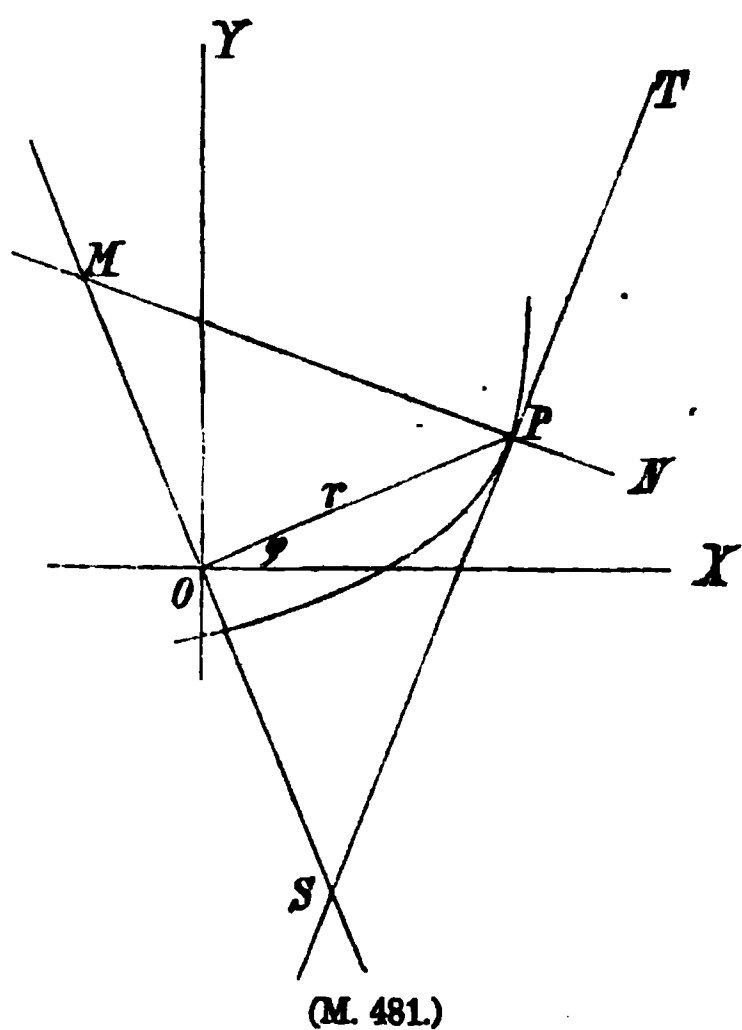
$$r' = \frac{p \varepsilon \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{r^2 \varepsilon \sin \varphi}{p}.$$

Daher ist die

$$\text{Polarsubtangente} = \frac{r^2}{r'} = \frac{p}{\varepsilon \sin \varphi}.$$

Dies ergibt

$$\sin \varphi \cdot \text{Polarsubtangente} = \frac{p}{\varepsilon}.$$

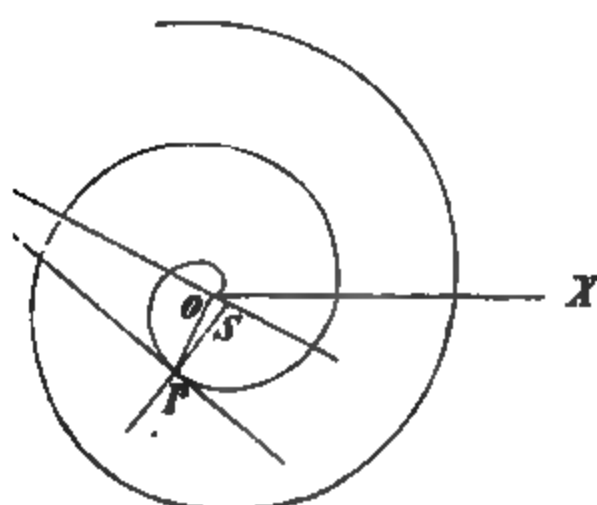


Die linke Seite ist offenbar die Projection der Polarsubtangente auf die Hauptachse; die rechte Seite ist der Abstand des Brennpunktes von der zunächst liegenden Directrix. Wir haben daher den Satz: Nimmt man einen Brennpunkt zum Pol, so reicht für alle Punkte des Kegelschnitts die Polarsubtangente bis zu der dem Pole zunächstliegenden Directrix. Dieser Satz lehrt eine sehr einfache Tangentenconstruction. Man kann aus ihm ersehen, dass die Tangenten in den Endpunkten der Brennpunktscoordinate sich mit einer Directrix auf der Hauptachse schneiden.

Archimedes

Amplitude
kommt d

man φ wi
Nullpunkt
Radien zu
, $r_0 = 3d$,
in $2a\pi$ g



(M. 482.)

Spirale bezeichnet. In Fig. 13 ist der Theil einer Archimedischen Spirale aufgezeichnet, der den Amplituden $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ entspricht, also $2\frac{1}{2}$ Windungen enthält. Die Windungen, welche zu $\varphi = 0$ bis $\varphi = -\frac{3}{2}\pi$ gehören, bilden eine Figur, die mit der gegebenen gegen eine durch O gehende Normale zur Nulllinie symmetrisch liegt.

Aus der Gleichung der Spirale folgt

$$r' = a,$$

Satz: Die Polarsubnormale der Archimedischen Spirale ist a . Hieraus folgt, wie man die Normale und Tangente in jedem Punkte in sehr einfacher Weise construirt. Die hyperbolische Spirale hat die Gleichung

$$r = \frac{a}{\varphi}.$$

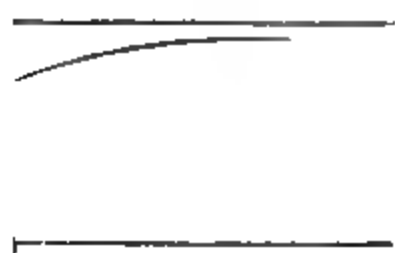
Werthe $\varphi = 0$ gehört der Radius $r = \pm \infty$ zu. Die Ordinate eines Punktes ist $y = r \sin \varphi$, also zufolge 1.

$$y = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

Windet φ , so erhält man

$$\lim y = a \lim \frac{\sin \varphi}{\varphi} = a.$$

Es ist ersichtlich, dass die beiden nach entgegengesetzten Seiten der Nulllinie erstreckenden unendlichen Aeste der Spirale eine gemeinschaftliche Asymptote haben, die parallel zur Nulllinie und von ihr um die Strecke a entfernt ist. Wächst φ von 0 bis $+\infty$, so erhält, wenn a positiv vorausgesetzt wird, positive Werthe, die stetig abnehmen und gegen die Grenze Null convergiren; die Spirale nähert sich also in unendlich vielen Windungen dem Nullpunkte; man bezeichnet aus diesem Grunde den Nullpunkt als den asymptotischen Punkt der Spirale. Die beiden Theile der Spirale, welche positiven und negativen Werthen von φ zugehören, sind congruent und liegen, wie bei der Archimedischen Spirale, symmetrisch gegen die durch



(M. 483.)

Asymptote haben, die parallel zur Nulllinie und von ihr um die Strecke a entfernt ist. Wächst φ von 0 bis $+\infty$, so erhält, wenn a positiv vorausgesetzt wird, positive Werthe, die stetig abnehmen und gegen die Grenze Null convergiren; die Spirale nähert sich also in unendlich vielen Windungen dem Nullpunkte; man bezeichnet aus diesem Grunde den Nullpunkt als den asymptotischen Punkt der Spirale. Die beiden Theile der Spirale, welche positiven und negativen Werthen von φ zugehören, sind congruent und liegen, wie bei der Archimedischen Spirale, symmetrisch gegen die durch

alpu

ist c

en c

ig d

$$\frac{r^2}{a}$$

—

che

nd :

Punkte der Curve.

21. Die logarithmische Spirale hat die Gl

1. $r = e^{a\varphi}.$

Wir setzen a positiv voraus und beschränken φ auf folgenden positiven Werthe von r . Für $\varphi = 0$ bis $+\infty$, so wächst auch r bis $+\infty$; nimmt φ gegen den Grenzwert Null; der Nullpunkt ist also an Punkt der Spirale. Die Gleichung 1. ergibt

$$r' = ae^{a\varphi} = ar,$$

daher ist

$$\tan \sigma = \frac{r}{r'} = \frac{1}{a}.$$

Der Winkel zwischen dem Radius vector rithmischen Spirale und der Tangente in di

22. Wenn bei zwei Curven $r = f(\varphi)$ und R den Punkten, welche zu derselben Amplitude φ mit dem Radius vector bilden, so hat man die

1. $\frac{R'}{R} = \frac{r'}{r},$

für welche man setzen kann

$$\frac{d \ln R}{d\varphi} = \frac{d \ln r}{d\varphi}.$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{d(\ln R - \ln r)}{d\varphi} = 0, \quad \text{und}$$

2. $\ln R - \ln r = \ln A, \quad \text{oder}$

3. $R = Ar,$

wobei A eine Constante bedeutet. Zwei solche Curven haben von constantem Verhältniss, sind der Nullpunkt ist ihr Aehnlichkeitspunkt.

Verlangt man für gleiche φ entgegengesetzt gleiche die linke Seite in 1. ihr Zeichen. Man erhält die Gleichung

$$\ln R + \ln r = \ln A,$$

und daher den Zusammenhang

4. $Rr = A.$

Curven, die dieser Bedingung genügen, werden bezeichnet.

Verlangt man für denselben Werth von φ gleiche man der Gleichung zu genügen

Nullpunkt ebenfalls

$$-v) = 1$$

ste der C
ene liegt
ual entsp
gen auf

$$\frac{\partial f}{\partial v} v) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} v) =$$

e Tangen
zugleich

Die Glieder der Function f lassen sich so gruppieren, homogenen Functionen n ten, $(n-1)$ ten, $(n-2)$ ten u. bezeichnet man diese Gruppen der Reihe nach mit $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots$

$$f = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \dots$$

Nach dem EULER'schen Satze ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v = n\varphi_n + (n-1)\varphi_{n-1} + (n-2)\varphi_{n-2} + \dots$$

Führt man dies in 1. ein und dividirt durch n , so erhält man

$$2. \quad F = \varphi_n + \frac{1}{n} \left[(n-1)\varphi_{n-1} + (n-2)\varphi_{n-2} + \dots \right]$$

Der Klammerinhalt ist vom $(n-1)$ ten Grade; Gleichungen $f=0$ und $F=0$ in Bezug auf die Glieder

Die geometrische Bedeutung dieses Umstandes lässt sich leicht erkennen. Setzt man $v = tu$ in die Gleichung $f=0$, so enthalten φ_{n-2}, \dots der Reihe nach die Faktoren $u^n, u^{n-1}, u^{n-2}, \dots$ derselben bleiben Functionen desselben Grades in Bezug auf u . Man dieselben durch $(\varphi_n), (\varphi_{n-1}), \dots$, so erhält man

$$f(u, tu) = u^n(\varphi_n) + u^{n-1}(\varphi_{n-1}) + u^{n-2}(\varphi_{n-2}) + \dots$$

Die Division durch u^n ergibt

$$4. \quad (\varphi_n) + \frac{1}{t}(\varphi_{n-1}) + \frac{1}{t^2}(\varphi_{n-2}) + \dots$$

Für jede Curventangente, die durch den Nullpunkt geht, man dies in 4. ein, so bleibt zur Bestimmung von t die

$$5. \quad (\varphi_n) = 0.$$

Die Grösse t ist die Tangente des Winkels, den eine Gerade mit der Abscissenachse einschliesst. Die Gleichung 5. bestimmt die Richtungen der durch den Nullpunkt gehenden reellen Tangenten der Curve $f=0$. Hieraus erkennt man: Wenn die Linienkoordinaten f und F in Bezug auf die Coordinaten u, v übereinstimmen, so fallen die durch den Nullpunkt gehenden Tangenten der Curven $f=0$ und $F=0$ zusammen.

Die durch den Nullpunkt gehenden gemeinsamen Tangenten der Curven $f=0$ und $F=0$

enthalten im Allgemeinen keine auf der beliebig gegebenen Curve liegenden Berührungspunkte; also sind von den n^2 gemeinsamen

die Ableitung der Gleichung der
; für homogene Punkt- und Linien-

e die Curve n ter Ordnung

$$x_3) = 0$$

Dann ist zunächst

$$+ u_3 x_3 = 0.$$

Coordinationen der Tangentialpunkte, so

$$- u_3 \xi_3 = 0.$$

P der Curve mit dem nächst benach-
aten sind

$$dx_3, \quad x_3 + dx_3;$$

$$r_3) + u_3(x_3 + dx_3) = 0.$$

irt, so bleibt

$$+ u_3 dx_3 = 0.$$

4. gewinnt man die gesuchte Tangenten-
rt; man erhält sie zunächst in der Form

$$\begin{vmatrix} \xi_3 \\ x_3 \\ dx_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Differentiation für die Differentiale der

$$+ f_3 dx_3 = 0,$$

$$= f_i.$$

tze

$$+ f_3 x_3 = f,$$

ist

$$+ f_3 x_3 = 0.$$

1 man f_1 und f_2 durch f_3 ausdrücken;

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ dx_3 & dx_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix}.$$

nach den Gliedern der ersten Zeile, so

$$\cdot \xi_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix} \cdot \xi_3 = 0.$$

in 9. durch die proportionalen Werthe
der Tangente in der endgültigen Form

$$\xi_2 + f_3 \cdot \xi_3 = 0.$$

gen führen zur Gleichung des Punktes P ,

$$u_3) = 0$$

rd. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 die Coor-
 P

$$u_2 + x_3 u_3 = 0.$$

Geraden u_1, u_2, u_3 und $u_1 + du_1$,
Gleichungen

n d

inir

z

n d

2

'u₂

gel

te mit $F=0$ identisch ist, während die andere durch Differentiation
eichung entsteht. Hieraus erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ du_2 & du_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ du_3 & du_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ du_1 & du_2 \end{vmatrix}.$$

13. und 14. folgt die gesuchte Gleichung des Tangentialpunktes

$$P = F_1 \cdot u_1 + F_2 \cdot u_2 + F_3 \cdot u_3 = 0.$$

**Tangentenebene und Tangentialpunkt von Flächen; Tangente und
alebene von Raumcurven; Gerade auf abwickelbaren Flächen.**

egt man eine Gerade durch einen Punkt P der Fläche $f(x, y, z) = 0$,
ch den Punkt P_1 der Fläche, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$,
ind, so gilt für die Richtungscosinus dieser Geraden (d. i. für die Cos
Winkel mit den Coordinatenachsen) die Proportion

$$\cos \varphi : \cos \psi : \cos \chi = \Delta x : \Delta y : \Delta z.$$

ergiren Δx und Δy , und damit auch im Allgemeinen Δz gegen d
h Null, so wird die Gerade zu einer Tangente der Fläche. F
ngscosinus einer Tangente ist also

$$\cos \varphi : \cos \psi : \cos \chi = dx : dy : dz.$$

1. Differentiation der Flächengleichung folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

man hier aus 2. für die Differentiale dx , dy , dz die proportionale
 $\cos \varphi$, $\cos \psi$, $\cos \chi$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \psi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \chi = 0.$$

Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen, und deren Richtung
durch eine Gleichung verbunden sind (ausser der selbstverständliche
 $\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \chi = 1$), sind die Mantellinien einer Kegelfläche
tze der gegebene Punkt ist. Die Gleichung dieser Kegelfläche wir
wenn man in 4. die Coordinaten ξ , η , ζ eines Punkts einer dieser Ge
i. also eines Punkts der von den Geraden beschriebenen Kegelfläche
Formeln einführt

Normalpunkt von Fläche

$$-\frac{y}{\rho}, \quad \cos \chi = \frac{\zeta}{\rho}$$

$$y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

eliminiert den Divisor

$$-\frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0$$

ξ, η, ζ . Sie lehren
 die Punkte P be-
 stimmt wird aus diese
 Berührungspunk-
 te der Fläche

$$) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) =$$

T gelegt wird, l-
 nalen mit den Coor-

$$: N, \quad \cos \chi =$$

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

$$= \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

erm gegeben
 $y)$,

$$= 0$$

hat dann

$$= \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} =$$

Ebene

$$y) - (\zeta - z) =$$

$$= (\zeta - z);$$

$$: N_1, \quad \cos \chi =$$

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

folgen aus 6.

$$M, \quad w = \frac{\partial f}{\partial z} \therefore$$

$$dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Eliminirt man x, y, z aus c

so erhält man die Gleichung

2. Unter einer Cylinderf
einer Geraden beschrieben wird
Die Bewegung der Geraden kan
durch, dass sie entlang der Schn
dass sie beständig eine gegeber
Gleichungen der erzeugenden G
veränderliche Grösse vorkomm
veränderungen der Geraden bed

Hat man die Cylindergleic
Schnittcurve des Cylinders mit
parallel ist, so erhält man eine
auf der Ebene E ; man kann
Geraden definiren, die einer ge
Curve C treffen. Insbesondere k
und somit den Cylinder durch
Horizontalspur definiren.

Wir machen zunächst von
 $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung c
Winkel der Mantellinien mit c
die durch den Punkt Π der Cur

$$\frac{x - \xi}{\cos \alpha}$$

Hieraus folgen die Werthe

1. $\xi = x -$

Substituirt man diese Wert

2. $f\left(x - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right)$

Sind die Mantellinien mit d
cos

und die Gleichung wird einfach

Sind zwei Oberflächen $f(x,$
deren Schnittcurve die Gerade ξ
curve, so erhält man die Cylinde
des Punktes Π aus den vier Gle

$$\frac{x - \xi}{\cos \alpha} = \frac{y - \eta}{\cos \beta} = \frac{z - \zeta}{\cos \gamma}$$

Sollen die Mantellinien Tan
für die Coordinaten der Bertühru

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \alpha +$$

Dies ist die Gleichung eine
und von den Winkeln α, β, γ ab
Fläche f sind die Bertührungspu
den vorhergehenden zurückgeföh
zu eliminiren

tialpunkt von Flächen etc.

$$= \frac{z - \zeta}{\cos \gamma},$$

$$\cos \beta + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \gamma = 0$$

angentenebene ein.
partialen Differentialq

$$\frac{f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}$$

$$\cdot \frac{d\eta}{dz} = - \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} -$$

ne ist daher, wenn

$$3. \quad T = \frac{\partial f}{\partial \xi} (x - \xi) + \frac{\partial f}{\partial \eta} (y - \eta) - \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) (z - \zeta)$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Normale von T mit d
schliesst, so ist

$$\cos \varphi : \cos \psi : \cos \chi = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : - \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

Hieraus erkennt man, dass

$$\cos \varphi \cos \alpha + \cos \psi \cos \beta + \cos \chi \cos \gamma = 0.$$

Dies zeigt, dass die Ebene T die Richtung α, β, γ enthält
somit den Satz: Jede Tangentenebene eines Cylinders
Cylinder längs einer Mantellinie, so dass jeder Punkt d
linie ein Berührungspunkt ist.

3. Unter einer Kegelfläche versteht man eine Fläche, we
Geraden beschrieben wird, die durch einen festen Punkt geht; die
die Spitze des Kegels. Man kann die Bewegung der Gerade
Weise näher definiren, wie bei der Erzeugung des Cylinders.

Ist $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Horizontalspur des Kegels
dass die Spitze S nicht auf der XY -Ebene liegt) und sind a, b, c
der Spitze, so sind die Gleichungen der Geraden ΠS

$$1. \quad \frac{x - a}{a - \xi} = \frac{y - b}{b - \eta} = \frac{z - c}{c - \zeta};$$

jeder dieser Quotienten ist dem Verhält-
niss $PS : S\Pi$ gleich. Aus den Gleichungen
1. ergibt sich

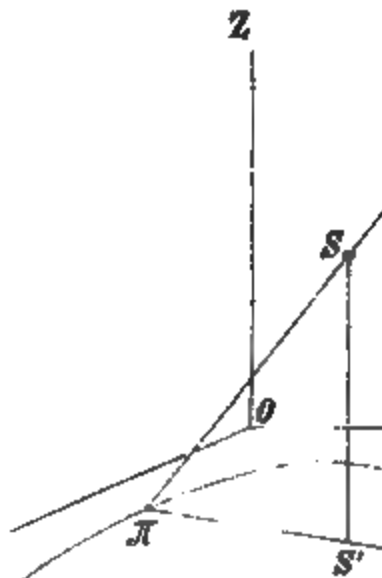
$$a - \xi = \frac{c(x - a)}{z - c}, \quad b - \eta = \frac{c(y - b)}{z - c},$$

und hieraus folgt weiter

$$\xi = \frac{ax - cx}{z - c}, \quad \eta = \frac{by - cy}{z - c}.$$

Setzt man diese Werthe in die
Gleichung der Horizontalspur ein, so Y
erhält man die Gleichung der Kegelfläche

$$2. \quad f\left(\frac{ax - cx}{z - c}, \frac{by - cy}{z - c}\right) = 0.$$



(M. 485.)

*) In den Differentialquotienten von $f(\xi, \eta)$ sind ξ, η durch die Werthe

Verl
den alte

Die

3.

Hier
Kegelfläc
Abstand
so wird

4.

Ist f eine algebraische Function n ten Grades, so wird die Kegelfleichung 3. nach Beseitigung der Nenner eine homogene Gleichung n ten Grades.

Wird verlangt, dass die Mantellinien des Kegels die Schnittlinie zweier Flächen $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ treffen, so hat man ξ, η, ζ aus den Gleichungen zu eliminiren

$$\frac{x-a}{a-\xi} = \frac{y-b}{b-\eta} = \frac{z-c}{c-\zeta}, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Verlangt man den Kegel, dessen Mantellinien die Fläche $f(\xi, \eta, \zeta)$ berühren, so gelten für die Coordinaten eines Punkts einer Mantellinie und ihres Berührungspunkts zunächst wieder die Gleichungen

$$5. \quad \frac{x-a}{a-\xi} = \frac{y-b}{b-\eta} = \frac{z-c}{c-\zeta}, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Gerade ΠS mit den Achsen bildet, sind proportional den Differenzen $a - \xi$, $b - \eta$, $c - \zeta$; ist ΠS Tangente der Fläche f im Punkte Π , so gilt daher die Gleichung

$$6. \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} (a - \xi) + \frac{\partial f}{\partial \eta} (b - \eta) + \frac{\partial f}{\partial \zeta} (c - \zeta) = 0.$$

Durch Elimination von ξ, η, ζ aus 5. und 6. ergibt sich die gesuchte Kegelfleichung.

Ist f eine algebraische Function n ten Grades, so ist die Gleichung 6. ebenfalls vom n ten Grade; sie kann aber durch eine Function $(n-1)$ ten Grades ersetzt werden. Ordnet man nämlich die Function f nach dem Grade der einzelnen Glieder, so erscheint f als Summe von homogenen Functionen vom Grade $n, (n-1), (n-2) \dots$

$$f = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots$$

Nach dem EULER'schen Satze ist nun

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta = n u_n + (n-1) u_{n-1} + (n-2) u_{n-2} + \dots$$

Setzt man dies in 6. ein, wechselt die Zeichen und dividirt durch n , erhält man

$$F = u_n + \frac{1}{n} \left[(n-1) u_{n-1} + (n-2) u_{n-2} + \dots - \frac{\partial f}{\partial \xi} a - \frac{\partial f}{\partial \eta} b - \frac{\partial f}{\partial \zeta} c \right]$$

Die Differenz $f - F$ ergibt sich daher zu

$$f - F = \frac{1}{n} u_{n-1} + \frac{2}{n} u_{n-2} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} a + \frac{\partial f}{\partial \eta} b + \frac{\partial f}{\partial \zeta} c \right) = \varphi_{n-1}$$

wo nun φ_{n-1} eine Function $(n-1)$ ten Grades ist. Alle nicht unendlich fern

nkt vor

$$= 0$$

welch

bert

rdnur

zu

Pun

schreil

les K

Da n

auf der Fläche f durch zwei Flächen φ und Φ vor
schnitten werden, so sind die Schnittpunkte dieser
Punkte der drei Flächen f , φ und Φ ; die Anzahl dies
dem Produkte der Gradzahlen der drei Functionen f ,
 $n(n-1)^2$.

Die Anzahl der durch eine Gerade gehenden T
der Klassenzahl der Fläche, d. i. gleich dem Grade
coordinaten. Wir finden daher: Eine Fläche n ter
meinen von der Klasse $n(n-1)^2$. Nur für $n =$
Klassenzahl gleich der Ordnungszahl. Flächen 3ter,
sind im Allgemeinen von der 12ten, 36ten, 80ten Kl

Von der Kegelgleichung 2. ausgehend, erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = -\frac{c}{x-a} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dy} = -\frac{c}{y-b} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} &= \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dz} + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dz} = \frac{c(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}\end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangentialebene des Kegels
daher, wenn mit x, y, z die laufenden Coordinaten be

$$T = \frac{\partial f}{\partial \xi} (x-a) + \frac{\partial f}{\partial \eta} (y-b) - \left(\frac{x-a}{x-a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{y-b}{y-b} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

Sind φ, ψ, χ die Winkel der Normalen mit den

$$\cos \varphi : \cos \psi : \cos \chi = \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : - \left(\frac{x-a}{x-a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{y-b}{y-b} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

Für die Richtungswinkel λ, μ, ν der Mantellinie

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = (x-a) : (y-b) : z$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$\cos \varphi \cos \lambda + \cos \psi \cos \mu + \cos \chi \cos \nu = 0$$

Dies lehrt: Jede Tangentenebene eines Keg
entlang einer Mantellinie.

Da hiernach die Tangentenebene jedes Kegelpu
ge t, so folgt, dass man die Tangentenebene in P a
El men betrachten kann, die durch die Mantellinie
M tellinie SP_1 gehen, wenn der Winkel SP, SP_1 g
co vergirt. Hieraus folgt weiter, dass die Tangente
gleich Tangentenebene für alle Punkte der

*) Hier gilt dieselbe Bemerkung wie zu Gleichung 3. der

4. Die Cylinderfl
Begriff der Regelflä
die durch Bewegung
kann in verschiedene
Gerade immer drei g
zwei gegebene Curve
eine gegebene Curve

Sind $z = mx +$
Geraden der Fläche,
es nur Functionen ein

Variable, so könnte man die Variablen so bestimmen, dass die Gleichungen der Geraden durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 irgend eines Raumpunktes erfüllt würden, es würde also dann jeder Raumpunkt der Fläche angehören, im Widerspruche mit dem Begriffe einer Fläche. Sei σ eine Veränderliche, so haben die Gleichungen einer erzeugenden Geraden einer Regelfläche daher die Form

$$1. \quad z = g(\sigma) \cdot x + h(\sigma), \quad y = G(\sigma) \cdot x + H(\sigma),$$

worin g, h, G, H Functionszeichen sind. Durch diese Gleichungen sind die Coordinaten jedes Flächenpunktes von zwei unabhängigen Variablen x und σ abhängig gemacht. Die Flächengleichung wird aus 1. durch Elimination von σ gewonnen.

Um die Gleichung der Tangentenebene im Punkte P zu erhalten, haben wir die partialen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ zu bilden. Im ersten Falle haben wir x und σ so zu ändern, dass nur z sich ändert, y aber ungeändert bleibt; im zweiten Falle ändern sich y und σ , während x ungeändert bleibt. Unter der ersten Voraussetzung gehen aus 1. die beiden Gleichungen hervor

$$2. \quad dz = g dx + (g'x + h') d\sigma,$$

$$3. \quad 0 = G dx + (G'x + H') d\sigma,$$

wobei g', h', G', H' die Grössen $dg : d\sigma \dots$ bezeichnen. Aus 3. folgt

$$d\sigma = - \frac{G}{G'x + H'} dx.$$

Setzt man dies in 2. ein, so erhält man

$$4. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(gG' - Gg')x + (gH' - Gh')}{G'x + H'}.$$

Unter der andern Voraussetzung folgt aus 1.

$$dz = (g'x + h') d\sigma, \quad dy = (G'x + H') d\sigma$$

und hieraus durch Division

$$5. \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g'x + h'}{G'x + H'}.$$

Führt man diese Werthe 4. und 5. in die Gleichung der Tangentenebene ein, so erhält man nach Beseitigung der Nenner für die Tangentenebene einer Regelfläche

$$T = [(gG' - Gg')x + gH' - Gh'](\xi - x) + (g'x + h')(\eta - y) - (G'x + H')(\zeta - z) = 0.$$

Für die Richtungscosinus der Normalen folgt hieraus

$$\cos \varphi : \cos \psi : \cos \chi = [(gG' - Gg')x + gH' - Gh'] : (g'x + h') : -(G'x + H')$$

Für die Winkel λ, μ, ν der erzeugenden Geraden 1. und der Achsen i

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = 1 : G : g.$$

Aus diesen Proportionen folgt die Gleichung

$$\cos \varphi \cos \lambda + \cos \psi \cos \mu + \cos \chi \cos \nu = 0.$$

tenebene einer Regelfläche enthält gehende erzeugende Gerade.

) die Variable σ ungeändert, während x Berührungspunkt entlang einer erzeugenden Geraden T ; dies ergibt: Wenn der Berührungspunkt der erzeugenden Geraden fortschreitet, so bewegt sich die Tangentenebene um diese Gerade.

Die Tangentenebenen der erzeugenden Geraden liegenden Punkte der Fläche. Die Tangentenebenen bestehen aus sehr einfachen Tangentenebenen, wählen wir das Coordinatensystem so, dass die Tangentenebene T in Betracht ziehen wollen, als X -Achse der Fläche. Wir wählen beliebig auf dieser Geraden; zur Tangentenebene des Nullpunktes. Für die X -Achse der Fläche zugehörigen Werth von σ G, H verschwinden. Die Gleichung der Tangentenebene X -Achse ergibt sich hiernach zu

$$-(G'x + H')\zeta = 0.$$

Voraussetzung die Tangentenebene $\zeta = 0$, G von T wird noch einfacher

$$(G'x + H')\zeta = 0.$$

Mit der Y -Achse und bezeichnet man mit t die Strecke, welche T von einer Geraden a ist und von der X -Achse um die Längeneinheit 1 in t folgt aus der Gleichung 6.

$$t = \frac{G'x}{G'x + H'};$$

in $tg\varphi$ einführt und den Nenner beseitigt, für t

$$x + H't = 0.$$

Nach dem Satz von der Ebene § 6, No. 15), dass die von a auf der Geraden a erzeugte Punktreihe mit T projectiv ist; hieraus ergibt sich: Die Punktreihe der Tangentenebenen einer Regelfläche ist mit dem Coordinatensystem projectiv, und zwar entspricht der Nullpunkt in diesem Punkte. In der analytischen Darstellung für die Regelflächen zweiten Grades

Gleichung einer Fläche in Ebenencoordinaten u, v, w und $u + \Delta u$, Tangentenebenen der Fläche. Durch die Schnitt-

$$1 = 0,$$

$$\Delta v)y + (w + \Delta w)z - 1 = 0$$

$$+ \Delta v \cdot y + \Delta w \cdot z = 0;$$

und ihre Stellungswinkel folgen aus

$$\sin \gamma' = \Delta u : \Delta v : \Delta w.$$

Indem wir $\Delta u, \Delta v$ und Δw über, so nähert sich γ' der Tangentenebene; die Gleichung dieser Grenzlage ist

1. $T = du \cdot x + dv \cdot y + dw$
für die Richtungswinkel ihrer Normalen hat man

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = du : dv$$

Auf einer Tangentialebene T liegen unendlich dieselben werden auf T durch alle die unzähligen die man erhält, wenn man die Verhältnisse der Gleichung der Fläche verträglichen Weise abändert. Gleichung genügen, die sich durch Differentiation

2.
$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot dw = 0$$

Vergleicht man 1. und 2., so erkennt man, dass T enthält, deren Punkte der Proportion genügen

3.
$$x : y : z = \frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial w}$$

Die Ebenen T bilden daher ein Büschel, dessen Mittelpunkt geht und durch 3. bestimmt ist. Hieraus erhält man die Fläche $f(u, v, w) = 0$, die auf einer Tangentialebene durch einen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt der Ebene T . Dieser Punkt ist der Berührungspunkt der Ebene T mit der Fläche f .

Sind x, y, z die Coordinaten desselben und u, v, w die einer durch ihn gehenden Ebene, so hat man die

$$xu + yv + zw - 1 = 0$$

Aus ihnen folgt

$$x(u - u) + y(v - v) + z(w - w) = 0$$

In Rücksicht auf 3. folgt hieraus die Gleichung der Ebene T

4.
$$\frac{\partial f}{\partial u} (u - u) + \frac{\partial f}{\partial v} (v - v) + \frac{\partial f}{\partial w} (w - w) = 0$$

Ist die Gleichung der Fläche in der Form gegeben

$$w = f(u, v),$$

so erhält man die Gleichung des Berührungspunktes

5.
$$P = \frac{\partial w}{\partial u} (u - u) + \frac{\partial w}{\partial v} (v - v) - w + f(u, v)$$

6. Das Ebenengebilde, welches von Ebenen T auf einer Ebene A liegen und eine Curve C heisst eine Grenzfläche. Unter den Ebenengebildern dieselbe Stellung ein, wie unter den Punktgebilden. Die Coordinaten der Ebene A sind

1. $f(U, V) = 0$
die Gleichung der Horizontalprojection von C ,
jede Ebene T zur Grenzfläche, welche durch einen Punkt einer Verticalebene T geht, die der Gleichung 1. dieser Ebene folgen aus den Coordinaten von A

$$U = \frac{\lambda u + \mu a}{\lambda + \mu}, \quad V = \frac{\lambda v + \mu \beta}{\lambda + \mu},$$

Aus der letzten folgt

$$\lambda : \mu = -\gamma : w;$$

daher ist

$$\frac{v - \gamma u}{v - \gamma}, \quad V = \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma}.$$

in 1. ein, so erhält man die Gleichung der

$$\frac{-\gamma u}{v - \gamma}, \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma} = 0.$$

Gleichung aus der Kegelgleichung No. 3, 2 hervor, ordinaten durch Ebenencoordinaten ersetzt.

nktes β zu erhalten, in welchem die Grenzfläche rührt wird, bilden wir

$$\frac{U}{u} = - \frac{\gamma}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial U},$$

$$\frac{V}{v} = - \frac{\gamma}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial V},$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dw} = \frac{\gamma(u - \alpha)}{(w - \gamma)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{\gamma(v - \beta)}{(w - \gamma)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}.$$

gentialpunktes einer Grenzfläche ist daher, n mit u, v, w bezeichnet werden

$$4. \quad P = \frac{\partial f}{\partial U}(u - \alpha) + \frac{\partial f}{\partial V}(v - \beta) - \left(\frac{u - \alpha}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{v - \beta}{w - \gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial V} \right) (w - \gamma) = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung u, v, w durch α, β, γ , so wird sie identisch; daher folgt: Die Punkte der Grenzfläche liegen auf der Ebene A . Diese Ebene wird als die Hauptebene der Grenzfläche bezeichnet.

Setzt man in 4. $w = 0$, so erhält man die Gleichung der Horizontalprojection von P

$$P' = \frac{\partial f}{\partial U}(u - \alpha) + \frac{\partial f}{\partial V}(v - \beta) + \left(\frac{u - \alpha}{w - \gamma} \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{v - \beta}{w - \gamma} \frac{\partial f}{\partial V} \right) w = 0.$$

Hieraus erlangt man durch einfache Reduction

$$P' = \frac{\partial f}{\partial U} \left(u - \frac{\alpha w - \gamma u}{w - \gamma} \right) + \frac{\partial f}{\partial V} \left(v - \frac{\beta w - \gamma v}{w - \gamma} \right) = 0,$$

und dies kann man nach den Formeln 2. ersetzen durch

$$\frac{\partial f}{\partial U}(u - U) + \frac{\partial f}{\partial V}(v - V) = 0.$$

Der Berührungspunkt P der Ebene T hat also als Grundriss einen Punkt der Curve $f(U, V) = 0$; folglich ist P ein Punkt der Curve C . Die Curve C enthält daher die Punkte der Grenzfläche.

Hieraus erkennt man weiter, dass jeder Punkt von C der Berührungspunkt eines Büschels von Ebenen der Grenzfläche ist — sowie beim Kegel die Tangentenebene in einem Punkte des Kegels zugleich Tangentenebene in allen Punkten einer geradlinigen Punktreihe, nämlich der durch den Punkt gehenden Mantellinie ist.

7. Unter einer Regelfläche unter den Ebenengebilden versteht man eine Fläche, die von den Ebenen eines Ebenenbüschels umhüllt wird, dessen Träger sich im Raume bewegt. In No. 4 haben wir die Regelflächen unter den Punktgebilden definiert und nachgewiesen, dass die Tangentenebenen Ebenenbüschel bilden, deren Träger die erzeugenden Geraden der Regelfläche sind; dies zeigt, dass die Regelflächen unter den Punktgebilden auch Regelflächen unter den Ebenengebilden sind. Im Verlaufe der jetzt anzustellenden Betrachtung wird sich zeigen, dass bei einer Regelfläche unter den Ebenengebilden die

Berührungspunkte der Ebene damit wird dann erwiesen und für Ebenengebilde flächen schlechthin sprechen.

Ein Ebenenbüschel ist bestimmt, die wir in der

1. v

Soll das Ebenenbüschel des Raumes enthalten 2 Variablen σ sein. Zur Ebene haben wir die beiden Gleichungen

$0 = Gdu + (G' - G)dv$
aus ihnen ergibt sich

2. $\frac{\partial w}{\partial u}$

Der partielle Differenzial
 $dv =$

zu

3.

Daher erhält man für

4. $P = (gG' - Gg')$

Hier kann man noch ausdrücken. Lässt man σ die Berührungspunkte aller Ebenen Werthe von σ zugehört; der Gleichung wesentlich Berührungspunkte der Ebene zu Ebene.

Führt man denselben Werthe zugehörig genügt; denn ist U, V, W

Für die Ebene T ist

und daher

$$V - v =$$

Setzt man dies in 4.

Da hiernach jede Ebene so folgt: Die Berührungspunkte dem Träger des Büschels Behauptung erwiesen.

8. Eine Raumcurve als deren vollständiger oder dieser Flächen seien

1. $f(x, y, z)$

Verbindet man einen selben, dessen Coordinaten

$$10. \quad N = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Die Coordinaten der Normalebene

$$11. \quad u = \frac{1}{x + y'y + z'z}, \quad v = \frac{1}{x}$$

Wenn man aus diesen Gleichungen

$$y = \varphi(x)$$

die Coordinaten x, y, z eliminirt, so erhält man die Gleichungen der von den l curve umhüllten abwickelbaren

9. Eine abwickelbare Fläche ist durch zwei Bedingungsgleichungen genügt

1. $f(u, v, w) = 0$
zwei solche Gleichungen, so erscheinen die Tangentenebenen der Fläche aus 1. einmal w und dann v , so erhält man u und v , die andere zwischen u und v .
2. $v = \varphi(u)$

Es sind dies die Gleichungen der abwickelbaren Fläche; durch die

Die Coordinaten der Ebenen T und T_1 Tangenten \mathfrak{L} irgend eine die Gerade TT_1 enthalten von \mathfrak{L} aus den Coordinaten u, v, w

$$u = \lambda u + \mu u_1, \quad v = \lambda v + \mu v_1$$

Hieraus gewinnt man

$$u - u_1 = \lambda(u - u_1) + \mu(u - u_1)$$

$$v - v_1 = \mu(v_1 - v)$$

Hieraus folgt, dass die Coordinaten der Ebene den beiden Gleichungen genügt

$$3. \quad \frac{u - u_1}{u_1 - u} = \frac{v - v_1}{v_1 - v}$$

und umgekehrt. Diese Gleichungen sind in Plancoordinaten zu bezeichnen

Setzt man $u_1 = u + \Delta u$, $v_1 = v + \Delta v$, so erhält man sie über in

$$4. \quad \frac{u - u_1}{\Delta u} = \frac{v - v_1}{\Delta v}$$

Nähert sich Δu dem Grenzwert du und Δv demselben Grenzwert dv , so erhält man die allgemeine einer bestimmten Grenzwert dw abwickelbare Fläche berührt. Die Gleichung lautet daher

entialpu

$$= \frac{w}{v}$$

urch d

$$\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w}$$

$$6. \quad du : dv : dw = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial v}{\partial F} & \frac{\partial w}{\partial F} \\ \frac{\partial v}{\partial G} & \frac{\partial w}{\partial G} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial F}{\partial w} \end{array} \right|$$

Oder man zieht aus 2. die Werthe v' und u von \mathcal{G}

$$7. \quad u - u' = \frac{v - v'}{v'} = \frac{w}{v'}$$

Eliminirt man u, v, w aus den beiden Gleichu

$$f(u, v, w) = 0, \quad F(u, v$$

so erhält man in Plancoordinaten u, v, w c Geraden \mathcal{G} der abwickelbaren Fläche be Fläche.

9. Wir wenden die entwickelten Formeln die Schraubenregelfläche an.

Eine Schraubenlinie wird von einem Punkt Oberfläche eines Rotationscylinders von einem einer bestimmten Mantellinie ausgehend so bewe Normalschnitte proportional dem Bogen ist, den schnitt immer in derselben Richtung zurückgele zur Z-Achse genommen, die X-Achse durch ein legt und die Schraubenlinie so beschrieben, dass von der positiven X-Achse nach der positiven l in der Richtung der positiven Z-Achse verbind $z = k\varphi$, wo k eine positive Constante und φ c den der Radius vector der Horizontalprojection man φ durch $\varphi + 2\pi$, so geht man von einem dem auf derselben Mantellinie zunächst darüber l desselben ist $k\varphi + k \cdot 2\pi$. Der Unterschied Schraubenlinie; bezeichnet man diese mit h , so $h = 2\pi k$.

Da nun $y = x \tan \varphi$, so folgt eine Gleichu

$$1 \quad z = k \operatorname{Arc} \tan \frac{y}{x}$$

c e andere ist die Cylindergleichung

$$1 \quad x^2 + y^2 = a^2$$

Wenn a den Radius des Cylinders bezeichnet.

In Fig. 486 sind zwei Gänge einer Schraub

Durch Differentiation folgt aus 2. und 1.

$$x dx + y dy = 0, \quad \text{folglich}$$

Fläche

.]

lie

—

ber

ds

erh

die constante Strecke $OQ' = k^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = k^2 : a$ ab.

Zieht man durch P die Gerade PQ parallel und gleich der Geraden PQ ; folglich enthält die Gerade NN_1 den Punkt P entlang der Schraubenlinie, so beschreibt Q eine Schraubenlinie der Ganghöhe; bezeichnet χ_1 den Winkel der Tangente dieser Linie mit der OZ , so ist

$$\cos \chi_1 = k : \sqrt{k^2 + \frac{k^2}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{k^2 + a^2}}$$

Hieraus folgt, dass $\cos \chi_1 = \sin \chi$, dass also die Tangente der Schraubenlinie mit NN_1 zusammenfällt. Wir haben also gesehen, dass die Cuspidalkante der von den Normalebenebenen einer Schraubenlinie umhüllten abwickelbaren Fläche eine coaxiale Schraubenlinie von derselben Ganghöhe ist.

Wenn eine Gerade normal zu einer andern Geraden steht, so schneidet sie diese Gerade und eine Schraubenlinie, welche um die Achse hat, so nennt man die von der bewegten Geraden umhüllte Fläche eine axiale normale Schraubenregelfläche. Wenn man in dem eben benutzten Coordinatensystem ist die Gleichung dieser Fläche

$$7. \quad z = k \operatorname{Arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x},$$

so dass die beiden Gleichungen der Schraubenlinie 1. und 7. schneiden dieser Schraubenfläche und eines Rotationscylinders. Aus 7. folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -k \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = k \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$$

mithin ist die Gleichung der Tangentenebene

$$8. \quad ky(\xi - x) - kx(\eta - y) + (x^2 + y^2)(\zeta - z) = 0$$

Diese Ebene enthält die Gerade, deren Gleichungen

$$\zeta = z, \quad y\xi - x\eta = 0,$$

d. i. die durch den Berührungspunkt P gehende erzeugende Gerade der Fläche. Der Abschnitt von T auf der X -Achse ergibt sich

$$\xi = \frac{x^2 + y^2}{ky} z.$$

Ist ρ der Abstand des Berührungspunktes von der OZ , Winkel (ρ, x) , so ist $x^2 + y^2 = \rho^2$, $y = \rho \sin \varphi$, $x = \rho \cos \varphi$

$$\xi = \frac{\rho}{\sin \varphi} \cdot z.$$

Bewegt sich P entlang einer erzeugenden Geraden, so beschreibt ξ eine Gerade, die man jede erzeugende Gerade zur X -Achse wählen kann.

nkt an F

der du
dabei
setzen.

$$r = r,$$

$$k \frac{\pi}{2} +$$

aussetzu

$$\text{in } \alpha \left(\zeta \right.$$

durch

$$\frac{t}{t}; \text{ es e}$$

$$\cdot b) = ($$

e Streck

$$= \frac{b(b}{$$

$$a, Q$$

$$R,$$

ichte

nden

on r

bene —

die

Ge-

den-

ttes flü

einer Fl

ebenen

alten, ir

lpunkt l

$$\overline{\xi^2} +$$

$$- 1 =$$

$$- (\xi^2)^2 =$$

durch B

otation

e norm

hse au

Centren haben; die el
und heissen Meridia
werden. Wird die Ro
Bezug auf die Z-Ach
Gleichung $f(x, y) = 0$

Die Normale ein
sowie die Tangentenel
denselben Punkt der

C. Eine Fläche, c
liegenden Radien eine
der Fläche f (in Bezu
 $= 0$ folgt die Gleichu

$$f\left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}\right)$$

wobei P und Π auf d
Bildet man

$$f_\xi =$$

so erkennt man, dass

$$f_\xi \cdot X + f_\eta \cdot Y + f_\rho \cdot \rho = 2r^2$$

Die Tangentenebe
schneiden daher eine N

Ferner ist $f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\rho^2 =$

dass die Normalebene
Tangentenebenen in d

Die Reciprokalfläc
für das Centrum als
gleichgerichteten Achs

8

1. Mit Rücksicht
einer Function y eine
bezeichnet.

Unter dem zweiter
quotienten des ersten Di
versteht man den Diffe
allgemein unter dem
($n - 1$)ten Differential
 n te Differentialquotient
($n + m$)ten Differentia
Differentialquotienten v
daher

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$dy = y' dx$$

g
 $\frac{d}{dx}$
 ten Faktor ansieht, so erhält man
 $d(y' \cdot dx)$;
 ieht hieraus
 $y'' dx^2$.
) setzt man das kürzere d^2y ,^{)} wobei
 s Zeichen die Voraussetzung enthält,
 von der ersten herrührende Faktor dx
 r dieser Voraussetzung hat man
 y'' .

if beliebig hohe Differentialquotienten
 ausdehnen. Versteht man unter d^ny den Ausdruck, den man erhält, wenn man y
 differenzirt, das Resultat wieder differenzirt und diese Differentiationen so oft
 wiederholt, bis man im Ganzen n ausgeführt hat, und bei allen diesen Differen-
 tiationen dx als constanten Faktor behandelt, so ist

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}.$$

Denn nimmt man an, diese Formel gelte für einen bestimmten Werth von n ,
 so hat man zunächst nach der Voraussetzung

$$d^ny = y^{(n)} dx^n;$$

durch Differentiation ergibt sich hieraus, wenn dabei dx als constant gilt

$$d(d^ny) = dy^{(n)} \cdot dx^n.$$

Wenn man hierin $dy^{(n)} = y^{(n+1)} dx$ substituirt, und $d(d^ny)$ durch $d^{n+1}y$
 ersetzt, so ergibt sich

$$d^{n+1}y = y^{(n+1)} dx^{n+1}, \text{ also } \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = y^{(n+1)}.$$

Da nun die Formel für $n = 2$ erwiesen ist, so gilt sie auch für $n = 3, 4, 5 \dots$
 rhaupt für jeden Werth von n .

Diese Bezeichnung höherer Differentialquotienten einer Veränderlichen wird
 häufigsten angewendet.

2. Höhere Differentialquotienten einer Potenz. Durch successive
 ferentiation erhält man leicht

$$\frac{d^m}{dx^m} x^m = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2}{dx^2} x^m = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3}{dx^3} x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\dots \dots \dots \frac{d^k}{dx^k} x^m = m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)x^{m-k}.$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so kommt man endlich auf

$$\frac{d^m}{dx^m} x^m = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Da der m te Differentialquotient von x unabhängig ist, so folgt, dass der
 $(m+1)$ te, sowie alle höheren verschwinden.

3. Höhere Differentialquotienten des Logarithmus.

Aus $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$ folgt $\frac{d^2 \ln x}{dx^2} = \frac{d^{n-1}(x^{-1})}{dx^{n-1}}$, also hat man durch Anwendung
 in No. 2 Gefundenen

*) Die hochgestellte 2 hinter dem Zeichen d ist hier ein Wiederholungszeichen; Ver-
 theilung mit einem Potenzexponenten ist nicht zu befürchten.

450

quot

Func
Diffe
je na

ist

,

]

(

]

]

d

man
einen
niede

$$\frac{d^n \operatorname{arc tang} x}{dx^n} = -\frac{n-1}{1+x^2} \left[2 \right.$$

Wenn man den Werth, den

bezeichnet, so findet man

$$\left(\frac{d^n \operatorname{arc tang} x}{dx^n} \right)_0 = -$$

Da nun

$$\left(\frac{d \operatorname{arc tang} x}{dx} \right)_0,$$

so folgt, dass der n te Differentialquotient von $\operatorname{arc tang} x$ für ein gerades n und für $x = 0$ verschwindet, während für ein ungerades n

$$\left(\frac{d^n \operatorname{arc tang} x}{dx^n} \right)_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1).$$

B. Aus der Formel

$$\frac{d \operatorname{arc sin} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

folgt zunächst

$$\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d \operatorname{arc sin} x}{dx} = 1.$$

Hieraus ergibt sich durch erneute Differentiation

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d \operatorname{arc sin} x}{dx} + \sqrt{1-x^2} \frac{d^2 \operatorname{arc sin} x}{dx^2} = 0,$$

und mithin

$$(1-x^2) \frac{d^2 \operatorname{arc sin} x}{dx^2} - x \frac{d \operatorname{arc sin} x}{dx} = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung $(n-2)$ mal, so erhält man

$$(1-x^2) \frac{d^n \operatorname{arc sin} x}{dx^n} - 2(n-2)x \frac{d^{n-1} \operatorname{arc sin} x}{dx^{n-1}} - (n-2)(n-3) \frac{d^{n-2} \operatorname{arc sin} x}{dx^{n-2}} \\ - x \frac{d^{n-1} \operatorname{arc sin} x}{dx^{n-1}} - (n-2) \frac{d^{n-2} \operatorname{arc sin} x}{dx^{n-2}} = 0,$$

oder zusammengerechnet

$$(1-x^2) \frac{d^n \operatorname{arc sin} x}{dx^n} - (2n-3)x \frac{d^{n-1} \operatorname{arc sin} x}{dx^{n-1}} - (n-2)^2 \frac{d^{n-2} \operatorname{arc sin} x}{dx^{n-2}} = 0$$

Diese Gleichung lehrt, wie man den n ten Differentialquotienten von $\operatorname{arc sin} x$ aus den beiden nächst niederen ableitet. Für $x = 0$ hat man insbesondere

$$\left(\frac{d^n \operatorname{arc sin} x}{dx^n} \right)_0 = (n-2)^2 \frac{d^{n-2} \operatorname{arc sin} x}{dx^{n-2}}.$$

Da nun bekanntlich

$$\left(\frac{d \operatorname{arc sin} x}{dx} \right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^2 \operatorname{arc sin} x}{dx^2} \right)_0 = 0,$$

so folgt, dass der n te Differentialquotient von $\operatorname{arc sin} x$ für $x = 0$ und für ein gerades n verschwindet, während man für ein ungerades hat

$$\left(\frac{d^n \operatorname{arc sin} x}{dx^n} \right)_0 = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots (n-2)^2.$$

C. Setzt man $u = (\operatorname{arc sin} x)^2$, so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = 2u, \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{du}{dx} + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{folglich}$$

erst $\psi(w)$
 $\psi(W)$ in
 so erhält

3.

wobei α
 geschehe

4.

Rec

wobei z

Hie

und dab

 $\frac{a}{-}$

Dal

5. $\frac{d^n}{d}$

Vergleicht man dies mit 2. und setzt für Φ den Werth zurück, so erhält man für die gesuchte Function U_k den Werth

$$6. \quad U_k = \left[\frac{d^n [\varphi(x+t) - \varphi(x)]^k}{dt^n} \right]_0.$$

Entwickelt man rechts nach dem binomischen Satze, und beachtet, dass nach 3.

$$\left(\frac{d^n \varphi(x+t)^r}{dt^n} \right)_0 = \frac{d^n \varphi(x)^r}{dx^n},$$

so erhält man

$$7. \quad U_k = \frac{d^n u^k}{dx^n} - \binom{k}{1} u \cdot \frac{d^n u^{k-1}}{dx^n} + \binom{k}{2} u^2 \frac{d^n u^{k-2}}{dx^n} - \dots \pm \binom{k}{k-1} u^{k-1} \frac{d^n u}{dx^n}.$$

Insbesondere erhält man aus 6. oder 7.

$$U_1 = \frac{d^n u}{dx^n}, \quad U_2 = \frac{d^n u^2}{dx^n} - 2u \frac{d^n u}{dx^n}, \quad U_3 = \frac{d^n u^3}{dx^n} - 3u \frac{d^n u^2}{dx^n} + 3u^2 \frac{d^n u}{dx^n},$$

$$U_4 = \frac{d^n u^4}{dx^n} - 4u \frac{d^n u^3}{dx^n} + 6u^2 \frac{d^n u^2}{dx^n} - 4u^3 \frac{d^n u}{dx^n}.$$

Die ursprünglich gestellte Aufgabe ist hiernach auf die einfachere zurückgeführt: Die n ten Differentialquotienten der Potenzen von u von der ersten bis zur n ten zu bestimmen; mit Hülfe dieser Werthe gewinnt man die Functionen U_k *) und hat schliesslich (1)

$$8. \quad \frac{d^n y}{dx^n} = U_1 \frac{dF(u)}{du} + \frac{U_2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 F(u)}{du^2} + \frac{U_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3 F(u)}{du^3} + \dots + \frac{U_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^n F(u)}{du^n}.$$

Betreffs der Anwendungen dieser Formel begnügen wir uns hier mit einem Beispiele.

Für $u = x^2$ hat man

$$\varphi(x+t) - \varphi(x) = t(2x+t),$$

und daher

*) HOPPE, Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten, Leipzig 1845. SCHLÖMILCH, Compendium der höhern Analysis. 3. Aufl. Braunschweig. Bd. 2, pag. 1.

rhä]

nn

$$\frac{d^2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}$$

un

Fun

ma

n c

s R

so

lein

iese

tig

we

an

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

da

zie

m^f

iche

m^f

-

type

1.

Setzt man d
man zunächst

$$d^2z =$$

Führt man
so erhält man
davorstehenden F
wie sich von sel
formal darzustellen

2.

Man schreibt

Wendet man

3.

Hier hat man
Regeln auszurechnen
zu stellen, so dass

Verwendet man

so erhält man

Das Resultat
Klammerausdruck
Multiplication durch

So fortschreiten

4.

Für das höchste
Variablen

erhält man in gleicher

5.

14. Höhere

ter
so
ies

xx
r C

den

als Pol ist bekanntlich (§ 5, No. 12)

$$1. \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$2. \quad a^2 x + b^2 y y' - 2(x^2 + y^2)(x + y y') = 0$$

$$3. \quad a^2 + b^2 y'^2 + b^2 y y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y'^2 + y y'') = 0$$

Aus 2. ergibt sich

$$4. \quad y' = -\frac{(a^2 - 2r^2)x}{(b^2 - 2r^2)y}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Aus 3. ergibt sich, dass y'' unter der Bedingung ver-

$$5. \quad 4(x + y y')^2 + 2r^2(1 + y'^2) - (a^2 + b^2 y'^2) = 0$$

Aus 4. erhält man

$$x + y y' = \frac{x(b^2 - a^2)}{b^2 - 2r^2},$$

$$\begin{aligned} 2r^2(1 + y'^2) - (a^2 + b^2 y'^2) &= 2r^2 - a^2 + (2r^2 - a^2) \\ &= \frac{(2r^2 - a^2)}{(2r^2 - b^2)y^2} [(2r^2 - b^2)y^2 + (2r^2 - a^2)x^2] = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung 5. liefert daher nach Beseitigung der

$$6. \quad 4x^2 y^2 (a^2 - b^2)^2 + (2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2) = 0$$

Führt man die zweite Multiplication aus und beachte

$$4r^4 - 2r^2 a^2 - 2r^2 b^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2) - 2r^2 a^2 - 2r^2 b^2$$

so erhält man aus 6.

$$2(a^2 - b^2)[2x^2 y^2 (a^2 - b^2) + r^4 (x^2 - y^2)] +$$

Ersetzt man in der Klammer r^4 durch $a^2 x^2 + b^2 y^2$ nach der ersten Multiplication aus, so erkennt man, dass der Klammerinhalt r^4 daher findet man schliesslich für die Wendepunkte

$$7. \quad a^2 x^2 - b^2 y^2 = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 - b^2)} \cdot r^2$$

Aus 1. und 7. erhält man

$$8. \quad x^2 = \frac{1}{2a^2} \left(r^2 - \frac{a^2 b^2}{2(a^2 - b^2)} \right), \quad y^2 = \frac{1}{2b^2} \left(r^2 + \frac{a^2 b^2}{2(a^2 - b^2)} \right)$$

Durch Addition dieser beiden Werthe ergibt sich

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{3a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}, \quad x^2 = \frac{3a^2 b^4 (a^2 - 2b^2)}{4(a^4 - b^4)(a^2 + b^2)}, \\ y^2 &= \frac{3a^4 b^2 (2a^2 - b^2)}{4(a^4 - b^4)(a^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

Reale Wendepunkte existiren also nur, wenn $\frac{1}{2}a^2 > b^2$. In Figur 489 ist K der Kreis mit dem Halbmesser $ab\sqrt{3} : \sqrt{2(a^2 + b^2)}$; die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 , in welchen er die Fusspunktcurve durchschneidet, sind die Wendepunkte.

3. Die Wendepunkte der Curve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Die Wendepunkte einer Curve in den Coordinaten durch die Bemerkung, dass die benachbarte Normalen parallel

ändert man x_1, x_2, x_3 u

$$T = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3$$

über in
$$T_1 = T + (f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + f_{13} x_3)$$

Beide sind identisch, wenn

$$f_{11} dx_1 + f_{12} dx_2 + f_{13} dx_3 = 0$$

Nimmt man hierzu noch

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0$$

so erhält man für die Coordinaten

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit x_1 und addirt sie zu der mit $-(n-2)$ mal der zweiten, so erhält man nach dem EULER'schen Satze

$$f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + f_{13} x_3 = 0$$

so geht die Bedingung über in

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung ist vom Grade $3n(n-2)$ und hat keinen reellen Wurzelschnitt, eine cubische Gleichung hat 3 reelle oder 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

4. Die Gleichung einer Curve in den Coordinaten des Coordinatendreiecks zu Wendetangenten hat, ist von der Form

$$ax_1^3 + x_2 x_3$$

Der Schnittpunkt B von x_1 mit der Curve ist der Schnittpunkt der Curve mit der X_1 -Achse.

Die Wendepunkte sind die

$$ax_1 [12b_2 b_3 x_2 x_3 - b_1 x_1]$$

Dies zeigt, dass auch B ein Wendepunkt ist. Jede Verbindungsgerade zweier Wendepunkte ist eine Wendetangente (Anal. Geom. d. Ebene, § 15, 1).

Die Lemniscate hat die Gleichung

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

Man findet, wenn man $x^2 + y^2 = r^2$ in

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$

Die C
ist n
in P
3.

ist, we

und d

M
ihre S
A

folgt, '

M
die zu
Oscula

Di
 $b^4(a^2 -$

und sc
 $\frac{a^2 +}{a^4}$
4.

x'', y'' ,
dieselb
Die et
folglich
Normal
man M
als Kr
Krümm
Die
No. 2,
Lösung

wenn π

$$2. \quad \frac{dx}{ds} = -an \sin ns, \quad \frac{dy}{ds} = an \cos ns, \quad \frac{dz}{ds} = kn,$$

$$3. \quad \frac{d^2x}{ds^2} = -an^2 \cos ns, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -an^2 \sin ns, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Hieraus ergeben sich für X, Y, Z die Werthe

$$4. \quad X = akn^3 \sin ns, \quad Y = -akn^3 \cos ns, \quad Z = a^2 n^3.$$

Die Gleichung der Osculationsebene ist daher

$$\Omega = \sin ns (\xi - x) - \cos ns (\eta - y) + \frac{a}{k} (\zeta - z) = 0.$$

Setzt man für x, y, z die Werthe 1., so erhält man

$$5. \quad \Omega = \sin ns \cdot \xi - \cos ns \cdot \eta + \frac{a}{k} (\zeta - kns) = 0.$$

Setzt man hier $\zeta = z$, so erhält man

$$\sin ns \cdot \xi - \cos ns \cdot \eta = 0,$$

d. i. die Gleichung des Grundrisses des durch P gehenden Cylinderhalbmessers. Dies ergibt: Die Osculationsebene der Schraubenlinie in P enthält den durch P gehenden Halbmesser des Schraubencylinders, und ist daher gegen die Schraubenachse unter demselben Winkel geneigt, wie die Schraubentangente. Die Hauptnormale ist normal zur Achse.

Für den Krümmungshalbmesser ergibt sich

$$6. \quad \rho = \frac{1}{an^2} = \frac{a^2 + k^2}{a}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist also für alle Punkte der Schraubenlinie constant; die Krümmungsmittelpunkte liegen auf einer Schraubenlinie von derselben Achse und Ganghöhe.

Die Stellungswinkel der Osculationsebene folgen aus

$$7. \quad \cos \lambda = kn \sin ns, \quad \cos \mu = -kn \cos ns, \quad \cos \nu = an.$$

Hieraus folgt für den Torsionshalbmesser

$$8. \quad \rho_1 = \frac{1}{kn^2} = \frac{a^2 + k^2}{k}.$$

8. In jedem Punkte P einer Raumcurve C lässt sich eine osculirende Schraubenlinie construiren, d. i. eine Schraubenlinie, welche durch P geht, und in P die Tangente, die Osculationsebene, sowie den Krümmungshalbmesser und den Torsionshalbmesser mit der Curve C gemein hat. Sind ρ und ρ_1 Krümmungs- und Torsionshalbmesser von C im Punkte P , so bestimmen sich die Constanten a und k der osculirenden Schraubenlinie aus

$$\frac{a^2 + k^2}{a} = \rho \quad \text{und} \quad \frac{a^2 + k^2}{k} = \rho_1;$$

man erhält

$$1. \quad a = \frac{\rho \rho_1^2}{\rho^2 + \rho_1^2}, \quad k = \frac{\rho^2 \rho_1}{\rho^2 + \rho_1^2}.$$

Die Schraubenachse trifft die Hauptnormale, schneidet von ihr eine Strecke $PA = a$ ab, und ihre Projection auf die Osculationsebene ist die durch A gehende Parallele zur Curventangente; der Winkel γ der Schraubenachse und der Osculationsebene bestimmt sich aus

$$2. \quad \cos \gamma = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}}.$$

Durch diese Angaben ist die osculirende Schraubenlinie vollständig und eindeutig bestimmt.

Fläche parallel zur XZ -Ebene; die Parameterlinien $u = u_0$ sind die Querschnitte der Fläche parallel der YZ -Ebene. In der analytischen Geometrie des Raumes haben wir diese Curven benutzt, um uns eine Anschauung der zu einer gegebenen Gleichung gehörigen Fläche II. O. zu verschaffen.

3. Bewegt sich ein Punkt P um unendlich wenig entlang der Fläche in übrigens beliebiger Richtung, so erhalten u und v unendlich kleine Veränderungen du und dv von unbestimmtem Verhältnisse. Die zugehörigen Aenderungen von x, y, z ergeben sich durch Differentiation zu

$$1. \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Das vom Punkte P bei dieser Bewegung zurückgelegte Bogenelement ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Führt man hier die Werthe 1. ein, so erhält man

$$2. \quad ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

wobei e, f, g die Ausdrücke bezeichnen

$$3. \quad \begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ f &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ g &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Diese Grössen e, f, g werden in der Flächentheorie als die Fundamentalgrössen I. Ordnung bezeichnet. Sie sind von der Lage des Punktes P abhängig, hängen aber nicht von dem Verhältnisse $dv : du$, also nicht von der Richtung ab, welche das Curvenelement ds hat.

Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente einer auf der Fläche durch P gehenden Curve in P mit den Achsen bildet, so ist

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Setzt man hier die Werthe aus 1. und 2. ein, und bezeichnet das Verhältniss $dv : du$ mit k , so erhält man

$$4. \quad \alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + k \frac{\partial x}{\partial v}\right) : N, \quad \beta = \left(\frac{\partial y}{\partial u} + k \frac{\partial y}{\partial v}\right) : N, \quad \gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial u} + k \frac{\partial z}{\partial v}\right) : N,$$

$$\text{wobei} \quad N = \sqrt{e^2 + 2fk + gk^2}.$$

Für eine andere durch P auf der Fläche gezogene Curve haben $dv : du$ und α, β, γ andere Werthe $k', \alpha', \beta', \gamma'$. Der Winkel ϑ , unter dem sich die Curven in P schneiden, bestimmt sich aus

$$\cos \vartheta = \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'$$

mit Hülfe der Werthe 1. und der entsprechenden Werthe für α', β', γ' zu

$$5. \quad \cos \vartheta = \frac{e + f(k + k') + gkk'}{\sqrt{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)}}.$$

Die den Verhältnissen k und k' zugehörigen Curvenelemente sind daher normal zu einander, wenn

$$6. \quad e + f(k + k') + gkk' = 0.$$

4. Ist Π ein Punkt der Tangente einer durch P gehenden Curve auf der Fläche, und $P\Pi = R$, so gelten die Gleichungen

$$\xi - x = R \frac{dx}{ds}, \quad \eta - y = R \frac{dy}{ds}, \quad \zeta - z = R \frac{dz}{ds}.$$

Führt man hier die Werthe für dx, dy, dz ein, und eliminirt dann du und dv , so erhält man

3. $dpdx + dqdy + drdz + Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = 0$,
wobei wie immer dp, dq, dr die vollständigen Differentiale

$$dp = \frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial v} dv, \text{ u. s. w.}$$

bezeichnen. Differenzirt man No. 4, 4 nach dem Winkel zweier Tangenten einer auf der Fläche liegenden Curve, so erhält man

$$4. \quad \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{ds} + q \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{ds} + r \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{ds} + \frac{dp}{d\tau} \frac{dx}{ds} + \frac{dp}{d\tau} \frac{dy}{ds} + \frac{dr}{d\tau} \frac{dz}{ds} = 0.$$

Dividirt man 3. durch $d\tau ds$, und subtrahirt dann 4., so ergibt sich die Gleichung

$$5. \quad p \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{ds} + q \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{ds} + r \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{ds} = \frac{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}{d\tau ds}.$$

Die Grössen $\frac{d}{d\tau} \frac{dx}{ds}, \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{ds}, \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{ds}$ sind (§ 9, No. 4, 12) die Cosinus der Winkel, welche die Hauptnormale von s in P mit den Achsen bildet; die linke Seite ist daher der Cosinus des Winkels zwischen dieser Hauptnormalen und der Flächennormalen. Bezeichnen wir denselben durch θ , und den Krümmungsradius der Curve s in P mit ρ' , so folgt aus 5.

$$6. \quad \frac{1}{\rho'} \cos \theta = \frac{d\tau}{ds} \cdot \cos \theta = \frac{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}.$$

Die rechte Seite hängt nur von der Lage des Punktes P und von dem Verhältniss $dv:du$ ab, hat also unverändert denselben Werth für alle Curven s der Fläche, welche in P eine gemeinsame Tangente haben.

Eine auf der Fläche liegende ebene Curve, deren Ebene die Flächennormale in P enthält, wird als ein Normalschnitt der Fläche im Punkte P bezeichnet. Der Krümmungsradius ρ des Normalschnittes, der die zu dem Verhältnisse $du:dv$ gehörige Flächentangente berührt, ergibt sich aus 6. für $\theta = 0$. Daher ist

$$\rho' = \rho \cos \theta.$$

Hieraus ergibt sich der Satz: Der Krümmungsradius einer Curve s der Fläche in P ist gleich dem Krümmungsradius des durch die Tangente von s in P geführten Normalschnittes multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene dieses Normalschnittes und der Hauptnormalen von s .

6. Durch Ausrechnung der linken und rechten Seite überzeugt man sich leicht von der Identität

$$1. \quad (e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + Gk^2) \\ = 2[e + f(k + k') + gkk'] [E + F(k + k') + Gkk'] + (eG - 2fF + gE)(k - k')^2.$$

Sind e, f, g die Fundamentalgrössen I. O. und k, k' die Werthe von $dv:du$ für zwei in P sich rechtwinkelig schneidende Curven der Fläche, so ist

$$e + f(k + k') + gkk' = 0;$$

die Identität 1. liefert in diesem Falle

$$(e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + Gk^2) \\ = (eG - 2fF + gE)(k - k')^2.$$

Hierin sind E, F, G noch ganz beliebige Grössen; ersetzt man E, F, G durch e, f, g , so erhält man

$$2. \quad (e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2) = t^2 (k - k')^2.$$

Aus dieser Gleichung und der vorigen ergibt sich

$$\frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2} + \frac{E + 2Fk' + Gk'^2}{e + 2fk' + gk'^2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2}.$$

4. $c + f(k_1 + k_2) + gk_1k_2 =$
dies ergibt den Satz: Die Hauptkrümmungsri
einander. Sind ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsra

$$5. \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{cG - 2fF + gE}{t^2}$$

Ersetzt man in No. 6, 2 k und k' durch k_1 und

$$6. \quad (c + 2fk_1 + gk_1^2)(c + 2fk_2 + gk_2^2) =$$

Aus 3. folgt ferner für die Hauptkrümmungsricht

$$7. \quad E + F(k_1 + k_2) + Gk_1k_2$$

Setzt man nun in No. 6, 1

$$k = k_1, \quad k' = k_2, \quad c = E, \quad f =$$

und versteht unter E, F, G Hauptgrößen zweiter C
unter k_1 und k_2 die für die Hauptkrümmungsrichti
 $dv:du$, so sind 6. und 7. erfüllt und die Identität:

$$8. \quad (E + 2Fk_1 + Gk_1^2)(E + 2Fk_2 + Gk_2^2) =$$

Dividiert man 8. durch 6., so erhält man

$$9. \quad \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2}.$$

Aus 5. und 9. erkennt man, dass die Hauptkr
quadratischen Gleichung sind

$$10. \quad t^2 \cdot \frac{1}{\rho^2} - (G - 2fF + gE) \cdot \frac{1}{\rho} + E$$

Um zu entscheiden, welche Wurzel dieser Glei
gehört, bilden wir die Differenz

$$\Delta = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2},$$

und erhalten

$$\Delta = \frac{F + 2Fk_1 + Gk_1^2}{c + 2fk_1 + gk_1^2} - \frac{E + 2Fk_2}{c + 2fk_2 + gk_2^2}$$

Hieraus folgt nach Beseitigung der Nenner in F

$$\begin{aligned} \Delta(k_1 - k_2)t^2 &= \left| \frac{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}{c + 2fk_1 + gk_1^2} \right| - \left| \frac{E + 2Fk_2}{c + 2fk_2 + gk_2^2} \right| \\ &= (k_1 - k_2) \left\{ -2 \left| \frac{EF}{c f} \right| + \left| \frac{GE}{g e} \right| \right\} \end{aligned}$$

Führt man rechts für die Determinanten die We
dass der Klammerinhalt

$$\begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} (k_1 - k_2)^2$$

beträgt, und erhält hieraus für die gesuchte Differen

$$11. \quad \Delta = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} \frac{k_1 - k_2}{t^2}.$$

Ist k_1 die kleinere der beiden Größen k_1 un
kleinere oder der grössere Hauptkrümmungshalbmess

$$Fg - Gf \geq 0.$$

9. Bezeichnet θ den Winkel zwischen der Ta
Haupttangentenrichtung k_1 , so ist $90^\circ - \theta$ der Wink
 k und k_2 ; die Formel No. 3, 5 liefert

$$\cos^2 \theta = \frac{[c + f(k + k_1) + gkk_1]^2}{(c + 2fk + gk^2)(c + 2fk_1 + gk_1^2)}, \quad \sin^2 \theta = \frac{Fg - Gf}{(c + 2fk + gk^2)(c + 2fk_1 + gk_1^2)}$$

$$1. \quad \text{tang } \vartheta = \pm \sqrt{-\rho_2 : \rho_1},$$

bestimmt dann zwei Normalschnitte von der Krümmung Null, und für diese ist im Allgemeinen P ein Wendepunkt. In diesen beiden Normalschnitten tritt, wenn wir uns die Normalebene um die Normale in einer Richtung gedreht denken, der Uebergang von positiver zu negativer Krümmung ein; in den Tangenten dieser beiden Normalschnitte durchdringt die Fläche in der Umgebung von P die Tangentenebene.

Bei einem einschaligen Hyperboloide und bei einem hyperbolischen Paraboloid sind diese Normalschnitte, in welchen das Vorzeichen der Krümmung wechselt, die beiden Geraden der Fläche, welche durch den Flächenpunkt P gehen. Die Hauptkrümmungsrichtungen einer Regelfläche zweiten Grades halbiren daher in jedem Punkte der Fläche die Winkel der durch diesen Punkt gehenden Geraden der Fläche.

Haben dagegen beide Hauptkrümmungen dasselbe Zeichen, so haben gemäss der Formel

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \vartheta}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho_2}$$

alle Normalschnitte Krümmungen desselben Zeichens; alle von P aus gehenden Curvenelemente liegen daher auf derselben Seite der Tangentenebene; in der Umgebung von P hat die Fläche ausser P keinen Punkt mit der Tangentenebene gemein, und liegt ganz auf einer Seite der Tangentenebene. Dieses Verhalten zeigen die nicht geradlinigen Flächen zweiten Grades in allen ihren Punkten.

11. Eine abwickelbare Fläche ist der Ort der Tangenten ihrer Rückkehrkante (Cuspidalcurve); man kann daher die Coordinaten der Punkte einer solchen Fläche darstellen, indem man von den Gleichungen ihrer Rückkehrkante ausgeht. Sind dieselben

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u),$$

so sind die Gleichungen der Tangente dieser Curve im Punkte P

$$\frac{\xi - f_1}{f_1'} = \frac{\eta - f_2}{f_2'} = \frac{\zeta - f_3}{f_3'}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen variablen Werth dieser Quotienten mit v , so erhält man die Coordinaten ξ, η, ζ irgend eines Punktes einer Tangente, d. i. also irgend eines Punktes der von diesen Tangenten beschriebenen Fläche durch die zwei Variablen u, v ausgedrückt

$$1. \quad \xi = v f_1' + f_1, \quad \eta = v f_2' + f_2, \quad \zeta = v f_3' + f_3.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= v f_1'' + f_1', & \frac{\partial \eta}{\partial u} &= v f_2'' + f_2', & \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= v f_3'' + f_3', \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= f_1', & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= f_2', & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= f_3'. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$2. \quad p : q : r = \begin{vmatrix} f_2'' & f_2' \\ f_3'' & f_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_3'' & f_3' \\ f_1'' & f_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1'' & f_1' \\ f_2'' & f_2' \end{vmatrix}.$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} &= v f_1''' + f_1'', & \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} &= v f_2''' + f_2'', & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} &= v f_3''' + f_3'', \\ 3. \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} &= f_1'', & \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} &= f_2'', & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} &= f_3'', \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0. \end{aligned}$$

Die Grössen p, q, r folgen aus

$$pt = -m \sin u, \quad qt = m \cos u, \quad rt = -v.$$

Ferner folgt

$$E = 0, \quad F = \frac{m}{\sqrt{v^2 + m^2}}, \quad G = 0.$$

Die quadratische Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungen ist daher

$$\frac{v^2 + m^2}{\rho^2} - \frac{m^2}{v^2 + m^2} = 0;$$

sie liefert für ρ_1 und ρ_2 die beiden Werthe

$$\pm \frac{v^2 + m^2}{m}.$$

Die Hauptkrümmungen sind also dem absoluten Betrage nach gleich der Torsion der durch den Punkt auf der Schraubenfläche konstruirbaren coaxialen Schraubenlinie.

Die Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen wird

$$-(v^2 + m^2) + k^2 = 0$$

und liefert

$$k = \pm \sqrt{v^2 + m^2}.$$

Der positive Werth von k gehört zum positiven Hauptkrümmungsradius.

Für den Winkel der auf der Fläche liegenden Geraden $s = mu$, welche einen Normalschnitt von der Krümmung Null enthält, und der Hauptkrümmungsrichtung k_1 erhält man aus No. 10, 1

$$\text{tang} \vartheta = 1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

Die Krümmungsrichtungen durchschneiden also die Geraden der Fläche unter dem constanten Winkel von 45° .

13. Die Coordinaten der Punkte der centralen Fläche zweiten Grades

$$1. \quad f = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

können durch die Parameter u, v ausgedrückt werden, die den Gleichungen genügen

$$\frac{x^2}{a+u} + \frac{y^2}{b+u} + \frac{z^2}{c+u} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} - 1 = 0.$$

Die Parameterlinien sind die Schnitte von f mit confocalen Flächen. Die dem Punkte P zugehörigen Parameter sind die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a+w} + \frac{y^2}{b+w} + \frac{z^2}{c+w} = 1.$$

In Rücksicht auf $f = 0$ findet man

$$x^2 + y^2 + z^2 = u + v + a + b + c,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = (u + v + a + b + c)(a + b + c) + uv - ab - ac - bc.$$

Hieraus und aus 1. folgen die Coordinaten

$$x^2 = \frac{a(c-b)}{d}(u+a)(v+a),$$

$$y^2 = \frac{b(a-c)}{d}(u+b)(v+b), \quad \text{wobei } d = (b-c)(a-c)(b-a),$$

$$z^2 = \frac{c(b-a)}{d}(u+c)(v+c);$$

daher ist

$$2 \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{u+a}, \quad 2 \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{u+b}, \quad 2 \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{z}{u+c},$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen fallen in den Meridian und den Parallelkreis; die Hauptkrümmungen sind

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi''}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{\rho_2} = - \frac{\varphi'}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{u}.$$

§ 11. Einhüllende Curven und Flächen.

1. Wenn die Gleichung einer ebenen Curve eine unbestimmte Grösse (Parameter) α enthält, so ändern sich im Allgemeinen Lage und Gestalt der Curve, wenn man dem Parameter α nach einander verschiedene Werthe ertheilt. Giebt man α einen kleinen Zuwachs $\Delta\alpha$, so geht die Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ in die neue Curve $f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$ über. Beide Curven haben reale oder complex Schnittpunkte; wir fassen einen derselben P_1 ins Auge. Verschwindet $\Delta\alpha$, so nähert sich P_1 im Allgemeinen einer bestimmten Grenzlage P .

2. Ist die Curvengleichung auf α reducirt,

$$\varphi(x, y) = \alpha$$

und φ eine eindeutige Function von x und y , so haben zwei Curven, die zu verschiedenen Werthen von α gehören, keinen im Endlichen liegenden Schnittpunkt. Denn die Gleichungen

$$\varphi(x, y) = \alpha,$$

$$\varphi(x, y) = \alpha + \Delta\alpha,$$

sind für endliche Werthe von x und y nicht vereinbar.

3. Wenn φ eine mehrdeutige Function ist, so besteht die Curve $\varphi(x, y) = \alpha$ aus zwei oder mehreren Abschnitten, welche den verschiedenen Werthsystemen φ entsprechen. Die Curve z. B.

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha$$

ist eine Parabel mit dem Parameter α . Die beiden Abschnitte gehören den Gleichungen zu

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha, \quad x - \sqrt{x^2 - y^2} = \alpha,$$

wobei die Wurzel in beiden Gleichungen positiv zu nehmen ist. Diese Abschnitte werden durch die Punkte getrennt, für welche $x^2 - y^2 = 0$; die Coordinaten dieser Punkte sind

$$x = \alpha, \quad y = \pm \alpha.$$

4. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ die verschiedenen Werthe der n -deutigen Function φ , so besteht die Curve $\varphi = \alpha$ aus den Abschnitten

$$\varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = \alpha, \quad \dots, \quad \varphi_n = \alpha.$$

Die Theile zweier Curven

$$\varphi_i = \alpha, \quad \varphi_i = \alpha + \Delta\alpha$$

haben keinen endlichen Schnittpunkt; ein Schnittpunkt der beiden Curven

$$\varphi = \alpha \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha + \Delta\alpha$$

kann daher nur zwei Abschnitten φ_i und φ_k mit verschiedenem Index zugehören. Wir betrachten den Schnittpunkt der Abschnitte

$$\varphi_i = \alpha, \quad \varphi_k = \alpha + \Delta\alpha.$$

Nähert sich $\Delta\alpha$ der Grenze Null, so erhalten φ_i und φ_k denselben Werth α . Bezeichnen wir die Grenzpunkte zweier Abschnitte einer Curve als Verzweigungspunkte der Curve (womit keineswegs gesagt sein soll, dass in diesen Punkten verschiedene Curvenzweige in auffälliger Weise zusammenlaufen), so ergibt sich hieraus: Die Grenzlagen für die Schnittpunkte der Curven $\varphi = \alpha$ und

Der letztere Fall ist durchaus kein seltener Ausnahmefall. Wir werden später, bei Gelegenheit der Differentialgleichungen, leicht herzustellende Gruppen von Curven kennen lernen, bei welchen die Gleichungen 5. für alle Punkte der Verzweigungcurve erfüllt sind.

Die Gleichungen 5. sagen aus, dass die Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ einen Doppelpunkt hat (Differentialr. § 15); die Verzweigungcurve erscheint daher als die Curve, welche die Doppelpunkte des Curvensystems $f(x, y, \alpha) = 0$ enthält.

Durch Differentiation der Curvengleichung No. 5, 1 nach x und y ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f}{\varphi_1 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f}{\varphi_1 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{f}{\varphi_2 - \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \dots$$

Für einen Punkt der Verzweigungcurve verschwinden sämtliche Quotienten $f : (\varphi_i - \alpha)$; wenn nun keiner der Differentialquotienten $\partial \varphi_i : \partial x$, $\partial \varphi_i : \partial y$ unendlich gross ist, so tritt der Fall ein

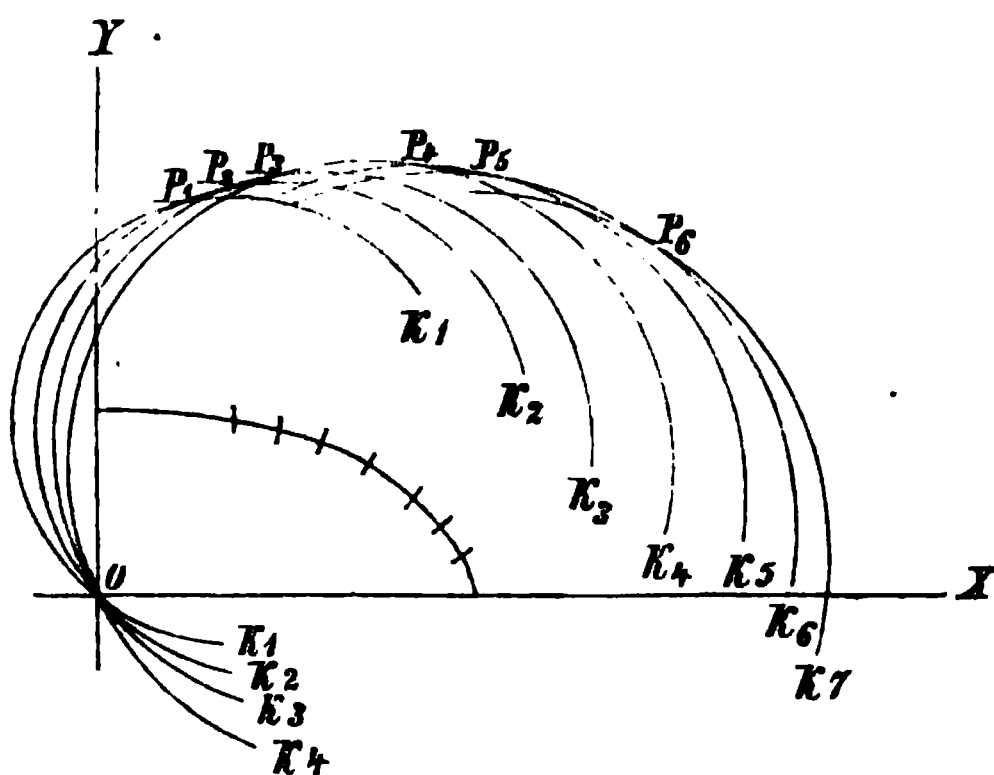
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Wenn die Gleichungen 5. nicht bestehen, so fällt nach 4. die Tangente der Verzweigungcurve in einem Punkte P derselben mit der Tangente der durch P gehenden Curve $f(x, y, \alpha) = 0$ zusammen, die Verzweigungcurve wird daher in jedem ihrer Punkte von einer Curve des Systems berührt. Aus diesem Grunde bezeichnet man die Verzweigungcurve als die Einhüllende des Curvensystems

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

8. Beispiele. A. Ist

$$1. \quad f = x^2 + y^2 - 2a \cos \alpha \cdot x - 2b \sin \alpha \cdot y = 0,$$



(M. 491.)

so besteht das Curvensystem aus Kreisen, die den Nullpunkt enthalten und deren Centra auf dem Perimeter einer Ellipse mit den Halbachsen a und b liegen. Man erhält

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2a \sin \alpha \cdot x - 2b \cos \alpha \cdot y = 0.$$

Die Gleichungen 1. und 2. ergeben

$$\cos \alpha = \frac{(x^2 + y^2) ax}{2(a^2 x^2 + b^2 y^2)},$$

$$3. \quad \sin \alpha = \frac{(x^2 + y^2) by}{2(a^2 x^2 + b^2 y^2)}.$$

Quadrirt man, addirt, und beseitigt den Nenner, so folgt

$$4a^2 x^2 + 4b^2 y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Dies ist die Fusspunktcurve der Ellipse mit den Halbachsen $2a$ und $2b$.

Aus 1. folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - 2a \cos \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y - 2b \sin \alpha;$$

wenn man die Werthe 3. einsetzt, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(b^2 - a^2) xy^2}{a^2 x^2 + b^2 y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(a^2 - b^2) x^2 y}{a^2 x^2 + b^2 y^2}.$$

$$9. \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Die Raumcurve, welche diese Durchschnittspunkte enthält, ist eine Rückkehrkante der Einhüllenden. Sie ist der gemeinsame Durchschnitt der Einhüllenden mit den Flächen, die sich durch Elimination von α aus $f = 0$ und $\partial^2 f : \partial \alpha^2 = 0$, bez. aus $\partial f : \partial \alpha = 0$ und $\partial^2 f : \partial \alpha^2 = 0$ ergeben.

11. A. Als Beispiel wählen wir zunächst die Fläche, welche alle Kugeln einhüllt, deren Centra auf einer zur X - und Y -Achse symmetrischen Ellipse liegen und die durch das Centrum der Ellipse gehen. Die Gleichungen dieser Kugeln haben die Form

$$1. \quad f = x^2 + y^2 - 2xa \cos \alpha - 2yb \sin \alpha + z^2 = 0,$$

wobei α der unbestimmte Parameter ist. Aus 1. erhält man

$$2. \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = xa \sin \alpha - yb \cos \alpha = 0,$$

$$3. \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = xa \cos \alpha + yb \sin \alpha = 0.$$

Aus 1. und 2. folgt durch Elimination von α die Gleichung der Eingehüllten zu

$$4. \quad 4a^2 x^2 + 4b^2 y^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Dies ist die Fusspunktfläche des Ellipsoids mit den Halbachsen $2a$, $2b$, $c = 0$. Sie hat im Nullpunkte einen ausgezeichneten Punkt. Betrachtet man in 1. und 2. den Parameter α als gegeben, so sind 1. und 2. die Gleichungen der Charakteristik $\Gamma(\alpha)$. Da nun unter dieser Voraussetzung die Gleichung 2. eine Ebene darstellt, die durch die Z -Achse geht, so folgt, dass die Charakteristiken Kreise sind normal zur Ebene der Ellipse; zugleich ist ersichtlich, dass die Ebene einer Charakteristik normal zu dem Ellipsendiameter ist, der zu dem durch das Centrum der betreffenden Kugel gehenden conjugirt ist. Die Elimination von α aus 2. und 3. ergibt

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0;$$

diese Gleichung wird nur vom Nullpunkte erfüllt; die Rückkehrkante der Einhüllenden schrumpft daher in diesem Falle zu einem Punkte zusammen; die Einhüllende zeigt in dieser Hinsicht ein ähnliches Verhalten wie unter den Abwickelbaren der Kegel, dessen Rückkehrkante ebenfalls nur aus einem Punkte, der Kegelspitze, besteht.

B. Suchen wir ferner die Fläche auf, welche alle Flächen II. O. umhüllt, deren Gleichungen von der Form sind

$$5. \quad K = K_1 + 2\alpha K_2 + \alpha^2 K_3 = 0,$$

wobei K_1 , K_2 , K_3 Functionen zweiten Grades bezeichnen. Man hat

$$6. \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha} = K_2 + \alpha K_3,$$

$$7. \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} = K_3.$$

Eliminirt man α aus $K = 0$ und $\partial K : \partial \alpha = 0$, so erhält man

$$8. \quad K_1 K_3 - K_2^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist daher von der vierten Ordnung und enthält die Schnittcurven der Fläche II. O. $K_2 = 0$ mit $K_1 = 0$ und $K_3 = 0$; aus 7. folgt, dass die letztere Curve die Rückkehrkante der Einhüllenden ist.

C. Enthält die Gleichung einer eingehüllten Fläche den Parameter α linear, ist sie also von der Form

$$\varphi = \varphi_1 + \alpha \varphi_2 = 0,$$

Sind a, b, c die Halbachsen des Ellipsoids, so sind die Coordinaten jedes Ellipsoidpunktes in der Form darstellbar

$$a \cos \alpha \cos \beta, \quad b \cos \alpha \sin \beta, \quad c \sin \alpha,$$

wobei α und β willkürlich sind. Die Gleichung einer Eingehüllten ist daher

$$1. \quad f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a \cos \alpha \cos \beta \cdot x - 2b \cos \alpha \sin \beta \cdot y - 2c \sin \alpha \cdot z = 0.$$

Hieraus findet man

$$2. \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = a \sin \alpha \cos \beta \cdot x + b \sin \alpha \sin \beta \cdot y - c \cos \alpha \cdot z,$$

$$3. \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta} = a \cos \alpha \sin \beta \cdot x - b \cos \alpha \cos \beta \cdot y.$$

Zur Elimination von α und β aus den Gleichungen 1. $\partial f : \partial \alpha = 0$ und $\partial f : \partial \beta = 0$ berechnen wir zunächst aus den beiden letzten

$$4. \quad \cos \beta = \frac{ax}{a^2 x^2 + b^2 y^2} \cdot cz \cot \alpha, \quad \sin \beta = \frac{by}{a^2 x^2 + b^2 y^2} \cdot cz \cot \alpha.$$

Quadrirt und addirt man, so entsteht

$$5. \quad \cot^2 \alpha = \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{c^2 z^2}.$$

Substituirt man 4. in 1., so erhält man

$$6. \quad \sin \alpha = \frac{2cz}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Aus 5. und 6. erhält man die Gleichung der Einhüllenden

$$4(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist daher die Fusspunktfläche eines Ellipsoids, dessen Achsen doppelt so gross sind, wie die Achsen des gegebenen Ellipsoids.

B. Sind K_1, K_2, K_3, K_4 Functionen zweiten Grades, so wird die Einhüllende der Flächen

$$K \equiv K_1 + \alpha K_2 + \alpha \beta K_3 + \beta K_4 = 0$$

durch Elimination von α und β aus $K = 0$ und aus

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = K_2 + \beta K_3 = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \beta} = \alpha K_3 + K_4 = 0$$

erhalten; ihre Gleichung ergibt sich zu

$$K_1 K_3 - K_2 K_4 = 0,$$

und ist daher eine Fläche vierten Grades, die durch die Schnittcurven der Flächen K_1 und K_3 mit den Flächen K_2 und K_4 geht.

§ 12. Bestimmung einiger Grenzwerthe.

$$\left(\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^\infty, \quad \infty^0 \right).$$

1. Wenn für einen Werth $x = \xi$ die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ verschwinden, so verstehen wir unter $f(\xi) : \varphi(\xi)$ den Grenzwert, dem der Quotient $f(\xi + \delta) : \varphi(\xi + \delta)$ sich nähert, wenn δ gegen die Grenze Null convergirt, haben daher für das Symbol $f(\xi) : \varphi(\xi)$ die definirende Gleichung

$$1. \quad \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \lim \frac{f(\xi + \delta)}{\varphi(\xi + \delta)}.$$

Aus der Identität

$$\frac{f(\xi + \delta)}{\varphi(\xi + \delta)} = \frac{f(\xi + \delta) - f(\xi)}{\delta} : \frac{\varphi(\xi + \delta) - \varphi(\xi)}{\delta}$$

schliessen wir

$$\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \lim \frac{f(\xi + \delta) - f(\xi)}{\delta} : \frac{\varphi(\xi + \delta) - \varphi(\xi)}{\delta}.$$

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\psi(x)} = \frac{\psi(x) - g(x)}{g(x)\psi(x)}.$$

Für $x = \xi$ verschwinden $g(x)$ und $\psi(x)$, also auch Dividend und Divisor des zuletzt gewonnenen Quotienten. Daher hat man

$$f(\xi) - \varphi(\xi) = \frac{\psi'(\xi) - g'(\xi)}{g(\xi)\psi'(\xi) + \psi(x) \cdot g'(x)}.$$

Durch dieses Verfahren erhält man z. B. den Grenzwert von

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

für $x = 0$; man hat $g(x) = x$, $\psi(x) = e^x - 1$; daher ist der gesuchte Grenzwert gleich dem Grenzwert des Quotienten

$$\frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches verschwinden für $x = 0$; mithin hat man beide nochmals zu differenzieren und erhält

$$\frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{x + 2}.$$

Der gesuchte Grenzwert ist daher $\frac{1}{2}$.

4. Durch Anwendung der Regel in No. 1 lassen sich noch einige weitere Grenzwerte bestimmen.

Wenn $f(x)$ für $x = \xi$ verschwindet, und $\varphi(x)$ für denselben Werth der Variablen unendlich gross wird, so ist für $x = \xi$

1. $\lim f(x) \cdot \varphi(x) = \lim f(x) : \frac{1}{\varphi(x)},$
2. $\lim \varphi(x) f(x) = e^{\lim f(x) \cdot \varphi(x)} = e^{\lim f(x) : [1 : \varphi(x)]},$
3. $\lim [1 + f(x)]^{\varphi(x)} = \lim e^{\varphi(x) \cdot \ln[1 + f(x)]} = \lim e^{\varphi(x) : [1 : \varphi(x)]}.$

Hierdurch sind diese Grenzwerte auf den Grenzwert des Quotienten zweier verschwindenden Functionen zurückgeführt.

§ 13. Die TAYLOR'sche Reihe.

1. Im Folgenden soll die Frage beantwortet werden, ob man im Stande ist, aus den Werthen, welche eine Function und ihre Differentialquotienten für einen bestimmten Werth $x = \xi$ der Variablen haben, auf den Werth zu schliessen, den die Function für einen andern Werth der Variablen $x = \xi + h$ annimmt, ob es also und bez. unter welchen Bedingungen es möglich ist, $f(\xi + h)$ aus

$$h, f(\xi), f'(\xi), f''(\xi), f'''(\xi), f''''(\xi) \dots$$

zu berechnen. Um einen Anhalt zu gewinnen, beantworten wir diese Frage zunächst für den einfachsten Fall, für eine algebraische ganze Function n ten Grades, und untersuchen dann, wie weit sich das Resultat auf andere Functionen übertragen lässt. Ist $f(x)$ eine ganze Function, so ist $f(\xi + h)$ eine ganze Function von h , so dass wir setzen können

$$f(\xi + h) = \varphi(h),$$

wo φ eine ganze Function bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} = \left(\frac{d^n f(\xi + h)}{d(\xi + h)^n} \right)_{h=0} = \left(\frac{d^n f(\xi + h)}{dh^n} \right)_{h=0} = \left(\frac{d^n \varphi(h)}{dh^n} \right)_{h=0} = \varphi^n(0).$$

Es genügt also, zu untersuchen, ob man

$$\varphi(h) \text{ aus } h, \varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0), \varphi'''(0) \dots$$

berechnen kann; man kann dann diese Grössen der Reihe nach durch

verschwindet für $z = x$ und $z = \xi$; folglich verschwindet der erste Differentialquotient derselben für einen zwischen x und ξ liegenden Werth der Variablen, den wir mit

$$3. \quad \xi + \vartheta(x - \xi), \quad 0 < \vartheta < 1$$

bezeichnen können. Unter der Voraussetzung, dass alle Differentialquotienten von f bis zum n ten einschliesslich für jeden zwischen x und ξ liegenden Werth der Variablen stetig und endlich sind, erhält man als Differentialquotient von 2.

$$- \frac{(x - z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{n+1}(z) + \frac{(x - z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} P.$$

Da nun dieser Ausdruck für den obigen Werth von z verschwindet, so hat man

$$4. \quad P = f^{n+1}[\xi + \vartheta(x - \xi)].$$

Ersetzt man hier und in 1. $x - \xi$ durch h , so erhält man schliesslich

$$5. \quad f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(\xi) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(\xi) + \dots \\ \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^n(\xi) + \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + 1} f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

Ersetzt man ξ durch 0 und h durch x , so folgt

$$6. \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \dots \\ \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} f^{n+1}(\vartheta x).$$

Hieraus erkennen wir, dass wir, um die Reihe No. 1, 2 auf andere als auf ganze Functionen n ten Grades auszudehnen, ein Restglied hinzufügen müssen. Dieses Glied ist noch nicht völlig bestimmt, da es den unbestimmten Bruch ϑ enthält; wir sehen aber, dass es ein Produkt aus einem bekannten Faktor und aus dem Faktor $f^{n+1}(\xi + \vartheta h)$ ist, dessen numerischer Werth jedenfalls zwischen dem grössten und kleinsten Werthe liegt, den $f^{n+1}(x)$ annimmt, wenn die Variable von ξ auf $\xi + h$ wächst; und dies genügt für die wichtigen Anwendungen, die wir von dieser Formel machen werden.

Ehe wir hierzu übergehen, wollen wir noch eine andere Form für das Restglied mittheilen. Setzt man in 1.

$$R = \frac{(x - \xi)^{p+1}}{p + 1} P,$$

und schliesst dann in derselben Weise weiter, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$- \frac{(x - z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{n+1}(z) + (x - z)^p P$$

für einen zwischen x und ξ liegenden Werth von z verschwindet. Wird dieser Werth wieder mit $\xi + \vartheta(x - \xi)$ bezeichnet, so ist

$$x - z = x - \xi - \vartheta(x - \xi) = (x - \xi)(1 - \vartheta),$$

und man erhält somit

$$P = \frac{(x - \xi)^{n-p}(1 - \vartheta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{n+1}[\xi + \vartheta(x - \xi)],$$

$$\text{folglich} \quad R = \frac{(x - \xi)^{n+1}(1 - \vartheta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(p + 1)} f^{n+1}[\xi + \vartheta(x - \xi)].$$

Setzt man $x - \xi = h$, so folgt

$$7. \quad R = \frac{h^{n+1}(1 - \vartheta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(p + 1)} f^{n+1}(\xi + \vartheta h).$$

Nimmt man $p = n$, so kommt man auf die obige Form des Restes zurück; für $p = 0$ erhält man

$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots r} f^{(r)}(x) \cdot \Delta x^r + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} f^{(r+1)}(x) \cdot \Delta x^{r+1} + \dots$
und daher

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} f^{(r)}(x) \Delta x^r [1 + A \cdot \Delta x].$$

Hierin bezeichnet A einen Faktor, der nicht unendlich gross ist; daher kann man Δx immer so wählen, dass $A \cdot \Delta x$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, dass der Faktor $1 + A \cdot \Delta x$ also positiv ist.

Dem soeben bewiesenen Satze steht für Functionen mit mehreren Variablen der folgende zur Seite: Wenn die partialen Differentialquotienten einer Function, deren Ordnung kleiner als r ist, für ein gegebenes Werthsystem der Variablen x, y, z, \dots sämmtlich verschwinden und die der r ten Ordnung nicht sämmtlich verschwinden, so kann man die Grössen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ etc. immer so klein wählen, dass die Differenz

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots)$$

dasselbe Vorzeichen hat, wie die Grösse

$$\left(\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} + \dots \right)^r f.$$

Denn man hat unter der angegebenen Voraussetzung

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) = f(x, y, z) + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots r} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right)^r f + \dots$$

und daher

$$f(x + \Delta x, \dots) - f(x, \dots) = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots r} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \dots \right)^r f \cdot \left(1 + \frac{M}{N} \right).$$

Hierin ist M in Bezug auf $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$ von der $(r+1)$ ten Ordnung, N von der r ten Ordnung; der Quotient $M:N$ kann daher durch Verkleinerung von $\Delta x, \dots$ kleiner als jede gegebene Zahl gemacht werden, insbesondere also so klein, dass $(1 + M:N)$ positiv ist.

5. Wenn man in der Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(x) + R$$

die Zahl n über alle Grenzen wachsen lassen kann, ohne dass die Bedingungen ihrer Gültigkeit verletzt werden, so hat man

$$f(x+h) = \lim \left[f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x) \right] + \lim R.$$

Hat nun bei unendlich wachsendem n der Rest R die Null zur Grenze, so ist

$$f(x+h) = \lim \left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \dots \right].$$

Man denkt sich durch die Punkte am Schlusse eine unbegrenzte Fortsetzung der Reihe angedeutet, und kann daher das Zeichen \lim weglassen, so dass man hat

$$1. \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}(x) + \dots$$

und unter denselben Voraussetzungen

$$2. \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}(0) + \dots$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man diese Reihen bei dem n ten Gliede abbricht, wird durch Abschätzung des Restgliedes R beurtheilt; nach der Voraussetzung ist er um so kleiner, je grösser n ist und kann durch Vergrösserung der Gliederzahl n kleiner als jede noch so kleine Zahl gemacht werden.

unbegrenzte Menge von abnehmenden echten Brüchen zu Faktoren hat, so folgt, dass der Grenzwert des Produktes selbst Null ist.

Die MACLAURIN'sche Reihe ist daher auf $(1+x)^\mu$ anwendbar für alle positiven oder negativen echt gebrochenen Werthe von x . Da nun

$$f(0) = 1, \quad f^n(0) = \mu(\mu-1)(\mu-2) \dots (\mu-n+1),$$

so hat man die Entwicklung

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots$$

mit dem Spielraume: $-1 < x < +1$.

Man kann nachweisen, dass die Reihe auch noch für $x = +1$ gilt, wenn μ grösser ist als -1 , und für $x = -1$, wenn μ positiv ist*).

Insbesondere hat man

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^5}{10} - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

Um $(a+b)^\mu$ zu entwickeln, wo wir $a^2 > b^2$ annehmen, setze man

$$(a+b)^\mu = a^\mu \left(1 + \frac{b}{a}\right)^\mu.$$

Daher hat man

$$(a+b)^\mu = a^\mu \left\{ 1 + \frac{\mu}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \dots \right\}.$$

7. Entwicklung von $\mathcal{L}(1+x)$.

Der k te Differentialquotient von $\mathcal{L}(1+x)$ ist

$$(-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1) (1+x)^{-k};$$

die Differentialquotienten bleiben daher endlich und stetig, so lange x grösser ist als -1 . Der Rest ist für $p=0$

$$R = (-1)^n \cdot (1-\vartheta)^n \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{x}{1+\vartheta x} \cdot \left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^n.$$

Aus der vorigen No. wissen wir, dass der Rest verschwindet, wenn der absolute Werth von x kleiner als 1 ist. Für $x=1$ ist

$$R = (-1)^n \frac{1}{1+\vartheta} \cdot \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}\right)^n$$

und daher ebenfalls $\lim R = 0$. Die MACLAURIN'sche Reihe ist daher auf $\mathcal{L}(1+x)$ für alle Werthe von x anwendbar, die der Begrenzung genügen

$$-1 < x \leq +1.$$

Da nun

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1),$$

so ergibt sich die Entwicklung

$$1. \quad \mathcal{L}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots, \\ -1 < x \leq +1.$$

Setzt man $-x$ statt x , so erhält man

$$\mathcal{L}(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \dots, \\ -1 \leq x < +1.$$

Durch Subtraction folgt hieraus

$$2. \quad \mathcal{L} \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots), \\ -1 < x < +1.$$

*) SCHLÖMILCH, Compendium der höhern Analysis, 5. Aufl. Braunschweig 1881, Bd. I, pag. III.

Setzt man $x = 1$, so erhält man die zur Berechnung von e dienende Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Für $x = -1$ erhält man

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Die Gleichung

$$a^x = e^{x \log a}$$

führt zu einer Reihe für a^x , unter der Voraussetzung, dass a positiv ist; man erhält

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x \log a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(x \log a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

9. Entwicklung von $\cos x$ und $\sin x$. Die Differentialquotienten

$$\frac{d^k \cos x}{dx^k} = \cos\left(\frac{1}{2}k\pi + x\right), \quad \frac{d^k \sin x}{dx^k} = \sin\left(\frac{1}{2}k\pi + x\right)$$

sind für alle realen Werthe von x endlich und stetig. Die Reste sind für beide Functionen

$$\frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} \cdot \cos\left[\frac{1}{2}(n+1)\pi + \theta x\right], \quad \text{bez.} \quad \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} \cdot \sin\left[\frac{1}{2}(n+1)\pi + \theta x\right],$$

und haben für jedes endliche x den Grenzwert Null. Wir erhalten somit die für jeden endlichen Werth von x gültigen Entwicklungen

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots$$

Um mit Hülfe dieser Reihen eine Tafel der goniometrischen Functionen zu berechnen, genügt es, die Reihen für den Spielraum $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}\pi$ (entsprechend dem Spielraum des Winkels von 0° bis 45°) anzuwenden. Da

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800,$$

so genügen selbst für den über $\frac{1}{4}\pi$ hinausliegenden Werth $x = 1$ die ersten 6 bez. 5 Glieder beider Reihen für eine Genauigkeit von fünf Decimalstellen.

Wir verlassen hiermit die Anwendungen der TAYLOR'schen und der MACLAURIN'schen Reihe und bemerken, dass wir allgemeine Untersuchungen über unendliche Reihen im letzten Abschnitte mittheilen werden.

§ 14. Maxima und Minima.

1. In § 5, No. 1 haben wir bereits erkannt, dass eine Function einer Variablen einen eminenten Werth, d. i. ein Maximum oder Minimum für denjenigen Werth der Variablen erreicht, für welchen der erste Differentialquotient verschwindet; wir fanden, dass ein Maximum oder Minimum eintritt, je nachdem der erste Differentialquotient vom Positiven ins Negative übergeht oder umgekehrt; für den Fall, dass der erste Differentialquotient in der Nähe des betreffenden Werths der Variablen sein Vorzeichen nicht ändert, ist damals keine Entscheidung getroffen worden. Wir geben im gegenwärtigen Abschnitte vollständigere Untersuchungen über die eminenten Werthe einer Function von einer und von mehreren Variablen und knüpfen dieselben an die Untersuchungen des vorigen Abschnitts an.

Wenn für einen Werth x der Variablen der erste Differentialquotient der Function $y = f(x)$ verschwindet, der zweite aber nicht, so hat für einen hinlänglich kleinen Werth von δx die Differenz $f(x + \delta x) - f(x)$ dasselbe Vor-

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = 4a^2 \cos 2\alpha \cos 2\varphi.$$

Zwischen den Grenzen 0 und 2π des Winkels φ verschwindet y' , wenn

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\pi, \quad \varphi_3 = \pi, \quad \varphi_4 = \frac{3}{2}\pi.$$

Für diese Werthe von φ nimmt y'' die Werthe an

$$4a^2 \cos 2\alpha, \quad -4a^2 \cos^2 \alpha, \quad 4a^2 \cos 2\alpha, \quad -4a^2 \cos 2\alpha.$$

Ist $2\alpha < \frac{1}{2}\pi$, so gehören daher zu φ_1 und φ_3 Minimalwerthe, zu φ_2 und φ_4 Maximalwerthe, und es ist

$$y_{\min} = 2a^2 \sin^2 \alpha, \quad y_{\max} = 2a^2 \cos^2 \alpha.$$

3. Auf einer Ellipse einen Punkt P so zu bestimmen, dass sein Abstand von einem gegebenen Punkte A einen eminenten Werth hat.

Sind ξ, η die Coordinaten des gegebenen Punktes, bezogen auf die Symmetrieachsen der Ellipse, und a, b die Halbachsen der letzteren, so ist

$$PA^2 = (a \cos \varphi - \xi)^2 + (b \sin \varphi - \eta)^2.$$

Um Irrationalitäten zu vermeiden, kann man die eminenten Werthe von PA^2 aufsuchen, und hat daher zu differenzieren

$$1. \quad y = (a \cos \varphi - \xi)^2 + (b \sin \varphi - \eta)^2.$$

Man erhält zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$2. \quad y' = -2a \sin \varphi (a \cos \varphi - \xi) + 2b \cos \varphi (b \sin \varphi - \eta) = 0.$$

Die Gleichung der Geraden PA ist

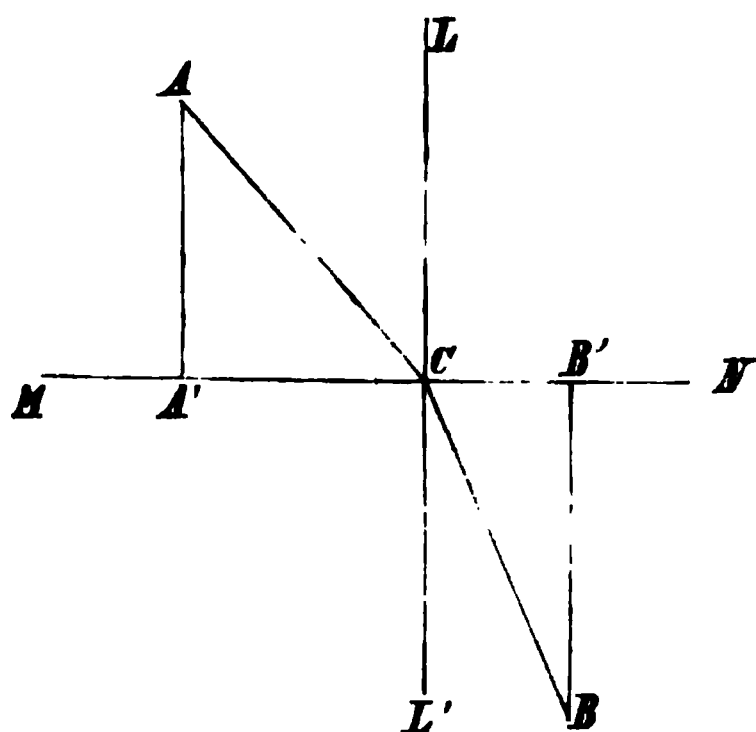
$$3. \quad (b \sin \varphi - \eta)(X - \xi) - (a \cos \varphi - \xi)(Y - \eta) = 0;$$

die Gleichung der Ellipsentangente in P ist

$$4. \quad b \cos \varphi (X - \xi) + a \sin \varphi (Y - \eta) = 0.$$

Für die gesuchten Punkte besteht die Gleichung 2.; aus 2., 3., 4. schliesst man: Die Ellipsenpunkte, deren Entfernungen von dem gegebenen Punkte A einen eminenten Werth haben, sind die Fusspunkte der durch A gehenden Normalen der Ellipse.

4. Eine Ebene ist durch eine Gerade MN getheilt; ein Punkt P bewegt sich auf der einen Halbebene mit der constanten Geschwindigkeit g , auf der



(M. 493.)

andern mit der constanten Geschwindigkeit h ; welchen Weg muss der bewegte Punkt einschlagen, um in kürzester Zeit von einem gegebenen Punkte A der ersten Halbebene zu einem gegebenen Punkte B der andern zu gelangen?

Tritt P im Punkte C über die Grenze der beiden Halbebenen, so ist klar, dass P sich geradlinig von A bis C und von C bis B bewegen muss. Ist $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, so sind die Zeiten, in welchen P die Strecken AC und CB durchläuft, $AC:g = \sqrt{a^2 + x^2}:g$, bez. $CB:g = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}:h$, und daher

die Dauer y der Bewegung von A bis B

$$1. \quad y = \frac{1}{g} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{h} \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$2. \quad y' = \frac{x}{g \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{h \sqrt{b^2 + (c-x)^2}},$$

$$3. \quad y'' = \frac{a^2}{g \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{h \sqrt{[b^2 + (c-x)^2]^3}}.$$

$$3. \quad \cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \cos \psi + \cos \gamma \cos \chi = 0,$$

$$4. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Diese Gleichungen bestimmen β und γ als Function von α , so dass r als Function von α allein erscheint. Die eminenten Werthe von r treten mit den eminenten Werthen von $1:r^2$ zugleich ein; wir bestimmen den Eintritt der letzteren, und erhalten durch Differentiation der Gleichung 2.

$$5. \quad \frac{\cos \alpha d \cos \alpha}{a^2} + \frac{\cos \beta d \cos \beta}{b^2} + \frac{\cos \gamma d \cos \gamma}{c^2} = 0;$$

ferner ergiebt die Differentiation von 3. und 4.

$$6. \quad \cos \varphi d \cos \alpha + \cos \psi d \cos \beta + \cos \chi d \cos \gamma = 0,$$

$$7. \quad \cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma = 0.$$

Der Verein der Gleichungen 5., 6., 7. wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$8. \quad \begin{vmatrix} \frac{\cos \alpha}{a^2} & \frac{\cos \beta}{b^2} & \frac{\cos \gamma}{c^2} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \varphi & \cos \psi & \cos \chi \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden derselben ist gleichbedeutend mit dem Verein der drei Gleichungen

$$\frac{\cos \alpha}{a^2} + \lambda \cos \alpha + \mu \cos \varphi = 0,$$

$$9. \quad \frac{\cos \beta}{b^2} + \lambda \cos \beta + \mu \cos \psi = 0,$$

$$\frac{\cos \gamma}{c^2} + \lambda \cos \gamma + \mu \cos \chi = 0,$$

wobei λ und μ sich aus zweien derselben bestimmen. Addirt man die Gleichungen 9., nachdem man sie der Reihe nach mit $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ multiplicirt hat, so erhält man in Rücksicht auf 2., 3., 4.

$$10. \quad \frac{1}{r^2} + \lambda = 0.$$

Setzt man dies in 9. ein, so entsteht

$$\cos \alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \mu \cos \varphi = 0,$$

$$11. \quad \cos \beta \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \mu \cos \psi = 0,$$

$$\cos \gamma \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \mu \cos \chi = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man in Rücksicht auf 3.

$$12. \quad \frac{\cos^2 \varphi}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2 \psi}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2 \chi}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}} = 0.$$

Diese Gleichung ist quadratisch für $1:r^2$ und lehrt die eminenten Werthe dieser Grösse kennen. Setzt man eine Wurzel dieser Gleichung in 11. ein, so kann man aus 11. die Cosinus der unbekannten Winkel α , β , γ bis auf den gemeinsamen Faktor μ finden; dieser ergiebt sich schliesslich aus der Gleichung 4.

7. Wir haben noch nachzutragen, dass — in seltenern Fällen — ein eminenter Werth einer Function $y = f(x)$ auch für einen Werth x der Variabeln eintreten kann, für welchen der niedrigste nicht verschwindende Differentialquotient von ungerader Ordnung ist. Ereignet es sich nämlich, dass für diesen Werth der

Die seltenen Ausnahmefälle, dass Werthsysteme der Variablen vorhanden sind, für welche die sämtlichen Differentialquotienten einer ungeraden Ordnung unstetig sind, und alle niederen verschwinden, lassen wir ausser Betracht, ebenso die Fälle, dass es Werthsysteme giebt, für welche sämtliche partialen Differentialquotienten der ersten, zweiten und dritten Ordnung, oder auch noch höhere, verschwinden. Wir beschränken uns vielmehr darauf, die Werthsysteme der Variablen aufzusuchen, für welche die partialen ersten Differentialquotienten der Function verschwinden, und entwickeln die Kriterien für den Eintritt eines Maximums oder Minimums unter der Voraussetzung, dass nicht sämtliche Differentialquotienten zweiter Ordnung verschwinden.

10. Wenn für ein Werthsystem $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ der Variablen der Function $f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$ die partialen Differentialquotienten erster Ordnung verschwinden

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

die partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung aber nicht sämtlich verschwinden, so stimmt für hinlänglich kleine Aenderungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ der Variablen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ das Vorzeichen der Differenz

$$f(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n) - f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

mit dem Vorzeichen der Grösse

$$2. \quad 2V = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f$$

überein; es kommt nun darauf an, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen V für jedes reale Verhältniss der $\xi_1 \dots \xi_n$ positiv oder negativ ist.

Man kann setzen

$$3. \quad 2V = \sum_1^n a_{ih} \xi_i \xi_h, \quad \text{wenn } a_{ih} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_h},$$

und wenn man i und h alle Werthe von 1 bis n durchlaufen lässt; bemerkt man, dass $a_{ih} = a_{hi}$, so ist ersichtlich, dass der Faktor 2 bei allen Gliedern, in welchen die beiden Faktoren ξ_i und ξ_h nicht denselben Index haben, in 3. zu Stande kommt.

Die Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ können nicht alle gleich Null genommen werden. Nehmen wir zunächst $\xi_n \geq 0$, so kann man schreiben

$$V = \xi_n^2 W, \quad \text{wobei}$$

$$4. \quad 2W = \sum a_{ih} \cdot \frac{\xi_i}{\xi_n} \cdot \frac{\xi_h}{\xi_n}.$$

Während V eine homogene quadratische Function von $\xi_1 \dots \xi_n$ ist, ist W eine nicht homogene quadratische Function von

$$\frac{\xi_1}{\xi_n}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_n}, \quad \dots, \quad \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}.$$

Das Vorzeichen von V stimmt mit dem von W überein. Soll nun für alle realen, der Null gleichen oder von Null verschiedenen Werthe der Quotienten $\xi_i : \xi_n$ die Function W positiv oder negativ sein, so muss W , da es eine stetige Function der Variablen $\xi_i : \xi_n$ ist, im ersten Falle ein Minimum haben, das positiv ist, und im zweiten ein Maximum, das negativ ist. Das dem eminenten Werthe von W entsprechende Werthsystem der Variablen $\xi_i : \xi_n$ wird aus den $(n-1)$ Gleichungen erhalten

$$5. \quad \frac{\partial W}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta_{n-1}} = 0,$$

13. Die Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ der linearen Function
 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_m x_m$
 so zu bestimmen, dass für n gegebene Werthsysteme der Variablen

$$x_{11} \quad x_{21} \quad \dots \quad x_{m1},$$

$$x_{12} \quad x_{22} \quad \dots \quad x_{m2},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_{1n} \quad x_{2n} \quad \dots \quad x_{mn},$$

die Summe der Quadrate der Unterschiede der Function und der gegebenen Zahlen u_1, u_2, \dots, u_n ein Minimum wird.

Die Function, welche in diesem Falle einen eminenten Werth annehmen soll, ist

$$f = \sum_1^n (a_1 x_{1r} + a_2 x_{2r} + a_3 x_{3r} + \dots + a_m x_{mr} - u_r)^2.$$

Wenn man zur Abkürzung setzt

$$\varphi_r = a_1 x_{1r} + a_2 x_{2r} + \dots + a_m x_{mr} - u_r,$$

so sind die Bedingungsgleichungen für den Eintritt eines eminenten Werthes

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial a_1} = x_{11} \varphi_1 + x_{12} \varphi_2 + x_{13} \varphi_3 + \dots + x_{1n} \varphi_n = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial a_2} = x_{21} \varphi_1 + x_{22} \varphi_2 + x_{23} \varphi_3 + \dots + x_{2n} \varphi_n = 0,$$

$$1. \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial a_3} = x_{31} \varphi_1 + x_{32} \varphi_2 + x_{33} \varphi_3 + \dots + x_{3n} \varphi_n = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial a_m} = x_{m1} \varphi_1 + x_{m2} \varphi_2 + x_{m3} \varphi_3 + \dots + x_{mn} \varphi_n = 0.$$

Diese Gleichungen sind linear in Bezug auf die Unbekannten a_1, a_2, \dots, a_m , und genügen, dieselben eindeutig zu bestimmen. Da man ferner hat

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} = x_{i1} x_{k1} + x_{i2} x_{k2} + \dots + x_{in} x_{kn},$$

so findet man, dass $\frac{1}{2r} \Delta_r$ die Summe der Quadrate der r gliedrigen Determinanten ist, die durch Combination von je r Columnen aus den ersten r Zeilen der Elemententafel hervorgehen

$$x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad \dots \quad x_{1n}$$

$$x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad \dots \quad x_{2n}$$

$$x_{31} \quad x_{32} \quad x_{33} \quad \dots \quad x_{3n}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_{m1} \quad x_{m2} \quad x_{m3} \quad \dots \quad x_{mn}.$$

Mithin sind alle Δ_r positiv; folglich liefern die angegebenen Lösungen ein Minimum.

14. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen. Wenn ein System von n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n gesucht wird, für welches die Function $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ einen eminenten Werth erhält, während zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllt werden sollen

1. $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \dots \quad \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$
 so kann man zunächst aus dem m Bedingungsgleichungen m von den Variablen x_1, \dots, x_n als Functionen der übrigen ausdrücken und diese Werthe in f substituieren; dann erhält man f als Function von $(m - n)$ unabhängigen Variablen und kann dann wie im vorigen Falle weiter verfahren. Diese Methode bringt

sich auf dieselbe unabhängige Variable x_i beziehen, bedingt das Verschwinden ihrer Determinante

$$4. \quad \Delta_i \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus den $n - m$ Gleichungen

$$\Delta_{m+1} = \Delta_{m+2} = \Delta_{m+3} = \dots = \Delta_n = 0$$

und den Gleichungen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_m = 0$$

erhält man die gesuchten Werthsysteme der Variablen. Setzt man in 4. für i der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... m , so erhält man Determinanten, die identisch verschwinden, weil in ihnen die erste Colonne mit einer späteren identisch ist; man hat daher die n Gleichungen

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_m = \Delta_{m+1} = \dots = \Delta_n = 0,$$

von denen die ersten m identisch sind, die übrigen nicht. Die Determinanten Δ_i weichen bloss in Bezug auf die erste Colonne der Elemente von einander ab. Bezeichnet man daher mit $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ die Coefficienten der Glieder der ersten Colonne in jeder der Determinanten Δ_i , so ist

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \dots + \mu_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0.$$

Dividirt man durch μ und bezeichnet $\mu_r : \mu$ mit λ_r , so erhält man die Gleichungen

$$5. \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Da diese n Gleichungen im Verein mit den m Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ausreichen, so kann man sie zur Lösung des Problems benutzen. Dieselben $(n + m)$ Gleichungen werden aber auch erhalten, wenn man das unbedingte Problem stellt: Die Werthsysteme der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ zu finden, welche die Function

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

zu einem Maximum oder Minimum machen. Denn die partialen Differentialquotienten von F nach den x führen auf die Gleichungen 5., und die nach den λ führen auf die Gleichungen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = 0.$$

Wir erhalten somit folgende Regel: Um die Werthsysteme der Variablen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ zu finden, welche die Function

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

zu einem Maximum oder Minimum machen und die zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_m = 0,$$

bilde man die Function

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m,$$

und suche die Systeme der Variablen

$$6. \quad \frac{\lambda_k}{\cos(H-1, h)} = \frac{\lambda_{k+1}}{\cos(H-1, h-1)};$$

aus 5. und 6.

$$7. \quad \frac{d_{k-1}}{\sin(h, h-1)} = \frac{\lambda_{k+1}}{\cos(H-1, h-1)} = \frac{\lambda_k}{\cos(H-1, h)}.$$

Das Dreieck $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ lehrt

$$8. \quad \frac{d_{k-1}}{\sin(h, h-1)} = \frac{c_{k-1}}{\sin(H-1, h)} = \frac{c_k}{\sin(H-1, h-1)};$$

folglich ist

$$9. \quad \lambda_{k+1} = c_k \cot(H-1, h-1).$$

Ersetzt man in 7. und 8. h durch $h+1$, so erhält man für das Dreieck $P_kP_{k+1}P_{k+2}$

$$10. \quad \frac{d_k}{\sin(h+1, h)} = \frac{\lambda_{k+2}}{\cos(H, h)} = \frac{\lambda_{k+1}}{\cos(H, h+1)} = \frac{c_k}{\sin(H, h+1)} = \frac{c_{k+1}}{\sin(H, h)}.$$

Hieraus folgt

$$11. \quad \lambda_{k+1} = c_k \cot(H, h+1).$$

Aus 9. und 11. ergibt sich

$$\cot(H-1, h-1) = \cot(H, h+1),$$

folglich liegen die Punkte $P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$ auf einem Kreise. Der Halbmesser r des dem Maximalpolygon umschriebenen Kreises wird aus der transcendenten Gleichung bestimmt

$$\arcsin \frac{c_1}{2r} + \arcsin \frac{c_2}{2r} + \dots + \arcsin \frac{c_n}{2r} = \pi,$$

die durch Annäherung aufgelöst werden kann.

16. Welches Polygon unter allen Polygonen von gegebener Eckenzahl und gegebenem Umfange hat die grösste Fläche?

Ist n Anzahl der Ecken und c der Perimeter des Polygons, so ist die Function F

$$1. \quad F = \sum_1^n (x_{k-1} - x_{k+1}) y_k + \lambda \left[\sum_1^n \sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2} - c \right] = 0.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = -y_{k-1} + y_{k+1} + \lambda \left[\frac{x_k - x_{k+1}}{\sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2}} - \frac{x_{k-1} - x_k}{\sqrt{(x_{k-1} - x_k)^2 + (y_{k-1} - y_k)^2}} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = x_{k-1} - x_{k+1} + \lambda \left[\frac{y_k - y_{k+1}}{\sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2}} - \frac{y_{k-1} - y_k}{\sqrt{(x_{k-1} - x_k)^2 + (y_{k-1} - y_k)^2}} \right] = 0.$$

Durch Anwendung der Bezeichnungen in der vorigen Aufgabe gehen diese Gleichungen über in

$$3. \quad d_{k-1} \cdot \cos(H-1, y) = \lambda [\cos(h, x) - \cos(h-1, x)],$$

$$4. \quad d_{k-1} \cdot \cos(H-1, x) = -\lambda [\cos(h, y) - \cos(h-1, y)].$$

Quadrirt und addirt man, so entsteht

$$d_{k-1}^2 = 2\lambda^2 [1 - \cos(h-1, h)],$$

daher ist

$$5. \quad d_{k-1} = 2\lambda \sin \frac{1}{2}(h-1, h).$$

Ferner ergibt sich, wenn man 3. mit $\cos(h-1, y)$ und 4. mit $\cos(h-1, x)$ multiplicirt und addirt

$$6. \quad d_{k-1} \cos(H-1, h-1) = \lambda \sin(h-1, h).$$

für einen singulären Punkt ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$; die Gleichung der Tangentenebene der Fläche $f = 0$ im Punkte x, y, z ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y} (\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z} (\zeta - z) = 0,$$

und für einen singulären Punkt der Fläche hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Wir sehen daher: In einem singulären Punkte einer Curve ist die Tangente, in einem singulären Punkte einer Fläche die Tangentenebene unbestimmt.

3. Ist P ein Punkt der Curve $f = 0$, so sind die Coordinaten eines Punktes Π der Geraden, die durch P geht und mit der X -Achse den Winkel α bildet

$$1. \quad \xi = x + r \cos \alpha, \quad \eta = y + r \sin \alpha,$$

wobei r die Strecke $P\Pi$ bezeichnet. Um die Punkte zu erhalten, welche die Gerade mit der Curve gemein hat, setzt man die Werthe 1. in die Curven-gleichung ein; diese enthält dann nur noch die Unbekannte r . Entwickelt man die Function $f(x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha)$ nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

$$2. \quad f(x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha) = f(x, y) + r \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right) f + \frac{1}{2} r^2 \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \frac{1}{2 \cdot 3} r^3 \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f + \dots$$

Nach der Voraussetzung ist $f(x, y) = 0$. Die Gleichung für r enthält daher in allen Gliedern den Faktor r , und liefert eine Wurzel $r = 0$, die dem Punkte P zugehört. Die übrigen Wurzeln r ergeben sich aus der Gleichung

$$3. \quad \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right) f + \frac{1}{2} r \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \frac{1}{6} r^2 \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f + \dots = 0.$$

Ist nun P ein singulärer Punkt, so verschwindet das erste Glied der linken Seite für jeden Werth von $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$; die Gleichung 3. hat daher eine Wurzel $r = 0$. Sind die partialen Differentialquotienten zweiter Ordnung nicht sämmtlich gleich Null, so sind die andern Wurzeln r der Gleichung 3. im Allgemeinen von Null verschieden. Wir schliessen daher: Jede Gerade, die durch einen singulären Punkt P einfachster Art geht, hat in P mit der Curve zwei Schnittpunkte.

Ein solcher Punkt wird daher als Doppelpunkt der Curve bezeichnet.

Ist P ein Doppelpunkt, so werden die Punkte, in welcher eine durch P gehende Gerade die Curve noch ausser in P durchschneidet, aus der Gleichung gewonnen

$$4. \quad \frac{1}{2} \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \frac{r}{6} \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f + \dots = 0.$$

Wählt man die Gerade so, dass

$$5. \quad \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \alpha = 0,$$

so hat die Gleichung 4. eine Wurzel $r = 0$. Die Gerade hat alsdann in P drei Punkte mit der Curve gemein; sie giebt eine Richtung an, in welcher man vom Doppelpunkte aus auf der Curve fortschreiten kann und heisst daher Tangente im Doppelpunkte.

eben

de

ix s

\leq
 \equiv
 \geq

.te

elp

rsch

al

Rück

te.

au

em

Pur

gent

$= \frac{\eta}{\dots}$

+

de.

lnu

x^2

$2ex$

$2fx$

$\frac{f}{y} =$

punkt, daher ist dieser Doppelpunkt von f ; mehr als
nicht haben; denn hätte eine Curve III. O. zwei I
würde die Gerade AB in A zwei und in B zwei P
haben, hätte also vier Schnittpunkte mit der Curve
Thatsache, dass eine Gerade mit einer (eigentlicher
Gerade oder in drei Gerade zerfallenden) Curve III.
haben kann. Man hat

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ax + by + e, \quad \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = bx + cy + f,$$

Für den Doppelpunkt $x = y = 0$ erhalten diese
die Werthe e, f, g ; daher ist die Gleichung
der Doppelpunktstangenten

$$ex^2 + 2fxy + gy^2 = 0.$$

Der Nullpunkt ist ein Doppelpunkt im
engem Sinne, wenn $eg - f^2 < 0$, ein Rück-
kehrpunkt, wenn $eg - f^2 = 0$, ein isolirter
Punkt, wenn $eg - f^2 > 0$.

5. Zieht man durch den Nullpunkt
Gerade, und trägt vom Schnittpunkte B
dieser Geraden mit einer Parallelen AA_1
zur Abscissenachse auf der Geraden nach

P_1

beiden Seiten hin eine gegebene Strecke $BP = P_1B = m$ ab, so ist der Ort der Punkte P und P_1 eine Curve, die unter dem Namen der Conchoide des NIKOMEDES bekannt ist. Ist $OA = p$, und bezeichnet man Radius vector und Anomalie eines Curvenpunktes r und φ , so gelten für P und P_1 die Gleichungen

$$(r \mp m) \sin \varphi = p.$$

Ersetzt man $\sin \varphi$ durch $y:r$, so erhält man

$$\mp m \frac{y}{r} = p - y,$$

und hieraus die rationale Gleichung

$$1. \quad f = (x^2 + y^2)(p - y)^2 - m^2 y^2 = 0.$$

Hieraus findet man

$$2. \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = x(p - y)^2, \quad 3. \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = (y - p)(x^2 + 2y^2 - py) - m^2 y,$$

$$4. \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (p - y)^2, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x(y - p), \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + 6y^2 - 6py + p^2 - m^2.$$

Aus 2. folgt für Doppelpunkte

$$5. \quad x = 0, \text{ oder } y = p.$$

Setzt man das erstere in 1. und 3. ein, so ergibt 1.

$$6. \quad y^2 = 0, \text{ oder } (p - y)^2 = m^2, \text{ und } 3.$$

$$7. \quad y = 0, \text{ oder } (y - p)(2y - p) = m^2.$$

Hieraus folgt, dass der Nullpunkt den Gleichungen 1., 2. und 3. genügt; da er die Grössen 4. nicht zu Null macht, so ist er ein Doppelpunkt der Conchoide. Die beiden andern Werthe für y unter 6. und 7. stimmen nicht überein; der in 5. noch angegebene Werth $y = p$ befriedigt 3. nur unter der Annahme $x = \infty$; beide Werthe genügen auch 1., und machen 4. nicht gleich Null, sind also Coordinaten eines zweiten Doppelpunktes.

Setzt man in den Formeln 4. $x = y = 0$, so erhält man die Gleichung der Doppelpunktstangenten des Nullpunktes

$$8. \quad px^2 + (p^2 - m^2)y^2 = 0.$$

Ist $p > m$, so sind diese Tangenten conjugirt complex; der Nullpunkt wird in diesem Falle zwar durch die Construction der Curve nicht erhalten, gehört aber als isolirter Punkt zu der durch die Gleichung 1. definirten Curve. Ist $p = m$, so hat die Curve in O einen Rückkehrpunkt und OY ist Rückkehrtangente; ist $p < m$, so ist O ein eigentlicher Doppelpunkt.

Der zweite Doppelpunkt ist der unendlich ferne Punkt der Geraden AA_1 . Für die Coordinaten desselben ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ unbestimmt}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \infty,$$

die Gleichung der Doppelpunktstangenten ist daher

$$(y - p)^2 = 0;$$

der unendlich ferne Punkt der Geraden AA_1 ist somit ein Rückkehrpunkt, und AA_1 die zugehörige Rückkehrtangente der Conchoide.

6. Die Curve

$$1. \quad f = (x^2 - a^2)^2 - ay^2(3a + 2y) = 0^*) \text{ liefert}$$

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 - a^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6ay(a + y),$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 - a^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6a(a + 2y).$$

*) SALMON-FIEDLER, Analyt. Geom. der höh. ebenen Curven, Leipzig 1873, 1. Kap., 2. Abschn.

so können Doppelpunkte in der Weise auftreten, dass zwei verschiedene Werthe u_1, u_2 des Parameters dieselben Coordinatenwerthe x, y ergeben, während die Differentialquotienten φ' und ψ' und damit die Tangente

$$\psi' \cdot (\xi - x) - \varphi' \cdot (\eta - y) = 0$$

für die beiden Parameter verschiedene Werthe annehmen. Aendert sich u continuirlich wachsend oder abnehmend von u_1 zu u_2 , so beschreibt dabei P eine Curvenschleife, die zu dem Ausgangspunkte zurückkehrt.

Diese Schleife wird immer kleiner, je kleiner die Differenz $u_1 - u_2$ ist; wenn u_2 von u_1 nur unendlich wenig verschieden ist, so verschwindet die Schleife und der Doppelpunkt geht in einen Rückkehrpunkt über. Die Bedingung für einen Rückkehrpunkt ist also, dass einer unendlich kleinen Aenderung von u unendlich kleine Aenderungen höherer Ordnung von x und y entsprechen; daher ist für einen Rückkehrpunkt

$$\frac{dx}{du} = 0, \quad \frac{dy}{du} = 0.$$

A. Für die Curve, welche durch die Gleichungen dargestellt ist

$$x = \frac{(u-a)(u-b)}{u-c} + d, \quad y = \frac{(u-a)(u-b)}{u-c_1} + d_1$$

ergibt sich derselbe Punkt $x = d, y = d_1$ für die beiden Parameterwerthe $u = a$ und $u = b$. Die Differentialquotienten der Coordinaten sind

$$\frac{dx}{du} = \frac{(u-a)(u-c) + (u-b)(u-c) - (u-a)(u-b)}{(u-c)^2},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u-a)(u-c_1) + (u-b)(u-c_1) - (u-a)(u-b)}{(u-c)^2}.$$

Für $u = a$ und $u = b$ folgt

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_a = \frac{a-b}{a-c}, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_a = \frac{a-b}{a-c_1},$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_b = \frac{b-a}{b-c}, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_b = \frac{b-a}{b-c_1}.$$

Daher ist der Punkt d, d_1 Doppelpunkt und die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkte sind

$$\frac{x-d}{a-c_1} - \frac{y-d_1}{a-c} = 0, \quad \frac{x-d}{b-c_1} - \frac{y-d_1}{b-c} = 0.$$

B. Die Cycloide hat die Gleichungen

$$x = a(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u);$$

daher ist

$$\frac{dx}{du} = a(1 - \cos u), \quad \frac{dy}{du} = a \sin u.$$

Beide Differentialquotienten verschwinden für die Parameterwerthe $u = 0, 2\pi, 4\pi$ u. s. w. Die zugehörigen Punkte sind daher Rückkehrpunkte; die Rückkehrtangenten sind normal zur Abscissenachse.

9. Doppelpunkte an Flächen. Um die Punkte Π zu erhalten, die eine durch den Punkt P der Fläche $f(x, y, z) = 0$ unter den Richtungswinkeln α, β, γ gelegte Gerade mit der Fläche gemein hat, setzt man

$$\xi = x + r \cos \alpha, \quad \eta = y + r \cos \beta, \quad \zeta = z + r \cos \gamma$$

in die Flächengleichung an die Stelle von x, y, z und bestimmt aus der resultierenden Gleichung die Unbekannte r . Entwickelt man nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

für das Centrum als Pol ist

$$1. \quad f = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Die partialen Differentialquotienten erster Ordnung sind

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2(a^2 - 2r^2)x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(b^2 - 2r^2)y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(c^2 - 2r^2)z,$$

wobei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Functionen 1. und 2. verschwinden nur für $x = y = z = 0$.

Die zweiten partialen Differentialquotienten von f sind

$$3. \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2a^2 - 4r - 8x^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2b^2 - 4r - 8y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 2c^2 - 4r - 8z^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -8xy, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= -8xz, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= -8yz. \end{aligned}$$

Sie verschwinden für den Nullpunkt nicht; derselbe ist daher ein Doppelpunkt der Fusspunktfläche.

Der Tangentenkegel im Nullpunkte ist, wie sich aus 3. ergibt:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 0;$$

derselbe ist imaginär, und daher der Nullpunkt kein Doppelpunkt im engeren Sinne, sondern ein isolirter Punkt.

B. Für das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist die Gleichung der Fusspunktfläche, wieder mit dem Centrum als Pol,

$$f = a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2 z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(a^2 - 2r^2)x, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(b^2 - 2r^2)y, & \frac{\partial f}{\partial z} &= -2(c^2 + 2r^2)z; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2a^2 - 4r - 8x^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2b^2 - 4r - 8y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= -2c^2 - 4r - 8z^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -8xy, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= -8yz, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= -8xz. \end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist daher Doppelpunkt, und der Tangentenkegel im Doppelpunkte hat die Gleichung

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2 z^2 = 0.$$

Ist $a = 0$, artet also das Hyperboloid in eine hyperbolische Grenzfläche aus, so artet der Tangentenkegel im Doppelpunkte zu zwei Ebenen aus

$$b^2 y^2 - c^2 z^2 = 0.$$

12. Trägt man auf jeder durch das Centrum eines dreiachsigen Ellipsoids gehenden Geraden vom Centrum aus nach beiden Seiten hin je zwei Strecken ab, die der grossen und der kleinen Halbachse des zur Geraden normalen Diametralschnittes gleich sind, so erhält man die Punkte der FRESNEL'schen Wellenfläche*).

Ist P ein Punkt der Wellenfläche und sind φ, ψ, χ die Richtungswinkel von OP , so genügt $OP = r$ der Gleichung § 14 No. 6, 12

$$\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 \cos^2 \psi}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 \cos^2 \chi}{r^2 - c^2} = 0.$$

*) Der Name der Fläche bezieht sich auf die Bedeutung, die sie für die Theorie der Aetherschwingungen in optisch zweiachsigen Mitteln hat.

Unter diesen Gruppen enthält eine vier reale, die imaginäre Punkte; ist $a > b > c$, so sind die vier Punkte real; einer derselben ist in der Figur mit Δ bezeichnet. vier realen Doppelpunkte ergeben sich aus

$$5. \quad x^2 = c^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = a^2$$

Die zweiten partialen Differentialquotienten von f sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A + 8a^2 x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2B + 8b^2 y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C + 8c^2 z^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4(a^2 + b^2)xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4(a^2 + c^2)xz, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 4(b^2 + c^2)yz$$

Für einen Doppelpunkt ist $y = A = C = 0$, und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8a^2 x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(a^2 x^2 + b^2 z^2) + 2b^2(x^2 + z^2 - a^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4(a^2 + c^2)xz$$

Setzt man aus 5. die Werthe ein, so erhält man die Gleichung des Kegels im Doppelpunkte

$$a^2 c^2 (b^2 - a^2) (\xi - x)^2 - \frac{1}{4} (c^2 - a^2) (b^2 - a^2) (\xi - z)^2 + a^2 c^2 (c^2 - b^2) (\xi - z)^2 + a c (a^2 + c^2) \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} (\xi - x)(\xi - z) = 0$$

Dieser Kegel ist symmetrisch gegen die XZ -Ebene. Der fallender Hauptschnitt wird aus den beiden Tangenten im Doppelpunkte an den Kreis und die Ellipse gelegt, in welcher die XZ -Ebene geschnitten wird; die Achse des Kegels ist der Winkel dieser Tangenten.

Die Wellenfläche besteht aus zwei Mänteln; einem inneren, dessen Punkte von den grossen Halbachsen der Diametralschnitt inneren, dessen Punkte von den kleinen Halbachsen her ganz von dem äusseren eingeschlossen. Beide Mäntel haben die vier Doppelpunkte. Wie man aus den Coordinaten erkennt, sind die Geraden $O\Delta$ normal zu den Kreisschnitten der Umgebung von Δ hat der innere Mantel eine Spitze, der äussere eine förmige Vertiefung. Der Übergang aus dem inneren in den äusseren Mantel erfolgt entlang der Oberfläche der Wellenfläche.

13. Betrachtet man eine Curve als Einhüllende ihrer singulären Tangenten auftreten, die den Doppelpunkten einer als Punktgebilde aufgefassten Curve entsprechen.

Sind u, v und $u + \Delta u, v + \Delta v$ die Coordinaten zweier Punkte, die die Coordinaten ihres Schnittpunktes, so ist bekanntlich

$$\xi : \eta = - \Delta v : \Delta u.$$

Man kann daher setzen

$$1. \quad \Delta u = \eta t, \quad \Delta v = - \xi t, \\ \text{wobei } t \text{ unbestimmt ist; ändert sich } t \text{ von } -\infty \text{ bis } +\infty, \\ \text{so gehen } u + \Delta u, v + \Delta v \text{ den Punkt } \xi, \eta.$$

Die Geraden $u + \Delta u, v + \Delta v$, welche durch den Punkt (ξ, η) gehen und die Curve $f(u, v) = 0$ berühren, werden aus der Gleichung berechnet

$$2. \quad f(u + \Delta u, v + \Delta v) = f(u + \eta t, v - \xi t) = 0$$

tangente im engern Sinne; sind sie conjugirt complex, so enthält T keinen realen Punkt der Curve und ist daher eine isolirte Tangente.

14. Beispiel. Sind P_1 und P_2 lineare Functionen von Linienkoordinaten, so werden durch die Gleichung

$$P_1 P_2 + \lambda (P_1^2 + a P_1 P_2 + b P_2^2) = 0$$

für ein veränderliches λ Punktpaare dargestellt, die auf der Geraden $P_1 P_2$ liegen und eine quadratische Involution bilden. Sind Q_1 und Q_2 ebenfalls lineare Functionen in Linienkoordinaten, so bilden die Punkte

$$Q_1 + \lambda Q_2 = 0$$

eine Punktreihe, die mit der Involution projectiv ist. Die Geraden, welche entsprechende Punkte der Involution und der Reihe verbinden, genügen der Gleichung

$$f = (P_1^2 + a P_1 P_2 + b P_2^2) Q_1 - P_1 P_2 Q_1 = 0;$$

dies ist die Gleichung einer Curve dritter Klasse. Man erhält

$$\frac{\partial f}{\partial u} = P_1 M + P_2 N, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = P_1 M' + P_2 N',$$

wobei M, N, M', N' leicht zu bildende Functionen sind. Man sieht hieraus dass die drei Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

durch die Gerade erfüllt werden, deren Coordinaten den Gleichungen

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0$$

genügen. Die Curve $f = 0$ hat also die Gerade $P_1 P_2$ zur Doppeltangente.

15. Sind u, v, w , und $u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w$ die Coordinaten zweier Tangentialebenen T, T' der Fläche $f(u, v, w) = 0$, sind ferner u, v, w die Coordinaten einer durch den Schnitt von T und T' gehenden Ebene \mathfrak{Z} , so ist bekanntlich (vergl. § 6, No. 9, 4)

$$\frac{u - u}{\Delta u} = \frac{v - v}{\Delta v} = \frac{w - w}{\Delta w}.$$

Man kann daher, mit t eine unbestimmte Grösse bezeichnend, setzen

$$1. \quad u = u + t \cdot \Delta u, \quad v = v + t \cdot \Delta v, \quad w = w + t \cdot \Delta w.$$

Die Tangentialebenen von f , welche durch die Gerade TT' gehen, werden somit aus der Gleichung erhalten

$$f(u + t \cdot \Delta u, v + t \cdot \Delta v, w + t \cdot \Delta w) = 0.$$

Entwickelt man nach dem TAYLOR'schen Satze, so erhält man

$$2. \quad f(u, v, w) + t \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w} \right) f + \frac{1}{2} t^2 \cdot \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w} \right)^2 f + \frac{1}{6} \cdot t^3 \left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \Delta w \frac{\partial}{\partial w} \right)^3 f + \dots = 0.$$

Nach der Voraussetzung ist $f(u, v, w) = 0$; die Gleichung 2. hat daher eine Wurzel $t = 0$; ihr gehört die Ebene T zu.

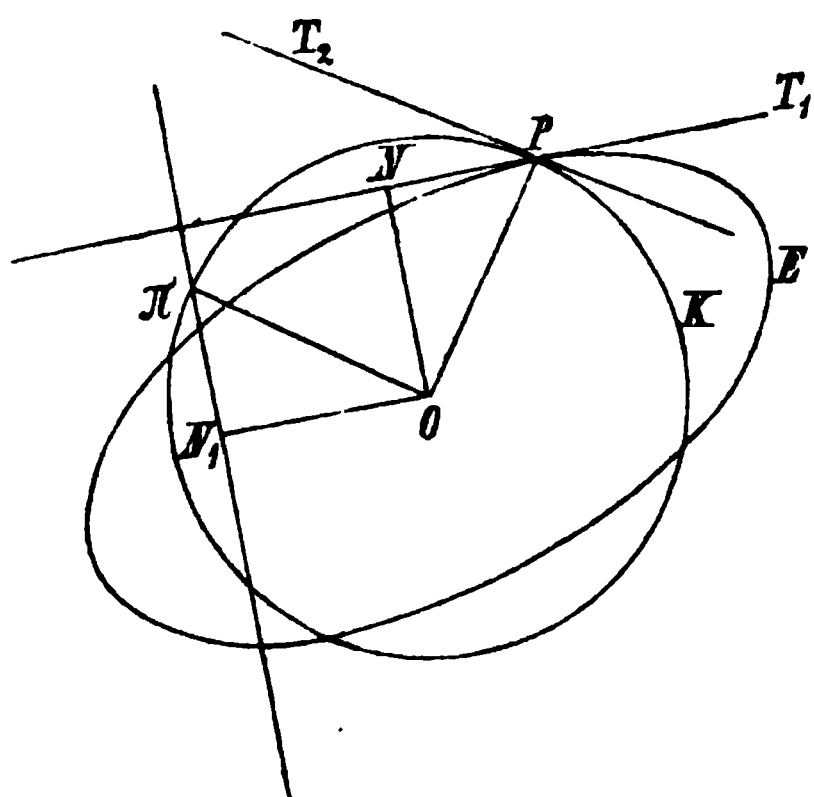
Werden $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ so gewählt, dass

$$3. \quad \Delta u \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \Delta v \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \Delta w \cdot \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

so hat die Gleichung 2. noch eine Wurzel $t = 0$; es fallen denn also zwei durch die Gerade TT' gehende Tangentenebenen der Fläche in T zusammen. Bezeichnet man die Coordinaten von T' mit U, V, W , so ist

$$\Delta u = U - u, \quad \Delta v = V - v, \quad \Delta w = W - w,$$

aus der Gleichung 3. erhält man daher



(M. 497).

Macht man daher auf einer durch O gehenden Normalen zu OPQ die Strecke $O\Pi = OP$, so ist Π ein Punkt der Wellenfläche; wir wollen ihn als den mit P verbundenen Punkt bezeichnen.

Die Gleichungen der Ebenen T_1 und T_2 sind, wenn x, y, z laufende Coordinaten bezeichnen, und $OP = r$ gesetzt wird

$$1. \quad T_1 = \frac{x}{a^2}x + \frac{y}{b^2}y + \frac{z}{c^2}z - 1 = 0.$$

$$T_2 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

Die Ebene OQQ_1 geht durch die Schnittlinie $T_1 T_2$ und durchs Centrum; ihre Gleichung ist daher

$$r^2 T_1 - T_2 = x \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) x + y \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 \right) y + z \left(\frac{r^2}{c^2} - 1 \right) z = 0.$$

Die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene, d. i. der Geraden $O\Pi$ folgen hieraus zu

$$2. \quad \cos \varphi = \frac{x \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)}{rM}, \quad \cos \psi = \frac{y \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 \right)}{rM}, \quad \cos \chi = \frac{z \left(\frac{r^2}{c^2} - 1 \right)}{rM}.$$

Hierbei ist

$$3. \quad M^2 = \frac{1}{r^2} \left[x^2 \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^2 + y^2 \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 \right)^2 + z^2 \left(\frac{r^2}{c^2} - 1 \right)^2 \right] = r^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) - 1.$$

Aus 2. ergeben sich die Coordinaten des mit P verbundenen Punktes der Wellenfläche zu

$$4. \quad \xi = \frac{x}{M} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right), \quad \eta = \frac{y}{M} \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 \right), \quad \zeta = \frac{z}{M} \left(\frac{r^2}{c^2} - 1 \right).$$

Aus der von Nennern freien Gleichung der Wellenfläche erhält man die Gleichung der Tangentenebene im Punkte Π

$$T = \xi [\varphi + a^2(r^2 - b^2 - c^2)](x - \xi) + \eta [\varphi + b^2(r^2 - c^2 - a^2)](y - \eta) + \zeta [\varphi + c^2(r^2 - a^2 - b^2)](z - \zeta) = 0,$$

wenn

$$\varphi = a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2,$$

Legt man Ebenen T_1', T_2', T' parallel zu T_1, T_2, T durch den Nullpunkt, so sind deren Gleichungen

$$T_1' = \frac{x}{a^2}x + \frac{y}{b^2}y + \frac{z}{c^2}z = 0,$$

$$T_2' = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$T' = \xi [\varphi + a^2(r^2 - b^2 - c^2)]x + \eta [\varphi + b^2(r^2 - c^2 - a^2)]y + \zeta [\varphi + c^2(r^2 - a^2 - b^2)]z = 0.$$

Hierzu fügen wir noch die Gleichung der Ebene OQQ_1

$$T_3' = \xi x + \eta y + \zeta z = 0,$$

und beachten, dass die Ebenen T_1', T_2', T_3' ein Büschel bilden. Die Funct m T' lässt sich in folgender Weise unter Benutzung der Formeln 4. zerlegen

$$\begin{aligned} T' &= \varphi \cdot T_3' + \frac{r^2}{M} [(r^2 - a^2)x^2 + (r^2 - b^2)y^2 + (r^2 - c^2)z^2] \\ &\quad - \frac{1}{M} [(b^2 + c^2)(r^2 - a^2)x^2 + (c^2 + a^2)(r^2 - b^2)y^2 + (a^2 + b^2)(r^2 - c^2)z^2] \\ &= \varphi \cdot T_3' + \left[\frac{r^4}{M} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{M} r^2 + (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \right] T_2' - a^2 b^2 c^2 \cdot T_1'. \end{aligned}$$

$$1:ON = 1:ON_1 = \rho,$$

so ist daher die Gleichung der ON enthaltenden Ebene des Büschels $T_1'T_2'$, d. i. die Gleichung der Normalebene zu ON_1 ,

$$6. \quad \frac{x}{a^2} (a^2 \rho^2 - 1) + \frac{y}{b^2} (b^2 \rho^2 - 1) + \frac{z}{c^2} (c^2 \rho^2 - 1) = 0.$$

Ersetzt man $x:a^2$, $y:b^2$, $z:c^2$ durch u , v , w , so erhält man für die Cosinus der Winkel der Geraden ON und der Achsen

$$7. \quad \cos \varphi = \frac{u}{\rho L} (a^2 \rho^2 - 1), \quad \cos \psi = \frac{v}{\rho L} (b^2 \rho^2 - 1), \quad \cos \chi = \frac{w}{\rho L} (c^2 \rho^2 - 1),$$

wobei L sich ergibt aus

$$8. \quad L^2 = \frac{1}{\rho^2} [u^2 (a^2 \rho^2 - 1)^2 + v^2 (b^2 \rho^2 - 1)^2 + w^2 (c^2 \rho^2 - 1)^2] = \rho^2 (a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2) - 1.$$

Die Coordinaten von T folgen aus

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = \rho \cos \psi, \quad w = \rho \cos \chi \quad \text{zu}$$

$$9. \quad u = \frac{u}{L} (a^2 \rho^2 - 1), \quad v = \frac{v}{L} (b^2 \rho^2 - 1), \quad w = \frac{w}{L} (c^2 \rho^2 - 1).$$

Die gesuchte Gleichung der Wellenfläche in Ebenencoordinaten ergibt sich nun, indem man aus 9. und aus der Gleichung des Ellipsoids E

$$E = a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0.$$

die Coordinaten u , v , w eliminirt. Aus 9. ergibt sich

$$\frac{u^2}{a^2 \rho^2 - 1} = \frac{u^2 (a^2 \rho^2 - 1)}{L^2}, \quad \frac{v^2}{b^2 \rho^2 - 1} = \frac{v^2 (b^2 \rho^2 - 1)}{L^2}, \quad \frac{w^2}{c^2 \rho^2 - 1} = \frac{w^2 (c^2 \rho^2 - 1)}{L^2}.$$

Addirt man, so erhält man die gesuchte Gleichung

$$10. \quad \frac{u^2}{a^2 \rho^2 - 1} + \frac{v^2}{b^2 \rho^2 - 1} + \frac{w^2}{c^2 \rho^2 - 1} = 0.$$

Man überzeugt sich auf Grund dieser Gleichung leicht, dass die Tangentenebenen der Wellenfläche erhalten werden, wenn man auf der Normalen zu einem Diametralschnitte des Ellipsoids

$$\mathcal{E} = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 - 1 = 0$$

die reciproke grosse und kleine Halbachse des Schnittes vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten hin abträgt und durch die Endpunkte Ebenen parallel zum Diametralschnitte legt. Denn die Endpunkte der Normalen gehören einer Fläche an, deren Gleichung aus der Gleichung der Wellenfläche

$$11. \quad \frac{a^2 x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - c^2} = 0$$

hervorgeht, indem man a , b , c mit $1:a$, $1:b$, $1:c$ vertauscht, und die Coordinaten x , y , z eines Punktes P durch die Coordinaten X , Y , Z des Punktes P' ersetzt, der auf OP liegt, und dessen Radius vector reciprok zu OP ist. Man hat somit

$$X:Y:Z = x:y:z, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2},$$

und daher

$$12. \quad x = \frac{X}{R^2}, \quad y = \frac{Y}{R^2}, \quad z = \frac{Z}{R^2}, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Die gesuchte Gleichung der Reciprokalfläche der zum Ellipsoide E gehörigen Wellenfläche ist hiernach

$$13. \quad \frac{X^2}{a^2 - R^2} + \frac{Y^2}{b^2 - R^2} + \frac{Z^2}{c^2 - R^2} = 0.$$

Die Ebene, die durch T' normal zu OP' geht, hat die Coordinaten

Die Gleichung der Horizontalprojection der Berührungscurve wird erhalten, wenn man in 14. $w = 0$ setzt. Man erhält

$$15. \quad b^2 c^2 (a^2 - b^2) (u - u)^2 - b^2 (a^2 + c^2) \sqrt{(b^2 - c^2) (a^2 - b^2)} w (u - u) \\ - \frac{1}{4} (a^2 - b^2) (a^2 - c^2) v^2 + a^2 b^2 (b^2 - c^2) w^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, die symmetrisch zur X -Achse liegt; daher ist die Berührungscurve eine zur XZ -Ebene symmetrische Ellipse. Eine Achse der Ellipse 14. ist der zur OX normalen Achse von 15. parallel und gleich. Das halbe Reciprokum derselben ist der Werth von v , den die Gleichung 15. für $u = 0$ ergibt; letzterer bestimmt sich aus

$$16. \quad b^2 c^2 (a^2 - b^2) u^2 + b^2 (a^2 + c^2) \sqrt{(a^2 - b^2) (b^2 - c^2)} u w \\ - \frac{1}{4} (a^2 - b^2) (a^2 - c^2) (b^2 - c^2) v^2 + a^2 b^2 (b^2 - c^2) w^2 = 0.$$

Setzt man für u, w die Werthe ein, so ergibt sich

$$17. \quad v^2 = \frac{4b^2}{(a^2 - b^2) (b^2 - c^2)}.$$

Daher ist die der Y -Achse parallele Achse der Berührungsellipse

$$18. \quad \frac{1}{b} \sqrt{(a^2 - b^2) (b^2 - c^2)}.$$

Die reciproken Abstände der auf der OX liegenden Scheitel der Ellipse 15. vom Nullpunkte sind die Werthe von u , welche aus 15. für $v = 0$ hervorgehen; werden diese mit u_1 und u_2 bezeichnet, so ist die auf der X -Achse liegende Achse der Ellipse 15.

$$19. \quad \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}.$$

Die Gleichung 15. liefert für $v = 0$, unter Rücksicht auf den Werth von w ,

$$20. \quad (u - u)^2 - \frac{(a^2 + c^2) (b^2 - c^2)}{c^2 b \sqrt{(a^2 - b^2) (a^2 - c^2)}} (u - u) + \frac{a^2 (b^2 - c^2)^2}{b^2 c^2 (a^2 - c^2) (a^2 - b^2)} = 0.$$

Löst man diese Gleichung auf und setzt dann für u den Werth ein, so erhält man nach den einfachen Reductionen

$$21. \quad u_1 = \frac{b}{c^2} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}, \quad u_2 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Daher ist die auf der X -Achse liegende Achse der Ellipse 15.

$$22. \quad \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{b^2 - c^2}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Die auf der XZ -Ebene liegende Achse der Berührungsellipse selbst wird hieraus durch Multiplication mit $1 : \cos \varphi$ erhalten, wenn φ den Winkel der Doppeltangentenebene mit der X -Achse bezeichnet. Da nun

$$\cos \varphi = w : \sqrt{u^2 + w^2} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

so ist die in der XZ -Ebene liegende Achse der Berührungsellipse

$$\frac{1}{b} \sqrt{(a^2 - b^2) (b^2 - c^2)}.$$

Vergleicht man dies mit 18., so erkennt man: Die Wellenfläche wird von jeder der vier Doppeltangentenebenen in einem Kreise berührt.

17. Ist eine Raumcurve der Durchschnitt der Flächen $f(x, y, z) = 0$ und $F(x, y, z) = 0$ und gehören ihr die Punkte P und P' mit den Coordinaten x, y, z bez. $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ an, so sind die Gleichungen erfüllt

$$1. \quad f(x, y, z) = 0; \quad F(x, y, z) = 0,$$

$$2. \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) f + \dots \\ + \frac{1}{2} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \dots = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \left(m \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - n \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (\xi - x)^2 + 2 \left(m \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - n \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) (\xi - x) (\eta - y) \\
12. \quad & + 2 \left(m \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - n \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right) (\xi - x) (\zeta - z) + \left(m \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - n \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) (\eta - y)^2 \\
& + 2 \left(n \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - m \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) (\eta - y) (\zeta - z) + \left(m \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - n \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) (\zeta - z)^2 = 0, \\
13. \quad & \frac{\partial F}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z} (\zeta - z) = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung 12. ist die eines Kegels zweiter Ordnung; je nachdem derselbe von der Ebene 13. in zwei realen verschiedenen, oder in zwei realen zusammenfallenden oder in zwei imaginären Geraden geschnitten wird, hat die Curve in P zwei reale getrennte, oder zwei reale zusammenfallende, oder zwei imaginäre Tangenten, und P ist demgemäss als Doppelpunkt, als Rückkehrpunkt oder als isolirter Punkt der Raumcurve zu bezeichnen.

B. Wenn für die Fläche f im Punkte P die partialen ersten Differentialquotienten verschwinden, für F aber nicht, so bestimmen sich die Tangenten der Raumcurve in P aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
14. \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\xi - x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\xi - x) (\eta - y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} (\xi - x) (\zeta - z) \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\eta - y)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} (\eta - y) (\zeta - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (\zeta - z)^2 = 0 \\
15. \quad & \frac{\partial F}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z} (\zeta - z) = 0.
\end{aligned}$$

Je nachdem die Ebene 15. mit dem Kegel 14. zwei reale getrennte, reale vereinte oder imaginäre Gerade gemein hat, ist P ein Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder einzelner Punkt der Raumcurve.

C. Wenn für beide Flächen f und F die partialen ersten Differentialquotienten im Punkte P verschwinden, wenn also beide Flächen in P einen Doppelpunkt haben, so werden die Tangenten ihrer Schnittcurve in P aus den beiden Gleichungen erhalten.

$$\begin{aligned}
16. \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\xi - x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\xi - x) (\eta - y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} (\xi - x) (\zeta - z) \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\eta - y)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} (\eta - y) (\zeta - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (\zeta - z)^2 = 0, \\
17. \quad & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\xi - x)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} (\xi - x) (\eta - y) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} (\xi - x) (\zeta - z) \\
& + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\eta - y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} (\eta - y) (\zeta - z) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} (\zeta - z)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Diese beiden Kegel zweiter Ordnung haben vier gemeinsame Mantellinien. Wenn also zwei Flächen einen gemeinsamen Doppelpunkt haben, so gehen durch denselben vier Zweige ihrer Durchschnittcurve, dieser Punkt ist daher ein vierfacher Punkt der Raumcurve; er tritt als isolirter Punkt auf, wenn die vier Tangenten imaginär sind.

18. Für die Rotationscylinder

$$f \equiv y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$F \equiv x^2 + y^2 - 2(R - r)y + R^2 - 2Rr = 0$$

hat man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z; \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial F}{\partial y} &= 2(y - R + r), & \frac{\partial F}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}$$

20. Der Kegel $f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

und die Kugel $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2dx - 2ey - 2fz = 0$ haben den Nullpunkt gemein, und im Nullpunkte hat f einen Doppelpunkt. Die Gleichungen No. 17, 14. und 15. werden für den Nullpunkt

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0, \quad d\xi + e\eta + f\zeta = 0.$$

Die Doppelpunktstangenten sind daher die Mantellinien, in welchen der Kegel von der Tangentenebene der Kugel im Nullpunkte geschnitten wird.

Allgemein gilt die Bemerkung, dass in der Schnittcurve eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Fläche F , die durch die Kegelspitze S geht, letztere ein Doppelpunkt ist und die Tangenten des Doppelpunktes die Mantellinien des Kegels sind, in welchen derselbe von der Tangentenebene von F in S geschnitten wird.

§ 16. Unendliche Reihen.

1. In § 13 haben wir die Reihen kennen gelernt

$$1. \quad 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$2. \quad x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

$$3. \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$4. \quad 1 - \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}x^6 + \dots$$

$$5. \quad x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$$

Diese Reihen stimmen darin überein, dass für unbeschränkte oder für innerhalb gewisser Grenzen liegende Werthe von x die Summe der ersten n Glieder mit einer bestimmten Function um so genauer übereinstimmt, je grösser n ist, und dass man diese Genauigkeit beliebig gross machen kann, wenn man nur n hinlänglich gross wählt. Diese Functionen $[(1+x)^\mu, l(1+x), e^x, \cos x, \sin x]$ sind daher die Grenzwerte, denen sich die Reihen bei unendlich wachsender Gliederzahl nähern, und konnten in Folge dessen als die Summen der unendlich fortgesetzten Reihen bezeichnet werden.

Jedes Glied der obigen Reihen kann als Function der Zahl m angesehen werden, welche angibt, das wievielte Glied der Reihe es ist; wird diese Function mit q_m bezeichnet, so treten die Reihen unter die allgemeine Form

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + \dots$$

oder noch kürzer

$$\sum_1^\infty q_m,$$

wobei das vor q_m stehende Zeichen bedeutet, dass die Functionen q_1, q_2, q_3, q_4 gebildet und addirt werden sollen. Die Grösse q_m wird als das allgemeine Glied der betreffenden unendlichen Reihe bezeichnet. Die allgemeinen Glieder der Reihen 1..5 sind

$$\binom{\mu}{m-1}x^{m-1}, (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^m}{m}, \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}, (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

Diese Beispiele für unendliche Reihen fordern dazu auf, unendliche Reihen im Allgemeinen zu betrachten, die Bedingungen anzugeben, unter welchen di

$$\lim x^{n+1} = 0,$$

und daher

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Diese Reihe wird als die geometrische Reihe bezeichnet.

B. Um über die Reihe zu entscheiden (vergl. § 2, No. 7, 3)

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \dots$$

betrachte man

$$s_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}.$$

Man hat

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x + 2x^2 + \dots + (n-1)x^{n-1} \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} + x(s_n - nx^{n-1}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$s_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \cdot x^n - \frac{1}{1-x} \cdot nx^n.$$

Die Grösse nx^n wird für ein unendlich grosses n selbst unendlich, sobald der absolute Werth von $x = 1$ oder > 1 ist; wenn x ein echter Bruch ist, so giebt es immer eine Zahl m , für welche

$$1 + \frac{1}{m} < \frac{1}{x}$$

so dass also $\left(1 + \frac{1}{m}\right)x$ ein echter Bruch ist, den wir mit ϵ bezeichnen wollen;

bezeichnen wir ferner die endliche Zahl mx^m mit A , so ist

$$(m+1)x^{m+1} = m\left(1 + \frac{1}{m}\right)x^{m+1} = A\left(1 + \frac{1}{m}\right)x = A\epsilon$$

$$(m+2)x^{m+2} = (m+1)x^{m+1}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)x, \text{ also } < A\epsilon^2,$$

$$(m+3)x^{m+3} = (m+2)x^{m+2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right)x, \text{ also } < A\epsilon^3,$$

.

Folglich bilden die Grössen

$$mx^m, \quad (m+1)x^{m+1}, \quad (m+2)x^{m+2}, \quad (m+3)x^{m+3}, \quad \dots$$

eine abnehmende Reihe, die stärker fällt als die Reihe

$$A\epsilon, \quad A\epsilon^2, \quad A\epsilon^3, \quad A\epsilon^4, \quad \dots$$

Da nun ϵ ein echter Bruch ist, so ist für ein unendlich grosses n und einen gegebenen Werth von m

$$\lim A\epsilon^{n-m} = 0,$$

also um so mehr

$$\lim nx^n = 0.$$

Die unendliche Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

convergiert daher für alle echt gebrochenen x ; es ist

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

4. Die endliche Reihe*)

$$1. \quad \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}$$

lässt sich summiren, indem man von der identischen Gleichung Gebrauch macht

*) Vergl. u. A. SCHLOEMILCH, Compendium der höhern Analysis, 1. Bd., § 36.

Setzt man hier der Reihe nach $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ und multiplicirt alle so entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$\left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^k < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)} < \left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Geht man zur Grenze für $n = \infty$ über, so wird

$$\lim \frac{\beta}{\beta+n} = 0, \text{ also auch } \lim \left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^k = 0, \quad \lim \left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^{\frac{1}{k}} = 0,$$

und daher auch

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)} = 0.$$

Setzt man dagegen $\beta > \alpha$ voraus, so beachte man, dass

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} = \frac{1}{\lim \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}}.$$

Da $\beta > \alpha$, so ist

$$\lim \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} = 0,$$

und daher

$$\lim \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} = \infty.$$

Wir haben somit gefunden: Die unendliche Reihe

$$\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \dots$$

convergiert, wenn $\alpha > \beta > 0$, und hat dann die Summe

$$\frac{\beta}{\alpha - \beta};$$

Ist $\beta > \alpha > 0$, so divergiert sie.

5. Durch die Forderung, behufs der Entscheidung über die Convergenz einer unendlichen Reihe die Summe einer endlichen Reihe in übersichtlicher Form darzustellen, wird die Schwierigkeit im Allgemeinen nicht vermindert, sondern vermehrt. Handelt es sich zunächst nur um die Entscheidung über die Convergenz, so giebt es einfachere Mittel. Wir geben dieselben zunächst für Reihen an, die lauter positive Glieder haben.

Um über die Convergenz der Reihe

$$1. \quad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \dots$$

zu entscheiden, vergleichen wir diese Reihe mit einer Reihe

$$2. \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 \dots$$

deren Convergenz bekannt ist; wenn von irgend einem Gliede q_m an die Glieder der Reihe 1. kleiner bleiben, als die gleichstehenden Glieder der zweiten Reihe, so dass also

$$q_m < Q_m, \quad q_{m+1} < Q_{m+1}, \quad q_{m+2} < Q_{m+2}, \dots$$

so ist

$$3. \quad q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} \dots < Q_m + Q_{m+1} + Q_{m+2} + Q_{m+3} + \dots$$

Da nun nach der Voraussetzung die Reihe 2. eine endliche Summe hat, da ferner die Reihe

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots + Q_{m-1}$$

als die Summe einer endlichen Anzahl endlicher Grössen selbst endlich ist so hat auch die unendliche Reihe

$$Q_m + Q_{m+1} + Q_{m+2} + Q_{m+3} + \dots$$

legte unendliche Reihe mit einer Reihe vergleicht, oder divergiert, als die Reihen 1. und 4., d. i. $\mu < 1$, als in 1. oder bez. langsamer zunehmen, als in 4.

Als Beispiel betrachten wir die Reihe

$$5. \quad 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \dots$$

Nimmt man das 2. und 3., das 4., 5., 6. u. s. w. bis mit 31. Glied u. s. w. zusammen, und bemerkt, dass

$$\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} < 2 \cdot \frac{1}{2^\mu}, \quad \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \dots < \frac{1}{2^\mu}$$

$$\frac{1}{8^\mu} + \frac{1}{9^\mu} + \dots + \frac{1}{15^\mu} < \frac{1}{8^\mu}$$

so erhält man

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \dots < 1 + \frac{2}{2^\mu}$$

mithin kleiner als

$$1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{4^{\mu-1}} + \frac{1}{8^{\mu-1}} + \dots$$

Schreibt man hierfür

$$1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^3 + \dots$$

so erkennt man, dass diese Reihe, und mithin die Reihe (5.), divergiert, sobald $\mu < 1$.

Um auch über den Fall $\mu = 1$, also über

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

zu entscheiden, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &> \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} &> \frac{1}{4}, & \frac{1}{5} + \frac{1}{6} &> \frac{1}{5}, \\ && \dots && \dots \end{aligned}$$

In dieser Weise die Glieder zusammenfassend, erkennt man, dass die Reihe unendlich gross, die Reihe also divergiert.

7. Die Reihe

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ divergiert nur schwach und liefert daher ein Kriterium der Divergenz einer Reihe. Man erhält hieraus: Wenn die Reihe an einer gewissen Stelle n abnimmt und nq_n von Null verschieden ist, so divergiert die Reihe.

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots$$

Nähert sich das Produkt nq_n der von Null verschiedenen Zahl k an, so divergiert die Reihe.

$$nq_n > k, \text{ daher } q_n > \frac{k}{n}$$

$$(n+1)q_{n+1} > k, \quad \text{,,} \quad q_{n+1} > \frac{k}{n+1}$$

$$(n+2)q_{n+2} > k, \quad \text{,,} \quad q_{n+2} > \frac{k}{n+2}$$

Hieraus folgt

$$q_n + q_{n+1} + q_{n+2} + \dots > k \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \right)$$

Hieraus ergibt sich

$$< q_m \left[\frac{m-k}{m} + \frac{q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} + q_{m+4}}{m(m+1)} + \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)} + \frac{(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)} \right]$$

Da k nach der Voraussetzung ein unechter Bruch

$$m - k < m - 1,$$

daher convergirt die in der Klammer enthaltene Reihe mithin auch die vorgelegte Reihe

Ist hingegen von einer bestimmten Stelle $n = n$

$$n \left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n} \right)$$

beständig kleiner als die Einheit, so kann man eine n so wählen, dass die Ungleichung gilt

$$n \left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n} \right) < k.$$

Hieraus schliesst man

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > \frac{n-k}{n},$$

und dann wie oben weiter, dass

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > \frac{n-k}{n}, \quad \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} > \frac{(n-k)(n-k+1)}{(n-k)(n-k+1)}, \quad \frac{q_{n+3}}{q_{n+2}} > \frac{(n-k)(n-k+1)}{(n-k)(n-k+1)},$$

Daher ist

$$> q_n \left[\frac{n-k}{n} + \frac{q_{n+1} + q_{n+2} + q_{n+3} + q_{n+4}}{n(n+1)} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)} \right]$$

Da k hier ein unechter Bruch ist, so ist

$$n - k > n - 1,$$

daher divergirt die in der Klammer enthaltene Reihe gelegte Reihe.

Nimmt das Produkt

$$n \left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n} \right)$$

von einer bestimmten Stelle an beständig zu oder

$\lim n \left(1 - \frac{q_{n+1}}{q_n} \right) = 1$, so liefert der soeben bewiesene

über die Convergenz oder Divergenz der Reihe; auf Fälle können wir hier nicht weiter eingehen.

Beispiel. Die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{7} + \frac{1}{2}$$

liefert für den Quotienten zweier auf einander folgenden

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{(2n-3)^2}{(2n-2)(2n-1)} x^2$$

Der vor x^2 stehende Faktor ist kleiner als Eins, n wächst und hat für ein unendliches n den Grenzwert 1, ist daher für alle Werthe von n

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} < 1,$$

und daher die obige Reihe convergent; ist $x > 1$, so

convergiert, obgleich die Reihe aus den absoluten Werten der Reihe liegt z. B. zwischen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{2}$$

d. i. zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$.

11. Wenn der Grenzwert der absoluten Werte eine von Null verschiedene Zahl γ ist, und im Uebrigen, wie beim vorigen Satze, so hat die Reihe

Man hat nämlich auch jetzt wieder

$$s_1 < s_3 < s_5 < s_7 < \dots$$

$$s_2 > s_4 > s_6 > s_8 > \dots$$

und $\lim(s_{2p-1} - s_{2p}) = \lim$

Da nun nach der Voraussetzung

$$\lim q_{m+2p-1} =$$

so folgt, dass die Summen s_1, s_3, s_5, \dots und s_2, s_4, s_6, \dots Grenzen nähern, deren Unterschied γ ist. Die

$$q_1 - q_2 + q_3 - q_4 + q_5 - \dots$$

liefert also zwei endliche um γ verschiedene Grenzen, je nach einer ungeraden oder einer geraden Gliederzahl.

12. Eine Reihe, deren Glieder ungleich 2 sind, kann Summen geben, wenn man die Anordnung der Glieder so anordnet, dass die Reihe bei einer bestimmten Anordnung convergiert, bei einer andern divergiert. Wenn man eine Reihe, sowie die aus den negativen Gliedern gebildete Reihe, so ist es doch möglich, dass, wenn man in einer Reihe positiven Glieder die negativen einstreut, der Grenzwert

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

der Reihe als der Grenzwert der Differenz zweier Reihen aufgefasst werden kann, einen endlichen Betrag hat. Man ordnet die Glieder so an, dass unter den ersten n Gliedern eine positive oder negative Reihe sich finden, die unendlich oder auch von einem andern endlichem Grenzwert verschieden ist. Die Reihe

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

in welcher je zwei folgende Glieder ungleich 2 sind, convergirt; ihre Summe beträgt $\frac{1}{2}$ (§ 13, Nr. 1). Man ordnet die Glieder so an, dass man hinter je zwei positiven Gliedern ein negatives einstreut, so entsteht die Reihe

$$S' = (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}) + \dots$$

S' ist dann der Grenzwert von

$$S'_n = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

während S der Grenzwert ist von

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Hieraus folgt

$$\lim(S'_n - S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

und daher hat man

$$S' = \frac{1}{2}S.$$

gegebene Satz auch auf die Bildungen $P - Q$, $aP + bQ$ dem man aus den convergenten Reihen aP und bQ erhalten hat, kann man auf diese Reihe und wieder anwenden u. s. f.; dadurch gelangt man zu der

$$aP + bQ + cS + dT + \dots$$

jedoch mit der ausdrücklichen Einschränkung, dass die Aggregat verbundenen unendlichen Reihen nicht eine unendliche Reihe sein soll; ein solcher Fall müsste vielmehr besonders untersucht werden.

14. Multiplication von Potenzreihen. Auf die Reihen nach steigenden Potenzen einer Variablen x fort

$$1. \quad P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$2. \quad Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

wollen wir die gewöhnlichen Multiplicationsregeln anwenden, nach steigenden Potenzen von x ordnen; wir erhalten die Reihe, und es ist nun zu entscheiden, ob die Summe der Produkte PQ ist. Durch Multiplication der Reihen 1. und 2. erhält man das allgemeine Glied

$$3. \quad s_{n+1} = (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0)$$

Durch Multiplication der ersten $n+1$ Glieder der Reihe P mit den ersten $n+1$ Gliedern der Reihe Q erhält man das Produkt

$$4. \quad \begin{aligned} P_{n+1}Q_{n+1} = & a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x \\ & + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 \\ & + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)x^3 \\ & + (a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4)x^4 \\ & + \dots \\ & + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \dots + a_0b_n)x^n \\ & + (a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \dots + a_0b_{n+1})x^{n+1} \\ & + (a_nb_2 + a_{n-1}b_3 + \dots + a_0b_{n+2})x^{n+2} \\ & + \dots \\ & + a_nb_nx^{2n}. \end{aligned}$$

Diese ersten $n+1$ Glieder dieses Produktes stimmen mit den ersten $n+1$ Gliedern der Reihe S überein. Setzen wir nun voraus, dass die Reihen P und Q die ersten $n+1$ Glieder enthalten, und setzen

$$S_{n+1} = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{n+1}$$

$$5. \quad S_{n+1} < P_{n+1} \cdot Q_{n+1}.$$

Die Glieder, welche in 4. auf das $(n+1)$ te folgende Glied

$$s_{n+2}, s_{n+3}, \dots, s_{2n+1};$$

$$6. \quad S_{2n+1} > P_{n+1}Q_{n+1}.$$

Vertauschen wir in 5. n gegen $2n$, so erhalten wir die Begrenzung

$$P_{2n+1}Q_{2n+1} > S_{2n+1} > P_{n+1}Q_{n+1}.$$

Für ein unendlich wachsendes n wird
daher folgt

$$S = PQ.$$

*) Vergl. SCHLOEMILCH, Compendium der höheren Analysis,

$$\frac{dS(x)}{dx} = \varphi'(x, 1) + \varphi'(x, 2) + \varphi'(x,$$

Dies ergibt: Wenn für den Werth x die $\varphi'(x, n)$ und $\varphi''(x, n)$ endlich und stetig sind und

$R(x, h) = \varphi''(x + \theta_1 h, 1) + \varphi''(x + \theta_2 h, 2) +$
für ein hinlänglich kleines positives h und
brochene θ convergirt, so folgt aus der convergen-

$S(x) = \varphi(x, 1) + \varphi(x, 2) + \varphi(x,$
die neue convergente Reihe

$$\frac{dS(x)}{dx} = \varphi'(x, 1) + \varphi'(x, 2) + \varphi'(x,$$

16. Als Beispiel betrachten wir zunächst die Po

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots,$$

Das allgemeine Glied derselben ist

$$S(x, n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

hieraus folgt

$$\varphi''(x, n) = (-1)^{n-1} (2n-2)x$$

$$R(x, h) = -2(x + \theta_2 h) + 4(x + \theta_3 h)^2 - 6(x +$$

Die Reihe der absoluten Werthe ist

$$2(x + \theta_2 h) + 4(x + \theta_3 h)^2 + 6(x + \theta$$

Setzt man für die θ den grössten Werth, nämlich
eine Reihe, welche convergirt, so lange $-1 < (x$
daher auch $R(x, h)$; folglich ist der Differentialqu-
Summe der Differentialquotienten der einzelnen Reih

$$\frac{dS(x)}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Die Summe der rechts stehenden Reihe ist bek-
hat daher

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da nun auch

$$\frac{d \operatorname{arc tang} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

so folgt, dass

$$\frac{d(S - \operatorname{arc tang} x)}{dx} = 0,$$

dass also $S - \operatorname{arc tang} x$ gleich eine von x unabhän-
kann dieselbe bestimmen, indem man für einen
 $x = x_0$ die Differenz $S_0 - \operatorname{arc tang} x_0$ berechnet; s-
erhält man $S_0 = 0$, $\operatorname{arc tang} x_0 = 0$, und hieraus

$$\operatorname{arc tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Für $x = +1$ folgt hieraus eine zur Berechnung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

17. Die Reihe

$$\varphi = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

convergirt für

$$-1 \leq x \leq +1.$$

Die unendliche Reihe

$S = q_1 + q_2 + q_3 + \dots +$
theilen wir in

$$S_n = q_1 + q_2 + \dots$$

und

$$R = q_{n+1} + q_{n+2} + \dots$$

wir nehmen an, dass S_n durch direkte Summa

glieder gefunden sei und suchen einen angenäherten wern des Restes R . Hier zu bestimme man die beiden Functionen $\varphi(n)$ und $f(n)$ so, dass

$$1. \quad \lim \varphi(n) \cdot q_n = 0,$$

$$2. \quad \lim f(n) = 1,$$

$$3. \quad f(n) = \frac{q_n}{q_{n+1}} \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Es wird sich später zeigen, wie sich φ und f diesen Bedingungen entsprechen bestimmen lassen. Aus den Gleichungen

$$f(n) q_{n+1} = \varphi(n) q_n - \varphi(n+1) q_{n+1},$$

$$f(n+1) q_{n+2} = \varphi(n+1) q_{n+1} - \varphi(n+2) q_{n+2},$$

$$f(n+2) q_{n+3} = \varphi(n+2) q_{n+2} - \varphi(n+3) q_{n+3},$$

$$\dots \dots \dots f(n+k) q_{n+k+1} = \varphi(n+k) q_{n+k} - \varphi(n+k+1) q_{n+k+1}$$

erhält man durch Addition

$$f(n) q_{n+1} + f(n+1) q_{n+2} + \dots + f(n+k) q_{n+k+1} = \varphi(n) q_n - \varphi(n+k+1) q_{n+k+1}$$

Lässt man n unbegrenzt wachsen, so folgt in Rücksicht auf 1.

$$\varphi(n) q_n = f(n) q_{n+1} + f(n+1) q_{n+2} + f(n+2) q_{n+3} + \dots$$

Ist nun

$$f(n) > f(n+1) > f(n+2) > \dots > 1$$

so ist

$$R < f(n) q_{n+1} + f(n+1) q_{n+2} + \dots$$

und zugleich

$$R > q_{n+1} + \frac{f(n+1)}{f(n)} q_{n+2} + \frac{f(n+2)}{f(n+1)} q_{n+3} + \dots$$

Man hat somit für R die Begrenzung

$$4. \quad \frac{\varphi(n) q_n}{f(n)} < R < \varphi(n) q_n.$$

Wenn hingegen

$$f(n) < f(n+1) < f(n+2) < \dots < 1,$$

so hat man umgekehrt

$$5. \quad \varphi(n) q_n < R < \frac{\varphi(n) q_n}{f(n)}.$$

Die Functionen φ und f kann man in folgender Weise entsprechend d Bedingungen 1., 2., 3. erhalten. Man setze für $\varphi(n)$ eine algebraische rationale gebrochene Function von n , etwa

$$6. \quad \varphi(n) = c' n + c_0 + \frac{a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \dots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \dots + b_p}.$$

Entwickelt man durch Division den Bruch nach steigenden Potenzen $1 : n$, so erhält man

$$7. \quad \varphi(n) = c' n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{c_4}{n^4} + \dots$$

Ferner wollen wir voraussetzen, dass sich der Quotient $q_n : q_{n+1}$ in folge Reihe entwickeln lässt

$$8. \quad \frac{q_n}{q_{n+1}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \frac{a_4}{n^4} + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + [c'_7 a_7 + c_0 a_8 + c_1(a_5 + 1) + c_2(a_4 - 5) + c_3(a_3 - 1) \\
& + [c'_8 a_8 + c_0 a_9 + c_1(a_6 - 1) + c_2(a_5 + 6) + c_3(a_4 - 1) \\
& + [c'_9 a_9 + c_0 a_{10} + c_1(a_7 + 1) + c_2(a_6 - 7) + c_3(a_5 - 1) \\
& + [c'_{10} a_{10} + c_0 a_{11} + c_1(a_8 - 1) + c_2(a_7 + 8) + c_3(a_6 - 9) \\
& \quad + c_4(a_5 + 5) \\
& + [c'_{11} a_{11} + c_0 a_{12} + c_1(a_9 + 1) + c_2(a_8 - 9) + c_3(a_7 - 10) \\
& \quad + c_4(a_6 + 126) + c_5(a_5 - 126) + c_7(a_3 + 84) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Die Zahlen c', c_0, c_1, \dots kann man nun so genügt wird, und dass möglichst viele Glieder füllung dieser Bestimmungen muss man die G erhält somit für jede Reihe eine besondere Bes die Coefficienten bestimmt

$$c', c_0, c_1, c_2, \dots$$

so hat man den Bruch (6)

$$\frac{a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \dots}{n^p + b_1 n^{p-1} + \dots}$$

der Reihe gleichzusetzen

$$\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \dots +$$

Man erhält dann die Gleichung

$$a_1 n^{p-1} + \dots + a_p = (n^p + b_1 n^{p-1} + \dots + b_p)$$

Setzt man die Coefficienten gleich hoher I dieser Gleichung einander gleich, so erhält man

$$\begin{aligned}
a_1 &= c_1, \\
a_2 &= c_2 + b_1 c_1, \\
a_3 &= c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1, \\
a_4 &= c_4 + b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1, \\
&\dots \\
12. \quad a_p &= c_p + b_1 c_{p-1} + \dots \\
0 &= c_{p+1} + b_1 c_p + \dots \\
0 &= c_{p+2} + b_1 c_{p+1} + \dots \\
0 &= c_{p+3} + b_1 c_{p+2} + \dots \\
&\dots \\
0 &= c_{2p} + b_1 c_{2p-1} + \dots
\end{aligned}$$

Aus den letzten p dieser Gleichungen erhält

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_p$$

und mit Hülfe derselben aus dem ersten p die

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_p$$

19. Als Beispiel hierzu wollen wir π mit Reihe berechnen

Hieraus findet man schliesslich ebenfalls auf 7

$$\frac{\pi}{8} = 0,392\,699\,1.$$

Um dieselbe Genauigkeit durch direkte Summen unendlichen Reihe zu erlangen, hätte man nehmen müssen, bis man $1 : (4\pi - 3)(4\pi - 1)$ kleiner als 10^7 erhalten hätte; bei dem C

$$\frac{1}{3001 \cdot 3003} = \frac{1}{(4 \cdot 751 - 3)(4 \cdot 751 + 3)}$$

wäre dies noch nicht erreicht worden; man hätte berechnen müssen, um zu dem Ziele zu gelangen, ständige Rechnung nach KUMMER's Methode errei

20. Methode der unbestimmten Coefficienten kann, dass eine Function $f(x)$ innerhalb gewisser Grenzen sich in eine Potenzreihe

1. $f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots$ entwickeln lässt, die Anwendung des TAYLOR'schen Satzes durch die vielen Differentiationen ungeeignet erscheint, so dass die Benutzung der Besonderheiten von $f(x)$ oft eine Reihe von Gleichungen aufstellen, aus denen sich $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ ergiebt, zu, eine beliebige Anzahl der Coefficienten von $f(x)$ der Fortgang der Rechnung mit Sicherheit übersehen zu können, während man im Gegenfalle, wenn man jedes einzelne Coefficienten zu ermitteln muss, jeden einzelnen Coefficienten zu ermitteln.

Geht man von der Voraussetzung aus, dass x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden x , für welche kein Differential unendlich gross wird, in eine Potenzreihe entwickelt werden

$$\tan x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots$$

so ist zunächst sicher, dass $A_0 = 0$ ist, da $\tan x$ eine ungerade Function ist. Da ferner x und $\tan x$ zugleich das Vorzeichen wechseln, wenn x das

$$A_2 = A_4 = A_6 = \dots = A_{2n} = 0$$

Die Reihenentwicklung beschränkt sich daher auf ungerade Exponenten,

$$\tan x = A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \dots$$

Benutzt man die Gleichung

$$\sin x = \tan x \cos x,$$

und setzt für $\sin x$ und $\cos x$ die früher gefundenen Reihen, so erhält man

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right) \\ &= (A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \dots) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Führt man links die Multiplication aus und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x , so erhält man die folgenden Gleichungen

$$A_1 = 1, \quad A_3 - \frac{A_1}{2!} = 0$$

$$A_5 - \frac{A_3}{2!} + \frac{A_1}{4!} = 0$$

§ 17. Unendliche Produkte.

1. Bekanntlich ist

$$\begin{aligned}\sin 3u &= 3 \sin u - 4 \sin^3 u, \\ \cos 3u &= 4 \cos^3 u - 3 \cos u, \\ \sin 5u &= \sin 3u \cos 2u + \sin 2u \cos 3u, \\ &= \sin 3u (1 - 2 \sin^2 u) + 2 \sin u (4 \cos^4 u - 3 \cos^2 u), \\ &= 5 \sin u - 20 \sin^3 u + 16 \sin^5 u.\end{aligned}$$

Auf Grund dieser Formeln kann man den Nachweis dafür versuchen, dass für ein ungerades μ

$$1. \quad \sin \mu u = A_0 \sin u + A_2 \sin^3 u + A_4 \sin^5 u + \dots + A_{\mu-1} \sin^{\mu} u.$$

Man hat zunächst

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)u &= \sin(2n-1)u \cdot \cos 2u + \cos(2n-1)u \cdot \sin 2u \\ &= \sin(2n-1)u \cdot (1 - 2 \sin^2 u) + 2 \cos(2n-1)u \cdot \cos u \sin u.\end{aligned}$$

Die Entscheidung darüber, ob sich $\sin(2n+1)u$ nach ungeraden Potenzen von $\sin u$ entwickeln lässt, hängt somit davon ab, ob $\sin(2n-1)u$ und $\cos(2n-1)u \cdot \cos u \cdot \sin u$ diese Entwicklung zulassen. Für das letztere Produkt hat man

$$\cos(2n-1)u \cdot \cos u = \cos(2n-3)u \cdot \cos u \cdot (1 - 2 \sin^2 u) - 2 \sin(2n-3)u (1 - \sin^2 u).$$

Wenn sich also $\sin(2n-3)u$, $\cos(2n-3)u \cdot \cos u \cdot \sin u$ und $\sin(2n-1)u$ gemäss 1. entwickeln lassen, so ist diese Entwicklung auch für $\sin(2n+1)u$ und $\cos(2n-1)u \cdot \cos u \sin u$ nachgewiesen. Da sie nun für

$$\sin 3u, \quad \cos 3u \cos u \sin u, \quad \sin 5u$$

gilt, so gilt sie allgemein.

Aus der Gleichung 1. folgt

$$2. \quad \frac{\sin \mu u}{\sin u} = A_0 + A_2 \sin^2 u + \dots + A_{\mu-1} \sin^{\mu-1} u.$$

Geht man zur Grenze für $u = 0$ über, so erhält man

$$3. \quad A_0 = \lim \frac{\sin \mu u}{\sin u} = \mu \lim \frac{\sin \mu u}{\mu u} \cdot \frac{u}{\sin u} = \mu.$$

Bezeichnet man mit $u_1, u_2, \dots, u_{\mu-1}$ die Werthe von u , für welche die rechte Seite der Gleichung 2. verschwindet, so ist

$$4. \quad \frac{\sin \mu u}{\sin u} = A_{\mu-1} (\sin u_1 - \sin u) (\sin u_2 - \sin u) \dots (\sin u_{\mu-1} - \sin u).$$

Ferner folgt aus 2. und 3.

$$5. \quad \mu = A_{\mu-1} \sin u_1 \sin u_2 \sin u_3 \dots \sin u_{\mu-1},$$

und durch Division aus 4. durch 5.

$$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u} = \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_1}\right) \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_2}\right) \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_3}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_{\mu-1}}\right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet für die $\mu - 1$ von einander verschiedenen Bogen

$$u = \begin{cases} \frac{\pi}{\mu}, & \frac{2\pi}{\mu}, & \frac{3\pi}{\mu}, & \dots & \frac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu}, \\ -\frac{\pi}{\mu}, & -\frac{2\pi}{\mu}, & -\frac{3\pi}{\mu}, & \dots & -\frac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe für $u_1 \dots u_{\mu-1}$, so kann man die aus je zwei entgegen gesetzten gleichen Bogen entstehenden Faktoren vereinen und erhält

$$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u} = \left[1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{\pi}{\mu}}\right] \left[1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{2\pi}{\mu}}\right] \dots \left[1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \frac{(\mu-1)\pi}{2\mu}}\right].$$

$$13. \quad R_n > 1 - \frac{\rho n - 2n - 1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{\rho n}}{\sin^2 \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\pi}{\rho}}.$$

Für einen unendlich grossen Werth von n ist

$$\lim(\rho n - 2n - 1) \cdot \sin^2 \frac{x}{\rho n} = \lim x^2 \frac{\rho n - 2n - 1}{\rho^2 n^2} = 0.$$

Daher folgt aus 12. und 13.

$$\lim R_n = 1.$$

Folglich bleibt 8. auch für $\mu = \infty$ gültig; da nun

$$\lim \frac{\sin \frac{x}{\mu}}{\sin \frac{k\pi}{\mu}} = \frac{x}{k\pi},$$

so hat man in Rücksicht auf 9.

$$14. \quad \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots$$

gültig für jeden endlichen Werth von x .

Setzt man $x = \frac{\pi}{6}$, so ist $\sin x = \frac{1}{2}$, und man hat

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \frac{11 \cdot 13}{12^2} \cdot \frac{17 \cdot 19}{18^2} \cdot \frac{23 \cdot 25}{24^2} \dots$$

und daher

$$\frac{\pi}{3} = \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{12^2}{11 \cdot 13} \cdot \frac{18^2}{17 \cdot 19} \cdot \frac{24^2}{23 \cdot 25} \dots$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man das schwächer convergirende unendliche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \dots$$

2. Aus der im Eingange des vorigen Abschnitts gemachten Bemerkung ist ersichtlich, dass man $\cos \mu u \cos u$ für jedes ungerade ganze μ nach geraden Potenzen von $\sin u$ entwickeln kann, in der Form

$$1. \quad \cos \mu u \cos u = B_0 + B_2 \sin^2 u + B_4 \sin^4 u + \dots + B_{\mu+1} \sin^{\mu+1} u.$$

Setzt man $u = 0$, so erhält man

$$2. \quad B_0 = 1.$$

Sind wieder $u_1, u_2, u_3 \dots u_{\mu+1}$ die Werthe von u , für welche die rechte Seite von 1. verschwindet, so hat man

$$\cos \mu u \cdot \cos u = B_{\mu+1} (\sin u_1 - \sin u) (\sin u_2 - \sin u) \dots (\sin u_{\mu+1} - \sin u).$$

Ferner folgt aus 1. und 2.

$$1 = B_{\mu+1} \sin u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{\mu+1},$$

folglich ist

$$3. \quad \cos \mu u \cos u = \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_1}\right) \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_2}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_{\mu+1}}\right).$$

Die linke Seite verschwindet für die von einander verschiedenen Bogen

$$u = \begin{cases} \frac{\pi}{2\mu}, & \frac{3\pi}{2\mu}, & \frac{5\pi}{2\mu}, & \dots & \frac{\mu\pi}{2\mu}, \\ -\frac{\pi}{2\mu}, & -\frac{3\pi}{2\mu}, & -\frac{5\pi}{2\mu}, & \dots & -\frac{\mu\pi}{2\mu}. \end{cases}$$

Daher ist, wenn man noch μu mit x vertauscht

$$Q = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)(1 + u_4) \dots$$

gegen Grenzwerte, die endlich und von Null verschieden sind.

Jeder Faktor des Produktes

$$P_n = (1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_n)$$

ist nach der Voraussetzung ein echter Bruch; daher ist $P_n < 1$ und nimmt ab, wenn n wächst. Ferner kann man, wenn nur n gross genug ist, $m < n$ immer so wählen, dass

$$1. \quad u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \dots$$

kleiner ist als ein gegebener Bruch ϵ . Man hat

$$\frac{P_n}{P_m} = (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2}) \dots (1 - u_n)$$

$$\text{also} \quad \frac{P_n}{P_m} > 1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n).$$

Nach der Voraussetzung ist daher

$$P_n > P_m(1 - \epsilon).$$

Hieraus folgt, dass sich P_n einer positiven, von Null verschiedenen Grenze nähert. Setzt man $P = P_n \cdot R_n$, so hat man die Ungleichung

$$1 > R_n > 1 - (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots).$$

Nach der Voraussetzung nähert sich die Reihe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

mit wachsendem n der Grenze Null; je grösser n ist, um so weniger ist also R_n von der Einheit verschieden. Das Produkt P_n stimmt daher mit einem bestimmten positiven Grenzwert P um so genauer und bis zu jedem Grade der Genauigkeit überein, je grösser man n wählt.

Ferner ist

$$\frac{1}{1 + u} = 1 - \frac{u}{1 + u}$$

und daher

$$\frac{1}{Q} = \left(1 - \frac{u_1}{1 + u_1}\right) \left(1 - \frac{u_2}{1 + u_2}\right) \left(1 - \frac{u_3}{1 + u_3}\right) \dots$$

Da nun die Reihe

$$\frac{u_1}{1 + u_1} + \frac{u_2}{1 + u_2} + \frac{u_3}{1 + u_3} + \dots$$

mit der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ convergirt, so folgt, dass $1 : Q$ convergirt und einen endlichen Grenzwert hat. Dabei ist zu bemerken, dass

$$Q_n = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \dots (1 + u_n)$$

sich dem Grenzwert Q nähert, indem es bei zunehmendem n unaufhörlich wächst.

Wenn dagegen die Reihe der positiven echten Brüche

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

divergirt, so divergiren die unendlichen Produkte

$$P = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \dots,$$

$$Q = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \dots,$$

und zwar nähern sich

$$P_n = (1 - u_1) \dots (1 - u_n) \quad \text{und} \quad Q_n = (1 + u_1) \dots (1 + u_n)$$

mit wachsendem n bez. den Grenzen 0 und ∞ .

Man hat zunächst

$$Q_n > 1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_n).$$

Da nun $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ mit n unendlich wächst, so folgt, dass sich Q_n mit n unendlich gross wird.

Anhang.

Wir geben anhangsweise eine schärfere Ableitung der in § 4, No. 9 und § 5, No. 1 benutzten Grenzbestimmung

$$\lim \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

die dem gleichzeitigen Verschwinden von Δx und Δy Rechnung trägt.

Die Function $f(x)$ wächst oder nimmt ab, sobald $df:dx$ positiv oder negativ ist; ist $df:dx$ stetig, so kann ein Uebergang vom Wachsthum zur Abnahme oder umgekehrt nur für solche Werthe der Variabeln eintreten, für welche $df:dx$ verschwindet.

Ein Curvenast $y = \varphi(x)$ und der Differentialquotient $d\varphi:dx$ seien stetig zwischen den Punkten P und P_1 , die zu den Abscissen x und $x + \Delta x$ gehören. Der Punkt der Strecke PP_1 , dessen Abscisse $x + \varepsilon\Delta x$ ist ($\varepsilon < 1$), hat die Ordinate

$$\varphi(x) + \varepsilon[\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] = (1 - \varepsilon)\varphi(x) + \varepsilon\varphi(x + \Delta x).$$

Der Unterschied u dieser Ordinate und der zu derselben Abscisse gehörigen Curvenordinate ist

$$u = \varphi(x + \varepsilon\Delta x) - (1 - \varepsilon)\varphi(x) - \varepsilon\varphi(x + \Delta x).$$

Diese Grösse verschwindet für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$; folglich giebt es einen positiven echten Bruch ε , für welchen

$$1. \quad \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{d\varphi(x + \varepsilon\Delta x)}{d\varepsilon} + \varphi(x) - \varphi(x + \Delta x) = 0.$$

Da nun

$$\frac{d\varphi(x + \varepsilon\Delta x)}{d\varepsilon} = \frac{d\varphi(x + \varepsilon\Delta x)}{dx} \cdot \Delta x,$$

so folgt aus 1.

$$2. \quad \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta x \cdot \frac{d\varphi(x + \varepsilon\Delta x)}{dx}.$$

Ersetzt man hierin x durch y und $\varphi(x)$ durch $F(x + \Delta x, y)$, so erhält man sofort

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) = \Delta y \cdot \frac{\partial F(x + \Delta x, y + \varepsilon\Delta y)}{\partial y}.$$

Dividirt man beide Seiten durch Δy und geht dann zur Grenze für verschwindende Werthe Δx und Δy über, so erhält man

$$\lim \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

$$\frac{d\psi(x) - dF(x)}{dx} = \frac{d[\psi(x) - F(x)]}{dx} = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Differenz $\psi(x) - F(x)$ eine von x unabhängige Constante ist; man hat daher

$$\psi(x) - F(x) = C, \text{ oder } \psi(x) = F(x) + C.$$

Die Function $F(x)$, welche keine willkürliche Constante enthält, bezeichnet man als ein particulares Integral von $f(x) dx$; und dem gegenüber $F(x) + C$ als das allgemeine Integral. Das allgemeine Integral geht daher aus einem particularen durch Hinzufügung einer willkürlichen Constanten hervor.

3. Nach No. 1 führt jede Differentialformel auf eine Integralformel. Aus den Differentialen der einfachen Functionen erhält man die Grundformeln der Integralrechnung:

$$1. \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \text{denn} \quad d \frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx; \quad m \geq -1,$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{x} = lx + C, \quad \text{,,} \quad d lx = \frac{dx}{x};$$

$$3. \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \text{,,} \quad d e^x = e^x dx;$$

$$4. \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \quad \text{,,} \quad d \sin x = \cos x dx;$$

$$5. \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \text{,,} \quad d(-\cos x) = \sin x dx;$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad \text{,,} \quad d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$7. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \text{,,} \quad d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad \text{,,} \quad d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$9. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \quad \text{,,} \quad d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2};$$

Bekanntlich ist

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

und daher $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

Man kann daher 8. ersetzen durch

$$10. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C_1,$$

in Uebereinstimmung mit der Differentialformel

$$d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Eine ähnliche Bemerkung gilt bezüglich der Formel 9.; da man hat

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x,$$

so folgt aus 9.

$$11. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccot} x + C_1,$$

in Uebereinstimmung mit

Integralrechnung.

den verschwindenden Werth von Δx über, so

$m f(x + \mu \Delta x)$, folglich

(x) oder $dF = f(x) dx$.

$F(x) = F + \text{Const.}$

die Fläche F — und damit also das Integral bestimmt werden kann.

Wir setzen zunächst voraus, dass die Curve von A bis P nur steigt. Theilen wir AP in n gleiche Theile δ , so sind die n den Theilpunkten $0, 1, 2 \dots n$ gehörigen Ordinaten

$f(a), f(a + \delta), f(a + 2\delta), f(a + 3\delta) \dots$
 $f(a + (n-1)\delta), f(a + n\delta) = f(x)$.

Construirt man zwischen den Ordinaten $f(a + (k-1)\delta)$ und $f(a + k\delta)$ ein Rechteck ρ_k mit der Höhe $f(a + (k-1)\delta)$ und eines r_k mit der Höhe $f(a + k\delta)$, so ist, da nach der Voraussetzung

$$f(a + (k-1)\delta) < f(a + k\delta),$$

der zwischen $f(a + (k-1)\delta)$ und $f(a + k\delta)$ als ρ_k und kleiner als r_k . Daher ist

$$F < \sum_{k=1}^n r_k.$$

$$\begin{aligned} & \delta) \cdot \delta, \quad r_k = f(a + k\delta) \cdot \delta, \\ & (a + k\delta) - f(a + (k-1)\delta) \delta, \\ & (a + \delta) - f(a) \delta, \\ & (a + 2\delta) - f(a + \delta) \delta, \\ & (a + 3\delta) - f(a + 2\delta) \delta, \\ & (a + 4\delta) - f(a + 3\delta) \delta, \\ & \dots \dots \dots \\ & (a + n\delta) - f(a + (n-1)\delta) \delta. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$2. \quad \sum r_k - \sum \rho_k = [f(x) - f(a)] \delta.$$

Bezeichnet μ einen positiven echten Bruch, so folgt aus 1. und 2.

$$3. \quad F = \sum \rho_k + \mu [f(x) - f(a)] \delta.$$

Wenn die Curve von A bis P nur fällt, so nehmen wir dieselben Constructionen vor; da aber jetzt

$$\begin{aligned} & f(a + (k-1)\delta) > f(a + k\delta), \\ & \text{so ist der zwischen diesen Ordinaten} \\ & \text{enthaltene Flächenstreifen kleiner als} \\ & \rho_k \text{ und grösser als } r_k; \text{ daher ist} \\ & 4. \quad \sum \rho_k > F > \sum r_k; \end{aligned}$$

Wenn aber bei einer endlichen Anzahl von Grössen v jede einzelne verschwindet, so verschwindet auch ihre Summe, also ist

$$\lim (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{i-1}) = 0,$$

und wir erhalten somit die allgemein gültige Gleichung

$$F = \lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta) \delta,$$

oder

$$8. \quad \int f(x) dx = \lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta) \delta + \text{Const.}$$

Eine Veränderung innerhalb der anfangs angegebenen Schranken der willkürlichen Grösse a hat, wie die Figur sofort zeigt, den Erfolg, dass die Fläche F um einen von x unabhängigen Betrag zu- oder abnimmt; und diesen kann man dann in 8. mit der willkürlichen Constanten vereinigt denken.

Den particularen Werth $\lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta) \delta$ nennen wir das zwischen den Grenzen a und x genommene bestimmte Integral von $f(x) dx$ und bezeichnen es mit $\int_a^x f(x) dx$. Es gilt also die definirende Gleichung

$$\int_a^x f(x) dx = \lim \sum_0^{n-1} f(a + k\delta) \delta.$$

Fügt man rechts zur Vereinfachung der Summenformel den verschwindenden Summanden $f(a + n\delta) \delta$ hinzu, so erhält man

$$9. \quad \int_a^x f(x) dx = \lim \sum_0^n f(a + k\delta) \delta.$$

Die vorigen Betrachtungen zeigen, wie dasselbe angenähert bestimmt werden kann. Berechnet man für jeden der Theile $F_1, F_2 \dots F_i$ gemäss der Formeln 2. und 5. die Grössen

$$[f(c) - f(d)] \delta,$$

wobei c und d die kleinste und die grösste Abscisse irgend eines dieser Theile bezeichnen, so gewinnt man zugleich ein Urtheil über die Genauigkeit des angenäherten Resultats, sowie eine Auskunft dafür, wie klein δ gewählt werden muss, damit der Fehler einen gegebenen Betrag nicht übersteigt.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns zunächst mit solchen Integralen beschäftigen, die auf die bisher bekannten Functionen führen.

§ 2. Integral eines Polynoms und eines Produkts. Einführung einer neuen Variabeln.

1. Aus der Gleichung

$$d(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) = du_1 + du_2 + du_3 + \dots + du_n$$

gewinnt man durch Integration

$$\int (du_1 + du_2 + du_3 + \dots + du_n) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \text{Const}$$

Hierfür kann man setzen

$$\int (du_1 + du_2 + du_3 + \dots + du_n) = \int du_1 + \int du_2 + \int du_3 + \dots$$

Daher der Satz: Ein Polynom wird integrirt, indem man je es einzelne Glied integrirt.

Durch Anwendung dieses Satzes ergibt sich z. B.

2. Einführung einer neuen

$$\int x^2 dx = x^3 + \frac{x^2}{2} +$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} +$$

$$\int e^x dx = x + e^x +$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \frac{x}{2} +$$

$$\int \sin x dx = -\cos x +$$

du

Const.,

Differentials kann
Integral mit einer
multipliziert (oder d

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} +$$

$$+ u dv$$

$$- u dv;$$

$$- \int u dv.$$

ich machen, wenn
werden kann, als $\int v di$
teilweisen Integra

$$\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C;$$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d e^x = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = e^x (x^2 - 2x +$$

$$x^3 e^x dx = \int x^3 d e^x = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 +$$

Allgemein hat man

$$\int x^m e^x dx = \int x^m d e^x = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx$$

Ferner ist

$$\int x \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1)$$

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln x = \frac{x^3}{4} (2 \ln$$

$$\int x^2 l x dx = \frac{1}{3} \int l x d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 l x - \frac{1}{3} \int x^3 d l x = \frac{x^3}{9} (3 l x - 1) + C;$$

$$\int x^m dx dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} l x - \frac{1}{m+1} \int x^m dx = \frac{1}{(m+1)^2} x^{m+1} [(m+1) l x - 1] + C.$$

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

$$\int x \sin x dx = - \int x d \cos x = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C;$$

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx;$$

$$\int x^2 \sin x dx = - \int x^2 d \cos x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx;$$

$$\int x^m \cos x dx = \int x^m d \sin x = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x dx;$$

$$\int x^m \sin x dx = - \int x^m d \cos x = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x dx;$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln gelangt man schliesslich zu einer vollständigen Bestimmung von $\int x^m \cos x dx$ und $\int x^m \sin x dx$.

4. Ein sehr wichtiges Mittel zur Transformation von Integralen ist die Einführung einer neuen Variablen. Um z. B. $\int (a + bx)^m dx$ zu bestimmen, setze man $a + bx = y$, also $b dx = dy$; durch diese Substitution erhält man

$$\begin{aligned} \int (a + bx)^m dx &= \frac{1}{b} \int y^m dy = \frac{y^{m+1}}{(m+1)b} + C, \\ &= \frac{1}{(m+1)b} (a + bx)^{m+1} + C. \end{aligned}$$

Auf gleichem Wege ergibt sich

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \int \frac{d(a + bx)}{a + bx} = \frac{1}{b} l(a + bx) + C.$$

In $\int \frac{x dx}{\sqrt{a + bx^2}}$ setze man $a + bx^2 = y$, also $2bx dx = dy$.

Man erhält dann

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{a + bx^2}} &= \frac{1}{2b} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{b} + C, \\ &= \frac{1}{b} \sqrt{a + bx^2} + C. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}.$$

Setzt man $e^x = y$, so ist $e^x dx = dy$, und daher

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{dy}{1 + y^2} = \text{arc tang } y + C, \\ &= \text{arc tang}(e^x) + C. \end{aligned}$$

§ 3. Integration rationaler algebraischer Functionen.

1. Eine rationale algebraische Function der Variablen x ist von der Form

$$f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n}.$$

Ist die Function unecht gebrochen, ist also $m > n$, so kann man nach den Regeln der Buchstabenrechnung den Zähler durch den Nenner dividieren; man erhält dann den Quotienten

$$\begin{aligned} &c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \dots + c_{m-n-1} x + c_{m-n} \\ &+ \frac{d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \dots + d_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}. \end{aligned}$$

man hat daher

$$\int f(x) dx = \int (c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \dots + c_{m-n}) dx \\ + \int \frac{d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \dots + d_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} dx.$$

Das erste Integral rechts — das einer ganzen rationalen algebraischen Function — ist nach den bisherigen Regeln sofort ausgeführt. Es bleibt nur noch die Integration einer echt gebrochenen rationalen algebraischen Function zu untersuchen.

Ehe wir hierfür die allgemeinen Regeln aufstellen, mögen einige Beispiele erledigt werden.

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ = \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \log(1-x) + C \\ = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) dx \\ = \frac{1}{a-b} \log \frac{x-a}{x-b} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 11} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d \frac{x+3}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{x+3}{\sqrt{2}} \right)^2} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctang} \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 4} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 - 5} = \int \frac{dx}{(x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})} \\ = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\int \frac{d(x+3-\sqrt{5})}{x+3-\sqrt{5}} - \int \frac{d(x+3+\sqrt{5})}{x+3+\sqrt{5}} \right] \\ = \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \frac{x+3-\sqrt{5}}{x+3+\sqrt{5}} + C.$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{x dx}{(x-2)^2 + 3} = \int \frac{(x-2) d(x-2)}{(x-2)^2 + 3} + \int \frac{2 d(x-2)}{(x-2)^2 + 3} \\ = \frac{1}{2} \log[(x-2)^2 + 3] + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctang} \frac{x-2}{\sqrt{3}} +$$

$$\int \frac{(x+5) dx}{x^2 - 8x + 10} = \int \frac{(x+5) dx}{(x-4)^2 - 6} = \int \frac{(x-4) d(x-4)}{(x-4)^2 - 6} + 9 \int \frac{dx}{(x-4)^2 - 6} \\ = \frac{1}{2} \log(x^2 - 8x + 10) + \frac{9}{2\sqrt{6}} \log \frac{x-4-\sqrt{6}}{x-4+\sqrt{6}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x+5)} = \int \frac{1}{25} \left(\frac{5-x}{x^2} + \frac{1}{x+5} \right) dx \\ = -\frac{1}{5x} - \frac{1}{25} \log x + \frac{1}{25} \log(x+5) + C.$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad \int \frac{dx}{x^5(x-3)} &= \int \frac{1}{243} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{x^4 + 3x + 9x^2 + 27x + 81}{x^5} \right) dx \\
 &= \frac{1}{243} \left[l(x-3) - lx + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{81}{4x^4} \right] + C.
 \end{aligned}$$

Wie man sieht, gelingt in allen diesen Fällen die Integration dadurch, dass man die gebrochene Function in ein Polynom von Brüchen auflöst, deren Nenner lineare Functionen von x oder (Beispiel 7. und 8.) Potenzen linearer Functionen sind; die Zähler sind in dem ersten Falle constant, im letzteren von minderen Grade als der Nenner; nur die Beispiele 3. und 5. machen eine Ausnahme, bei ihnen treten nur Nenner von der Form $x^2 + a$ auf, wobei a positiv ist. Umgekehrt sieht man, dass die Integration echt gebrochener Functionen durchführbar wäre, wenn es gelänge, jede solche Function in der hier angegebenen Weise in Partialbrüche zu zerlegen, d. i. in ein Polynom echt gebrochener Functionen, deren Nenner linear, oder quadratisch, oder Potenzen einer linearen oder quadratischen Function sind. Wir werden nun zeigen, wie diese Zerlegung in jedem Falle durchgeführt werden kann.

2. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei ganze Functionen und zwar $\varphi(x)$ vom n ten, $\psi(x)$ von niederem Grade. Man zerlege die Function $\varphi(x)$ in ihre linearen Faktoren; dies erfolgt bekanntlich durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) = 0.$$

Sind $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, und ist a der Coefficient von x^n in $\varphi(x)$, so ist dann

$$\varphi(x) = a(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n).$$

Wir setzen nun zunächst voraus, dass sämtliche ξ von einander verschieden sind, und suchen die Zahlen A_1, A_2, \dots, A_n so zu bestimmen, dass

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x - \xi_1} + \frac{A_2}{x - \xi_2} + \frac{A_3}{x - \xi_3} + \dots + \frac{A_n}{x - \xi_n}.$$

Durch Multiplication mit $\varphi(x)$ erhält man hieraus

$$\psi(x) = A_1 \frac{\varphi(x)}{x - \xi_1} + A_2 \frac{\varphi(x)}{x - \xi_2} + \dots + A_n \frac{\varphi(x)}{x - \xi_n}.$$

Ersetzt man in dieser Identität für x den besonderen Werth ξ_1 , so verschwinden rechts alle Glieder vom zweiten an, da die Grössen

$$\frac{\varphi(x)}{x - \xi_2}, \frac{\varphi(x)}{x - \xi_3}, \dots, \frac{\varphi(x)}{x - \xi_n}$$

alle den Faktor $x - \xi_1$ enthalten. Für die Grösse $\varphi(x) : (x - \xi_1)$ verschwinden Zähler und Nenner, der Werth dieses Quotienten wird daher $\varphi'(\xi)$ (Diff.-Rechn., § 12). Somit gewinnt man

$$\psi(\xi_1) = A_1 \varphi'(\xi_1),$$

und hieraus ergibt sich der gesuchte Zähler A_1 zu

$$2. \quad A_1 = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}.$$

In gleicher Weise folgt allgemein

$$3. \quad A_i = \frac{\psi(\xi_i)}{\varphi'(\xi_i)}.$$

Sind nun sämtliche ξ real, so sind auch alle A real und man erhält, wenn man die A in 1. einsetzt und integrirt

$$4. \quad \int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{\psi(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} l(x - \xi_1) + \frac{\psi(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)} l(x - \xi_2) + \dots + \frac{\psi(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)} l(x - \xi_n) + C.$$

Sind nicht alle ξ real, so treten eine gerade Anzahl complexer ξ auf, die paarweis conjugirt sind. Wenn ξ_k und $\bar{\xi}_k$ conjugirt sind, so sind auch die zugehörigen Zähler A_k und \bar{A}_k conjugirt, also von der Form $M + iN$ und $M - iN$. Ist nun

$$\xi_k = r + is, \text{ also } \bar{\xi}_k = r - is,$$

so ist

$$\frac{A_k}{x - \xi_k} + \frac{\bar{A}_k}{x - \bar{\xi}_k} = \frac{(A_k + \bar{A}_k)x - A_k \bar{\xi}_k - \bar{A}_k \xi_k}{x^2 - (\xi_k + \bar{\xi}_k)x + \xi_k \bar{\xi}_k}.$$

Da nun

$$A_k \bar{\xi}_k + \bar{A}_k \xi_k = Mr + Ns + i(Nr - Ms) + Mr + Ns - i(Nr - Ms) = 2(Mr + Ns),$$

folgt schliesslich

$$\frac{A_k}{x - \xi_k} + \frac{\bar{A}_k}{x - \bar{\xi}_k} = 2 \cdot \frac{Mx - Mr - Ns}{x^2 - 2rx + r^2 + s^2}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{A_k}{x - \xi_k} + \frac{\bar{A}_k}{x - \bar{\xi}_k} \right) dx &= 2M \int \frac{(x - r) dx}{(x - r)^2 + s^2} - 2Ns \int \frac{dx}{(x - r)^2 + s^2} \\ &= M \ln[(x - r)^2 + s^2] - 2N \operatorname{arctang} \frac{x - r}{s} + C. \end{aligned}$$

3. Wir wenden uns nun zu dem Falle, dass die Function $\varphi(x)$ mehrere lineare Faktoren enthält. Es sei $(x - \xi_1)^a$ ein Faktor von $\varphi(x)$, also

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^a \varphi_1(x),$$

bei φ_1 eine Function vom Grade $(n - a)$ ist. Wir versuchen nun die Zerlegung

$$1. \quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x - \xi_1)^a \varphi_1(x)} = \frac{A_0}{(x - \xi_1)^a} + \frac{A_1}{(x - \xi_1)^{a-1}} + \dots + \frac{A_{a-1}}{x - \xi_1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Hierbei bezeichnet $\psi_1(x)$ eine Function von minderem Grade, als $\varphi_1(x)$.

Setzt man*) $x - \xi_1 = \frac{1}{z}$, also $x = \frac{1 + \xi_1 z}{z}$, so wird aus 1.

$$\frac{z^a \psi \left(\frac{1 + \xi_1 z}{z} \right)}{\varphi_1 \left(\frac{1 + \xi_1 z}{z} \right)} = A_0 z^a + A_1 z^{a-1} + \dots + A_{a-1} z + \frac{\psi_1 \left(\frac{1 + \xi_1 z}{z} \right)}{\varphi_1 \left(\frac{1 + \xi_1 z}{z} \right)}.$$

Macht man die einzelnen Theile jeder der Functionen φ_1 , ψ und ψ_1 gleichig und vereint sie dann, so erscheinen diese Functionen als Quotienten von Functionen von z von demselben Grade, den die ursprünglichen Functionen hatten, dividirt durch die höchste vorkommende Potenz von z . Sind also φ_1 und $\psi_1(x)$ vom Grade $n - \delta$ bez. $n - a - \epsilon$, und bezeichnen Φ_1 , Ψ , Ψ_1 die Functionen von den Graden $n - \alpha$, $n - \delta$, $n - a - \epsilon$, so hat man

$$\varphi_1 \left(\frac{1 + \xi_1 z}{z} \right) = \frac{\Phi_1(z)}{z^{n-\alpha}}, \quad \psi \left(\frac{1 + \xi_1 z}{z} \right) = \frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}}, \quad \psi_1 \left(\frac{1 + \xi_1 z}{z} \right) = \frac{\Psi_1(z)}{z^{n-a-\epsilon}}.$$

Daher wird aus 2.

$$z^a \cdot \frac{\Psi(z)}{z^{n-\delta}} \cdot \frac{z^{n-\alpha}}{\Phi_1(z)} = A_0 z^a + \dots + A_{a-1} z + \frac{\Psi_1(z)}{z^{n-a-\epsilon}} \cdot \frac{z^{n-\alpha}}{\Phi_1(z)},$$

oder einfacher

$$3. \quad \frac{z^a \Psi(z)}{\Phi_1(z)} = A_0 z^a + \dots + A_{a-1} z + \frac{z^a \Psi_1(z)}{\Phi_1(z)}.$$

Die Function Φ_1 kann nicht durch Annullirung einiger Coefficienten von minderem Grade als $n - \alpha$ sein; denn den Wurzeln z der Gleichung

*) DÖLP, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung, nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen. Giessen 1869. pag. 81.

$$4. \quad \frac{\Phi_1(z)}{z^{n-\alpha}} = 0$$

entsprechen die Wurzeln der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$; davon sind aber die $n - \alpha$ Wurzeln $z = \infty$ von 4. auszunehmen, denn sie liefern $x - \xi_1 = 1 : z = 0$, also $x = \xi_1$ während nach der Voraussetzung die Function $\varphi_1(x)$ den Faktor $x - \xi_1$ nicht besitzt. Um die $n - \alpha$ Wurzeln von $\varphi_1(x) = 0$ zu erhalten, hat man also nur die Wurzeln von $\Phi_1(z) = 0$ zu ermitteln und in $x - \xi_1 = 1 : z$ einzusetzen. Verschwinden nun die Coefficienten von $z^{n-\alpha}$, $z^{n-\alpha-1}$, $z^{n-\alpha-2}$, ..., $z^{n-\alpha-\alpha}$ in $\Phi_1(z)$, so würde die Gleichung $\Phi_1(z) = 0$ k gleiche Wurzeln $z = \infty$ haben, im Widerspruche mit der Voraussetzung, wie soeben gezeigt wurde.

In ganz gleicher Weise ist ersichtlich, dass $\Psi(z)$ und $\Psi_1(z)$ nicht von minderem Grade als $n - \delta$, bez. $n - \alpha - \varepsilon$ ausfallen können; mithin ist $z^\delta \Psi(z)$ vom Grade n und $z^\varepsilon \Psi_1(z)$ vom Grade $n - \alpha$.

Man erhält daher die Darstellung 3., indem man die algebraische Division $z^\delta \Psi(z) : \Psi_1(z)$ nach fallenden Potenzen von z geordnet ausführt.

Das höchste Glied des Quotienten ist $A_0 z^\alpha$; man berechnet ihn bis zu dem Gliede $A_{\alpha-1} z$. Der Rest ist vom Grade $n - \alpha$, und ist die Function

$$z^\varepsilon \Psi_1(z).$$

Substituiert man in

$$4. \quad \frac{z^\varepsilon \Psi(z)}{\Phi_1(z)}$$

für z rückwärts wieder den Werth $z = 1 : (x - \xi_1)$, so geht 4. in $\psi_1(x) : \varphi_1(x)$ über; somit ist nun ψ_1 bekannt. Hat nun $\varphi_1(x)$ lauter ungleiche lineare Faktoren, so wird $\psi_1(x) : \varphi_1(x)$ nach No. 2 weiter zerlegt; enthält hingegen $\varphi_1(x)$ noch mehrfache lineare Faktoren, so hat man die soeben gegebene Entwicklung zu wiederholen. Ist

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)^\alpha \cdot (x - \xi_2)^\beta \cdot \dots \cdot (x - \xi_r)^\rho,$$

so erhält man schliesslich

$$5. \quad \begin{aligned} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{A_0}{(x - \xi_1)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - \xi_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-2}}{(x - \xi_1)^2} + \frac{A_{\alpha-1}}{x - \xi_1} \\ &+ \frac{B_0}{(x - \xi_2)^\beta} + \frac{B_1}{(x - \xi_2)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-2}}{(x - \xi_2)^2} + \frac{B_{\beta-1}}{x - \xi_2} \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \frac{R_0}{(x - \xi_r)^\rho} + \frac{R_1}{(x - \xi_r)^{\rho-1}} + \dots + \frac{R_{\rho-2}}{(x - \xi_r)^2} + \frac{R_{\rho-1}}{x - \xi_r}. \end{aligned}$$

Sind nun alle $\xi_1 \dots \xi_r$ real, so ist mit dieser Zerlegung auch die Integration von $[\psi(x) : \varphi(x)] dx$ erledigt; man erhält

$$6. \quad \begin{aligned} \int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx &= -\frac{(\alpha-1)A_0}{(x - \xi_1)^{\alpha-1}} - \frac{(\alpha-2)A_1}{(x - \xi_1)^{\alpha-2}} - \dots - \frac{A_{\alpha-2}}{x - \xi_1} + A_{\alpha-1} l(x - \xi_1) \\ &- \frac{(\beta-1)B_0}{(x - \xi_2)^{\beta-1}} - \frac{(\beta-2)B_1}{(x - \xi_2)^{\beta-2}} - \dots - \frac{B_{\beta-2}}{x - \xi_2} + B_{\beta-1} l(x - \xi_2) \\ &- \dots \dots \dots \\ &- \frac{(\rho-1)R_0}{(x - \xi_r)^{\rho-1}} - \frac{(\rho-2)R_1}{(x - \xi_r)^{\rho-2}} - \dots - \frac{R_{\rho-2}}{x - \xi_r} + R_{\rho-1} l(x - \xi_r). \end{aligned}$$

4. Ist $\xi_1 = r + is$ und enthält φ den Faktor $(x - r - is)^\mu$, so enthält φ auch den conjugirten Faktor $(x - r + is)^\mu$; beide Faktoren geben vereint den Faktor

$$[(x - r)^2 + s^2]^\mu.$$

$$1. \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0 x + B_0}{[(x-r)^2 + s^2]^\mu} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-r)^2 + s^2]^{\mu-1}} + \dots + \frac{A_{\mu-1} x + B_{\mu-1}}{[(x-r)^2 + s^2]} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

wobei $\varphi_1(x)$ das Produkt der Faktoren bezeichnet, die in $\varphi(x)$ enthalten sind.

Multipliziert man nämlich in 1. beide Seiten mit $[(x-r)^2 + s^2]^\mu$, so verschwindet die linke Seite dabei den complexen Werth M_0 .

$$2. \frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)} = A_0 x + B_0 + (A_1 x + B_1) U + (A_2 x + B_2) U^2 + \dots + (A_{\mu-1} x + B_{\mu-1}) U^{\mu-1} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

Ersetzt man hier x durch $r + is$, so verschwindet die linke Seite dabei den complexen Werth M_0 .

$$3. M_0 + iN_0 = A_0(r + is) + B_0$$

Durch Vergleichung der realen und imaginären Theile

$$A_0 = \frac{N_0}{s}, \quad B_0 = M_0 - \frac{r}{s} N_0$$

Function $\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0)$ verschwindet in $x = r + is$, und x durch ξ_1 ersetzt wird; hieraus folgt, dass $x - \xi_1$ ein Factor ist; sie hat daher auch den complexen Theilbar durch das Produkt dieser beiden Faktoren aus, und bezeichnet den Quotienten mit χ_1 .

$$\psi(x) - \varphi_1(x)(A_0 x + B_0) = U \cdot \chi_1$$

Setzt man dies in 2. ein, so enthalten alle Glieder der rechten Seite den Factor U . Entfernung desselben bleibt

$$\frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)} = A_1 x + B_1 + (A_2 x + B_2) U + (A_3 x + B_3) U^2 + \dots + (A_{\mu-1} x + B_{\mu-1}) U^{\mu-2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

Setzt man hier $x = \xi_1$, so erhält man

$$A_1 \xi_1 + B_1 = \frac{\chi_1(\xi_1)}{\varphi_1(\xi_1)},$$

aus wie bei 3. und 4. durch Sonderung des Realen und Imaginären A_1 und B_1 .

Die wiederholte Anwendung dieses in der Ausführung des elementaren und durchsichtigen Verfahrens gibt

es ist klar, dass man ein gleiches Verfahren auch auf die Integration von $(\psi : \varphi) dx$ anwenden könnte.

Für den Fall, dass $\varphi(x)$ mehrfache complexe Factoren enthält, ist die Integration von $(\psi : \varphi) dx$ daher auf die Entwicklung der

$$1. \int \frac{Ax + B}{(x-r)^2 + s^2} dx \quad \text{und} \quad 2. \int \frac{1}{[(x-r)^2 + s^2]^n} dx$$

wobei n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Das Integral

$$3. \int \frac{Ax + B}{(x-r)^2 + s^2} dx = \int \frac{A(x-r) + (B + Ar)}{(x-r)^2 + s^2} dx = \frac{A}{2} \int \frac{1}{[(x-r)^2 + s^2]} dx + \frac{B + Ar}{s} \int \frac{1}{[(x-r)^2 + s^2]} dx$$

Für das zweite erhält man die Zerlegung

$$4. \int \frac{Ax + B}{[(x-r)^2 + s^2]^n} dx = A \int \frac{(x-r) dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n} + (B + Ar) \int \frac{dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n}.$$

Nun ist

$$5. \int \frac{(x-r) dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{[(x-r)^2 + s^2]^{n-1}},$$

also erübrigt noch die Ausführung des Integrals

$$\int \frac{dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n}.$$

Führt man hier eine neue Variable durch die Gleichung ein

$$x - r = sz,$$

so ist $dx = s dz$, $(x-r)^2 + s^2 = s^2(1+z^2)$,
und man erhält

$$6. \int \frac{dx}{[(x-r)^2 + s^2]^n} = \frac{1}{s} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

Wie man aus der Zusammenrechnung der rechten Seite sofort sieht, ist

$$7. \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^n};$$

ferner erhält man durch theilweise Integration

$$8. \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^n} = \int z \cdot \frac{z dz}{(1+z^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Daher ist

$$9. \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Durch dieselbe Formel reducirt man $\int dz : (1-z^2)^{n-1}$ auf $\int dz : (1+z^2)^{n-2}$ u. s. w., bis man zum Schluss auf

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \arctang z + C$$

kommt.

6. Alles in No. 1 bis No. 5 Entwickelte zusammenfassend, erhalten wir somit das Ergebniss: Das Integral einer rationalen algebraischen Function lässt sich in jedem Falle durch eine endliche Anzahl von rationalen Functionen, Logarithmen und Arcustangens ausdrücken.

7. Die Anwendung der soeben entwickelten Regeln wollen wir nun an einigen Beispielen zeigen.

A.

$$\int \frac{x^3 + 9x^2 - 4x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6)} dx.$$

Hier ist $\psi(x) \equiv x^3 + 9x^2 - 4x + 7$, $\varphi(x) \equiv (x-2)(x-3)(x+2)(x+3)$,
also $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 3$, $\xi_3 = -2$, $\xi_4 = -3$.

Die Werthe $\varphi'(\xi_k)$ werden am zweckmässigsten nach der Formel berechnet

$$\varphi'(\xi_k) = \left[\frac{\varphi(x)}{x - \xi_k} \right]_{x = \xi_k}.$$

Man findet $\varphi'(2) = -20$, $\varphi'(3) = 30$, $\varphi'(-2) = 20$, $\varphi'(-3) = -30$.

Ferner ist $\psi(2) = 43$, $\psi(3) = 103$, $\psi(-2) = 43$, $\psi(-3) = 73$.

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^3 + 9x^2 - 4x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6)} = -\frac{43}{20} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{30}{103} \cdot \frac{1}{x-3} +$$

Hieraus ergibt sich

$$\int \frac{x^3 + 9x^2 - 4x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6)} dx = -\frac{43}{20} \log(x-2) + \frac{43}{20} \log(x+2)$$

B.

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 6x + 13)}$$

Hier ist $\psi(x) = 1$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x-2-i)(x-2+i)(x-3-2i) \\ \xi_1 &= 2+i, \quad \xi_2 = 2-i, \quad \xi_3 = 3+2i, \\ \varphi'(2+i) &= 4+8i, \quad \varphi'(2-i) = 4- \\ \varphi'(3+2i) &= -16-8i, \quad \varphi'(3-2i) = - \end{aligned}$$

Man hat daher die Zerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 6x + 13)} &= \frac{1}{4+8i} \cdot \frac{1}{x-2-i} + \\ &= \frac{1}{16+8i} \cdot \frac{1}{x-3-2i} - \frac{1}{16-8i} \cdot \frac{1}{x-3+2i} \end{aligned}$$

Durch Vereinigung conjugirt complexer Ausdrücke er

$$\begin{aligned} \frac{1}{4+8i} \cdot \frac{1}{x-2-i} + \frac{1}{4-8i} \cdot \frac{1}{x-2+i} &= \frac{1}{10} \\ \frac{1}{16-8i} \cdot \frac{1}{x-3-2i} + \frac{1}{16+8i} \cdot \frac{1}{x-3+2i} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Da nun

$$\int \frac{x dx}{(x-2)^2 + 1} = \frac{1}{2} \log(x^2 - 4x + 5) + 2 \arctan$$

$$\int \frac{(x-2) dx}{(x-3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \log(x^2 - 6x + 13) + \frac{1}{2} \arctan$$

so folgt schliesslich

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 6x + 13)} = \frac{1}{20} \log \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 6x + 13} +$$

C.

$$\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)^2(x-3)^2} dx.$$

Hier ist $\xi_1 = 2$; die Substitution $x = \frac{1+2s}{s}$ liefert

$$x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{s^2} (-s^2 + s + 1)$$

$$\varphi_1\left(\frac{1+2s}{s}\right) = \left(\frac{1+2s}{s} - 3\right)^2 = \frac{1}{s^2} (1 -$$

Daher ist

$$\frac{s^2 \Psi(s)}{\Phi_1(s)} = \frac{s^2(-s^2 + s + 1)}{(1-s)^2}.$$

Nun ist

$$(-z^5 + z^4 + z^3) : (z^2 - 2z + 1) = -z^3 - z^2 + \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1}.$$

Substituiert man im Restbruche $z = 1 : (x - 2)$, so erhält man

$$\frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{1}{(x - 3)^2}.$$

Daher hat man die Zerlegung

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 2)^3(x - 3)^2} = -\frac{1}{(x - 2)^3} - \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{(x - 3)^2},$$

folglich ist

$$\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 2)^3(x - 3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 3}.$$

D.

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^4(x - 1)^2} dx.$$

In diesem Falle hat man $\xi_1 = 1$, und hat daher die Substitution $x = (1 + z) : z$; sie ergibt

$$\begin{aligned} x^3 + 4 &= \frac{1}{z^3} (5z^3 + 3z^2 + 3z + 1), \\ \varphi_1\left(\frac{1+z}{z}\right) &= \frac{1}{z^4} (z+1)^4, \quad \text{und daher} \\ \frac{z^3 \Psi(z)}{\Phi_1(z)} &= \frac{z^3 (5z^3 + 3z^2 + 3z + 1)}{(z+1)^4}. \end{aligned}$$

Man erhält weiter

$$\begin{aligned} (5z^6 + 3z^5 + 3z^4 + z^3) : (z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1) &= 5z^2 - 17z \\ &+ \frac{41z^4 + 83z^3 + 63z^2 + 17z}{(z+1)^4}. \end{aligned}$$

Ersetzt man im Restbruche z wieder durch $1 : (x - 1)$, also $z + 1$ durch $x : (x - 1)$, so erhält man

$$\frac{41z^4 + 83z^3 + 63z^2 + 17z}{(z+1)^4} = \frac{17x^3 + 12x^2 + 8x + 4}{x^4}.$$

Folglich ist

$$\frac{x^3 + 4}{x^4(x - 1)^2} = \frac{5}{(x - 1)^2} - \frac{17}{x - 1} + \frac{17}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{4}{x^4},$$

und mithin

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^4(x - 1)^2} dx = -\frac{5}{x - 1} - 17 \ln \frac{x - 1}{x} - \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + C.$$

E.

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2(x + 1)^3}.$$

Die Auflösung der Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ liefert $\xi_1 = 1 + 2i$. Um die Darstellung zu erreichen

$$\frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2(x + 1)^3} = \frac{A_0x + B_0}{(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{A_1x + B_1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{\Psi_1(x)}{(x + 1)^3},$$

setze man $x = 1 + 2i$ in

$$\frac{1}{(x + 1)^3} = A_0x + B_0 + (A_1x + B_1)(x^2 - 2x + 5) + \frac{\Psi_1(x)(x^2 - 2x + 5)^2}{(x + 1)^3}$$

$$2i) + B_0,$$

und daher $A_0 = -\frac{1}{64}, \quad B_0 = -\frac{1}{64}.$

Man bildet nun

$$1 - \varphi_1(x)(A_0x + B_0),$$

wobei $\varphi_1(x) = (x+1)^3$, und erhält

$$\varphi_1(x)(A_0x + B_0) = \frac{1}{64}[64 + (x+1)^4] = \frac{1}{64}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5)$$

Dies durch $x^2 - 2x + 5$ dividirt, ergibt den Quotienten

$$\chi_1(x) = \frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13).$$

Daher hat man nun

$$\frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13) = A_1x + B_1 + \frac{\psi_1(x)(x^2 - 2x + 5)}{(x+1)^3}$$

Setzt man hier wieder $x = 1 + 2i$, also $x^2 + 6x + 13 = 1$, so erhält man

$$-\frac{i}{64} = A_1(1 + 2i) + B_1, \quad \text{folglich } A_1 = -\frac{1}{128}, \quad B_1 = \frac{1}{128}$$

Bildet man weiter $\chi_1(x) - \varphi_1(x)(A_1x + B_1)$, so erhält man

$$\frac{1}{64}(x^2 + 6x + 13) - \frac{1}{128}(x+1)^3(-x+1) = \frac{1}{128}(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 5)$$

Dies wieder durch $(x^2 - 2x + 5)$ dividirt, ergibt

$$\frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5).$$

Man hat daher

$$\frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5) = \frac{\psi_1(x)}{(x+1)^3}, \quad \text{also } \psi_1(x) = \frac{1}{128}(x^2 + 4x + 5)$$

Macht man noch von der Identität Gebrauch

$$x^2 + 4x + 5 = (x+1)^2 + 2(x+1) + 2,$$

so hat man schliesslich die vollständige Zerlegung

$$\frac{1}{(x^2 - 2x + 5)(x+1)^3} = -\frac{1}{64} \cdot \frac{x+1}{(x^2 - 2x + 5)^2} - \frac{1}{128} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - 2x + 5)} + \frac{1}{128} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} \right)$$

Nun hat man

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{[(x-1)^2 + 4]^2} dx &= \int \frac{(x-1)dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} + 2 \int \frac{dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} \\ \int \frac{(x-1)dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 2x + 5)}{[(x-1)^2 + 4]^2} \\ \int \frac{dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} - \frac{1}{4} \int \frac{(x-1)dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} \\ \int \frac{(x-1)dx}{[(x-1)^2 + 4]^2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{(x-1)^2 + 4} + \frac{1}{4} \arctan \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

Daher ergibt sich schliesslich

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2(x + 1)^3} = \frac{1}{256} \left[3! \frac{1}{x^2 - 2x + 5} - \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 5} - \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \frac{x-1}{2} \right. \\ \left. + 2!(x + 1) - \frac{4}{x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} \right] + C.$$

§ 4. Integration irrationaler Functionen.

1. Die Integrale irrationaler Function lassen sich, wie wir später zeigen werden, im Allgemeinen nicht auf die bisher bekannten Functionen reduciren; nur in den einfachsten Fällen gelingt diese Reduction, und derartige Fälle sollen im gegenwärtigen Abschnitte betrachtet werden.

2. Kommt in einer irrationalen Function von x die Variable nur in einer Wurzel vor, und ist der Radicand dieser Wurzel eine ganze Potenz einer linearen Function von x , also die Function von der Form

$$F[x, \sqrt[n]{(ax + b)^m}],$$

so lässt sich das Integral

$$\int F[x, \sqrt[n]{(ax + b)^m}] dx$$

durch Substitution einer neuen Variablen leicht auf das Integral einer rationalen Function reduciren. Setzt man nämlich

$$ax + b = z^n,$$

also

$$x = \frac{z^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a} z^{n-1} dz,$$

so geht das Integral über in

$$\int F[x, \sqrt[n]{(ax + b)^m}] dx = \frac{n}{a} \int F\left(\frac{z^n - b}{a}, z^n\right) dz,$$

und dieses Integral kann nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Anleitungen vollständig entwickelt werden.

Beispiel.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x + 1}}.$$

Man setze $x + 1 = z^3$, also $x = z^3 - 1$, $dx = 3z^2 dz$.

Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x + 1}} dx &= 3 \int \frac{z^6 - 2z^3 + 1}{z} z^2 dz = 3 \int (z^7 - 2z^4 + z) dz \\ &= \frac{3}{8} z^8 - \frac{6}{5} z^5 + \frac{3}{2} z^2 + C \\ &= \frac{3 \sqrt[3]{(x + 1)^2}}{40} [5(x + 1)^2 - 16(x + 1) + 20] + C. \end{aligned}$$

3. Wir wenden uns nun zur Entwicklung des Integrals

$$1. \quad J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Man hat

$$\begin{aligned} 2. \quad a + 2bx + cx^2 &= a - \frac{b^2}{c} + c \left(x + \frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{b^2 - ac}{c} \left[\frac{c^2}{b^2 - ac} \left(x + \frac{b}{c}\right)^2 - 1 \right]. \end{aligned}$$

Ist nun $b^2 - ac < 0$, so muss $c > 0$ sein, da sonst der Radicand für alle realen Werthe von x negativ, die Wurzel also imaginär würde, während wir ausdrücklich uns gegenwärtig auf Integrale realer Functionen beschränken. Macht man von der Substitution Gebrauch

ler Functionen.

$$dx = \frac{\sqrt{ac}}{c}$$

$$\frac{dz}{1+z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{\sqrt{c}\sqrt{a+2bx}}{\sqrt{ac-b^2}} \left(\frac{1}{ac-b^2} \right) \text{ mit}$$

schmelzen, und erhält dann

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln [cx + b + \sqrt{c(a+2bx+b^2-ac)}]$$

$$b^2 - ac < 0, \quad c > 0.$$

Ist hingegen $b^2 - ac > 0$, so setzen wir in 2.

$$6. \frac{c}{\sqrt{b^2-ac}} \left(x + \frac{b}{c} \right) = z, \quad \text{also} \quad dx = \frac{\sqrt{b^2-ac}}{c} dz$$

und erhalten dadurch

$$a + 2bx + cx^2 = - \frac{b^2 - ac}{c} (1 - z^2)$$

Ist nun $c > 0$, so muss $z^2 > 1$ sein, damit $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ real ist. Unter dieser Beschränkung setzen wir

$$a + 2bx + cx^2 = \frac{b^2 - ac}{c} (z^2 - 1)$$

Aus der Differentialformel

$$d \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

ist nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[cx + b + \frac{\sqrt{c(a+2bx+b^2-ac)}}{\sqrt{b^2-ac}} \right]$$

oder, wenn man die Constante mit $\left(-\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \sqrt{b^2-ac} \right)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln [cx + b + \sqrt{c(a+2bx+b^2-ac)}]$$

Diese Integralformel ist daher anzuwenden,

wenn $b^2 - ac < 0$ und $c > 0$, für jedes

wenn $b^2 - ac > 0$ und $c > 0$, für $\frac{cx + b}{\sqrt{b^2-ac}} > 1$

Ist $c < 0$, so wird $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ nur real, so lange $a+2bx+cx^2 \geq 0$ ist, und unter dieser Beschränkung für z ist nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = - \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin z + C$$

so, wenn man wieder z durch x ausdrückt

$$10. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{cx + b}{\sqrt{b^2 - ac}} + C,$$

$$b^2 - ac > 0, \quad c < 0, \quad \frac{(cx + b)^2}{b^2 - ac} \leq 1.$$

Ist $ac - b^2 = 0$, so sind die Substitutionen unbrauchbar, die zu den Formeln 9. und 10. führen. In diesem Falle ist

$$a + 2bx + cx^2 = c \left(x + \frac{b}{c} \right)^2.$$

Die Wurzel ist daher rational und man hat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{x + \frac{b}{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(x + \frac{b}{c} \right) + C.$$

4. Zur Reduction des Integrals

$$\int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx$$

dient folgender Satz*):

Die Constanten $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}, B_n$ lassen sich immer so wählen, dass

$$1. \quad \int \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx$$

$$= (B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \dots + B_{n-1}) \sqrt{a + 2bx + cx^2} + B_n \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

Durch Differentiation erhält man nämlich aus 1.

$$\frac{A_0 x^n + \dots + A_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = (B_0 x^{n-1} + \dots + B_{n-1}) \frac{b + cx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + (n-2) B_1 x^{n-3} + \dots + B_{n-2}] \sqrt{a + 2bx + cx^2}$$

$$+ \frac{B_n}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so erhält man

$$A_0 x^n + \dots + A_n = (B_0 x^{n-1} + \dots + B_{n-1}) (cx + b)$$

$$+ [(n-1) B_0 x^{n-2} + \dots + B_{n-2}] (cx^2 + 2bx + a) + B_n.$$

Vergleicht man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten, so erhält man zur Bestimmung der B die linearen Gleichungen

$$A_0 = nc B_0,$$

$$A_1 = (n-1) c B_1 + (2n-1) b B_0,$$

$$A_2 = (n-2) c B_2 + (2n-3) b B_1 + (n-1) a B_0,$$

$$A_3 = (n-3) c B_3 + (2n-5) b B_2 + (n-2) a B_1,$$

$$A_4 = (n-4) c B_4 + (2n-7) b B_3 + (n-3) a B_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{n-2} = 2c B_{n-2} + 5b B_{n-3} + 3a B_{n-4},$$

$$A_{n-1} = c B_{n-1} + 3b B_{n-2} + 2a B_{n-3},$$

$$A_n = b B_{n-1} + a B_{n-2} + B_n.$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach einander die Zahlen B_0, B_1, \dots, B_n bestimmen.

Beispiel. Für die Ermittlung von

*) DÖLP, Aufgaben, pag. 90.

'x

$$1, \quad a = 1$$

$$\begin{aligned} &= 3B_2 + \\ &= 2B_4 + \\ &= B_6 + \\ &B_6. \end{aligned}$$

$$B_4 = \frac{1}{16}$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16} \sqrt{1+x^2}$$

5. Um das Integral zu ermitteln

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{a+2bx+cx^2}},$$

en wir $x = \frac{1}{y} + a$, also $dx =$

$$a+2bx+cx^2 = \frac{1}{y^2} [c+2(b+ca)y+(a+ca^2)]$$

erhalten dadurch

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{a+2bx+cx^2}} = - \int \frac{dy}{y^{n+1} \sqrt{c+2(b+ca)y+(a+ca^2)}}$$

Ist nun $a^2+2ba+ca^2=0$, also $x-a$ ein Faktor, so reducirt sich das Integral auf

$$- \int \frac{y^{n-1} dy}{\sqrt{c+2(b+ca)y}}$$

wird durch die Substitution

$$c+2(b+ca)y = z^2$$

das Integral einer rationalen Function transformirt.

$z^2 \geq 0$, so hat man 1. nach den im vorigen Abschnitte entwickelten Regeln.

6. Hiermit ist nun auch das allgemeine Integral

$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}},$$

in $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Functionen von x bezeichnend, reducirt werden kann, wenn $\varphi(x)$ irreducibel ist.

Man zerlege den Quotienten $\psi(x):\varphi(x)$ nach den in §. 1. entwickelten Regeln in eine ganze Function und in ein Polynom von Brüchen

$$\frac{A}{(x-\xi)^n}.$$

Dadurch zerfällt das vorgelegte Integral in ein Polynom und in ein Integral, welches nach den gegebenen Regeln entwickelt werden können.

7. Alle Integrale von der Form

$$1. \quad \int F(x, \sqrt{a+2bx+cx^2}) dx,$$

wobei F eine rationale algebraische Function von x und $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ bedeutet, können durch eine geschickte Substitution in Integrale einer rationalen Function transformirt werden.

Eine solche Substitution einer neuen Variablen y muss die Bedingungen erfüllen, dass durch dieselbe sowol x als $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ rational in y ausgedrückt werden. Diese Bemerkung führt auf den Gedanken, eine Substitution von der Form zu versuchen

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = A + Bx + Cy,$$

worin A, B, C noch zu bestimmen sind. Durch Quadriren findet man

$$2. \quad a + 2bx + cx^2 = A^2 + 2ABx + 2ACy + B^2x^2 + 2BCxy + C^2y^2.$$

Damit nun x rational in y ausgedrückt werde, muss $B^2 = c$ sein; um die Formeln zu vereinfachen nehmen wir ferner $AB = b$, also $A = b : \sqrt{c}$. Hierdurch erhält man aus 2., wenn man zur Abkürzung $b^2 - ac$ durch Δ bezeichnet

$$3. \quad x = - \frac{\Delta + cC^2y^2 + 2b\sqrt{c} \cdot Cy}{2\sqrt{c}Cy}.$$

Hierin kann noch C beliebig gewählt werden; nimmt man $C = 2b : \sqrt{c}$, so wird $cC^2 = 2b\sqrt{c}C = 4b^2$ und man erhält die Formelgruppe

$$4. \quad \begin{cases} x = - \frac{\Delta + 4b^2(y + y^2)}{4bcy}, \\ \sqrt{a + 2bx + cx^2} = - \frac{\Delta - 4b^2y^2}{4b\sqrt{c} \cdot y}, \\ dx = \frac{\Delta - 4b^2y^2}{4bcy^2} dy. \end{cases}$$

Diese Formeln sind nur anzuwenden, so lange c positiv ist, da sonst durch \sqrt{c} imaginäre Bestandtheile eintreten würden.

Ist c negativ, so ist $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ für reale Werthe von x nur dann real, wenn $b^2 - ac > 0$ ist, wenn also $a + 2bx + cx^2$ reale lineare Faktoren hat.

Ist nun $a + 2bx + cx^2 = c(x - \alpha)(x - \beta)$, so setze man

$$5. \quad c \frac{x - \alpha}{x - \beta} = y^2, \text{ also}$$

$$6. \quad a + 2bx + cx^2 = c(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \beta)^2 y^2.$$

Aus 5. und 6. folgen die Substitutionsformeln

$$7. \quad \begin{cases} x = \frac{\beta y^2 - \alpha c}{y^2 - c}, \\ \sqrt{a + 2bx + cx^2} = \frac{c(\beta - \alpha)y}{y^2 - c}, \\ dx = -2 \frac{c(\beta - \alpha)y}{(y^2 - c)^2} dy. \end{cases}$$

Durch die Anwendung der Formeln 4. gewinnt man insbesondere, wenn $c > 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} &= - \int \frac{dy}{\sqrt{c} \cdot y} = - \frac{1}{\sqrt{c}} \log y \\ &= - \frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{-(b + cx) + \sqrt{c} \cdot \sqrt{a + 2bx + cx^2}}{\sqrt{c}} + C. \end{aligned}$$

Rechnet man $\frac{1}{\sqrt{c}} \log \sqrt{c}$ mit in die Constante, so kann man hierfür schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{1}{-(b + cx) + \sqrt{c} \cdot \sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C.$$

Erweitert man den Logarithmanden mit $b + cx + \sqrt{c} \sqrt{a + 2bx + cx^2}$, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l \frac{b + cx + \sqrt{c} \sqrt{a + 2bx + cx^2}}{ac - b^2} + C.$$

Wird hiervon der Bestandtheil $\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l \frac{1}{ac - b^2}$ zur Constanten gerechnet, so bleibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l(b + cx + \sqrt{c} \sqrt{a + 2bx + cx^2}) + C,$$

in Uebereinstimmung mit No. 3, 5.

Ist $c < 0$, so ergibt die zweite Substitution

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -2 \int \frac{dy}{-c + y^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc tang} \frac{y}{\sqrt{-c}} + C.$$

Ist z die Tangente eines Arcus, so ist dessen Sinus bekanntlich $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, daher hat man die cyclometrische Formel

$$\operatorname{arc tang} z = \operatorname{arc sin} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

und folglich

$$\operatorname{arc tang} \frac{y}{\sqrt{-c}} = \operatorname{arc sin} \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}}.$$

Ist ferner z der Sinus eines Arcus, so ist der Sinus des doppelten Arcus $2z \sqrt{1-z^2}$, also hat man

$$2 \operatorname{arc sin} z = \operatorname{arc sin} 2z \sqrt{1-z^2},$$

folglich

$$2 \operatorname{arc sin} \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = \operatorname{arc sin} \frac{2 \sqrt{-c} \cdot y}{y^2 - c}.$$

Benutzt man hier die zweite Gleichung der Gruppe 7., sowie

$$\beta - \alpha = -\frac{2 \sqrt{b^2 - ac}}{c},$$

so ergibt sich

$$2 \operatorname{arc sin} \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = -\operatorname{arc sin} \sqrt{-\frac{c}{b^2 - ac}} (a + 2bx + cx^2).$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$\operatorname{arc sin} t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc sin} \sqrt{1-t^2},$$

und bemerkt, dass

$$1 - \left[\sqrt{-\frac{c}{b^2 - ac}} (a + 2bx + cx^2) \right]^2 = \frac{b^2 + 2bcx + c^2 x^2}{b^2 - ac},$$

so erhält man schliesslich

$$2 \operatorname{arc sin} \frac{y}{\sqrt{y^2 - c}} = \operatorname{arc sin} \frac{cx + b}{\sqrt{b^2 - ac}} - \frac{\pi}{2}.$$

Daher folgt, wenn man $-\frac{\pi}{2}$ in die Constante rechnet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc sin} \frac{cx + b}{\sqrt{(b^2 - ac)}} + C,$$

in Uebereinstimmung mit No. 3, 10.

§ 5. Integration transscendenter Functionen.

1. Die Integrale von Functionen, welche die transscendenten Functionen e^x , lx , $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ enthalten, sind im Allgemeinen ebensowenig durch die bisher bekannten Functionen ausdrückbar, wie die Integrale von irrationalen Functionen; nur in einigen einfachen Fällen gelingt die Reduction auf bekannte Functionen.

2. A. Ein Integral von der Form

$$1. \quad \int f(e^x) dx,$$

worin f eine algebraische Function bezeichnet, verwandelt man in ein Integral einer algebraischen Function durch die Substitution

$$e^x = y, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{y};$$

denn man erhält hierdurch

$$1. \quad \int f(e^x) dx = \int f(y) \frac{dy}{y}.$$

So hat man z. B.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a + be^x} &= \int \frac{dy}{y(a + by)} = \int \frac{1}{a} \left(\frac{1}{y} - \frac{b}{a + by} \right) dy \\ &= \frac{1}{a} [ly - l(a + by)] + C = \frac{1}{a} [x - l(a + be^x)] + C. \end{aligned}$$

B. Für das Integral

$$\int f(e^{ax}) dx$$

benutzt man die Substitution

$$e^{ax} = y, \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{ay},$$

und erhält so

$$2. \quad \int f(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int f(y) \frac{dy}{y}.$$

Auf diesem Wege erhält man

$$\int \sqrt{e^{ax} + 1} dx = \frac{1}{a} \int \sqrt{y + 1} \frac{dy}{y}.$$

Substituirt man hier weiter

$$y = z^2 - 1, \quad dy = 2z dz,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^{ax} + 1} dx &= \frac{2}{a} \int \frac{z^2 dz}{z^2 - 1} = \frac{2}{a} \int \left(1 + \frac{1}{z^2 - 1} \right) dz \\ &= \frac{2}{a} \left(z + \frac{1}{2} l \frac{z - 1}{z + 1} \right) + C \\ &= \frac{2}{a} \left(\sqrt{e^{ax} + 1} + \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{e^{ax} + 1} - 1}{\sqrt{e^{ax} + 1} + 1} \right) + C. \end{aligned}$$

Macht man noch von der Formel Gebrauch

$$\frac{1}{\sqrt{e^{ax} + 1} + 1} = \frac{\sqrt{e^{ax} + 1} - 1}{e^{ax}},$$

so hat man schliesslich

$$\int \sqrt{e^{ax} + 1} dx = \frac{2}{a} [\sqrt{e^{ax} + 1} + l(\sqrt{e^{ax} + 1} - 1)] - x + C.$$

C. Das Integral

$$\int x^n e^{mx} dx$$

kann man zunächst dadurch vereinfachen, dass man $mx = y$ setzt; dann wird $dx = y : m$, $x^n = y^n : m^n$, und man erhält

.nction

dy .

diese
itwic

$e^x dy$
erhäl
) $y^k -$

ann

iren.
um

Integration ergibt sich

$$\int f(x) e^x dx = f(x) e^x - \int f'(x) e^x dx$$

Wendet man diese Formel wiederholt an, so findet

$$\int f(x) e^x dx = e^x [f(x) - f'(x) + f''(x) - \dots]$$

Ist n eine negative ganze Zahl, so führt folgende
fachung: Man erhält aus 4., wenn man $k - 1$ durch

$$\int y^k e^x dy = \frac{y^{k+1} e^x}{k+1} - \frac{1}{k+1} \int y^{k+1} e^x dy$$

Ist nun k negativ, etwa $k = -n$, so erhält man

$$\int \frac{e^x}{y^n} dy = -\frac{e^x}{(n-1)y^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{y^{n-1}} dy$$

Wendet man diese Reductionsformel hinreichend
hliesslich zu dem Integrale

$$\int \frac{e^x}{y} dy,$$

s nicht weiter reducirt werden kann.

So ist

$$\int \frac{e^x}{y^4} dy = -\frac{e^x}{3y^3} + \frac{1}{3} \int \frac{e^x}{y^3} dy$$

$$\int \frac{e^x}{y^3} dy = -\frac{e^x}{2y^2} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x}{y^2} dy$$

$$\int \frac{e^x}{y^2} dy = -\frac{e^x}{y} + \int e^x dy$$

Daher

$$\int \frac{e^x}{y^4} dy = -e^x \left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{6y^2} + \frac{1}{6y} \right) +$$

D. Zur Reduction des Integrals

$$\int (x-a)^n e^x dx$$

setze man $x - a = y$; man erhält

$$9. \quad \int (x-a)^n e^x dx = e^a \int y^n e^y dy$$

und reducirt nun weiter nach Formel 5. oder 8., je
negativ ist.

Für die Bestimmung von $\int \frac{e^x}{x} dx$, sowie
man auf die Entwicklung in eine unendliche

E. Integrale von der Form

$$\int f(a^x) dx, \quad \int f(a^{\frac{1}{x}})$$

reducirt man auf die soeben betrachteten, indem
man macht

$$a^x = e^{x \ln a},$$

und die Substitution ausführt

$$x = \frac{y}{\ln a},$$

Die gegebenen Integrale gehen dadurch in

$$\frac{1}{\ln a} \int f(e^y) dy, \quad \frac{1}{\ln a} \int f(e^{\frac{1}{y}})$$

3. Integrale von Functionen, welche aus
lichen Logarithmus derselben enthalten, also

$$\int f(x, \ln x) dx,$$

kann man auf Integrale mit Exponentialgrößen

$$\ln x = y, \quad \text{also} \quad x = e^y,$$

Man erhält dadurch

$$1. \quad \int f(x, \ln x) dx = \int f(e^y, y) dy$$

A. So erhält man

$$\begin{aligned} \int (\ln x - 2)^3 dx &= \int (y - 2)^3 dy \\ \text{also nach No. 2, 9} \quad &= e^y [(y - 2)^3 - 3(y - 2)^2 + 6(y - 2) - 6] \\ &= e^y (y^3 - 9y^2 + 30y - 24) \\ &= x [(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + 30 \ln x - 24] \end{aligned}$$

B. Ferner erhält man durch dieselbe Substitution

$$\begin{aligned} \int x^m \ln x dx &= \int e^{(m+1)y} \cdot y dy \\ &= \frac{1}{(m+1)^2} e^{(m+1)y} [(m+1)y - 1] \\ &= \frac{1}{(m+1)^2} x^{m+1} [(m+1) \ln x - 1] \end{aligned}$$

Dasselbe Resultat hätte man auch leicht
finden können.

C. Auf letzterem Wege ergibt sich

$$3. \quad \int f(x) \ln x dx = \ln x \int f(x) dx - \int x f(x) dx$$

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function von x ,
so sind die Integrale ausführbar; das Integral 2. ist ein be-
sonderes Beispiel.

D. Ebenso erhält man

$$4. \quad \int x^n \ln(a + bx^m) dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(a + bx^m) - \frac{1}{n+1} \int \frac{bx^m}{a + bx^m} x^{n+1} dx$$

E. Allgemeiner ergibt sich

$$5. \quad \int f(x) \ln \varphi(x) dx = \ln \varphi(x) \int f(x) dx - \int x f(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$$

Ist $f(x)$ eine ganze Function und $\varphi(x)$ eine
stetig ausführbar; doch führt die Formel 5. zu
dem Ziele, insbesondere dann, wenn $\int f(x) dx$ bekannt ist.

F. Man bemerke noch das Integral

unc

2.

y,

1.

folgende einfache Integralformeln

$$1. \quad \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -l \cos x + C,$$

$$2. \quad \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = l \sin x + C,$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \int \frac{d\frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{\tan \frac{1}{2}x}$$

$$4. \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) +$$

5. Integrale goniometrischer Functionen können auf Integrale algebraischer reducirt werden.

$$\int f(\sin x, \cos x) \, dx,$$

so setze man $\tan \frac{1}{2}x = z$; dann ist

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = \frac{2z}{1+z^2}$$

Das Integral geht somit über in

$$\int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2dz}{1+z^2}$$

Ist f eine rationale Function von $\sin x$ und $\cos x$, Function von z zu integrieren.

Man hat hiernach

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \int \frac{2dz}{2az + b - bz^2} = \frac{2}{b} \int \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} l \frac{\sqrt{a^2 + b^2} -}{\sqrt{a^2 + b^2} +} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} l \frac{\sqrt{a^2 + b^2} -}{\sqrt{a^2 + b^2} +} \end{aligned}$$

Dieses Integral kann auch auf folgendem Wege

setzen

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \mu, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \mu$$

Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x - \mu)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot l \tan \end{aligned}$$

Um dieses Ergebniss mit dem vorhergehenden zu

$$\operatorname{tang} \frac{x + \mu}{2} = \frac{\sin \frac{\mu}{2} + \cos \frac{\mu}{2}}{\cos \frac{\mu}{2} - \sin \frac{\mu}{2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}, \quad \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Hiernach erhält man

$$\operatorname{ltang} \frac{x + \mu}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} + \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} - \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}$$

Addirt man hierzu den constanten Betrag

$$\frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}},$$

so erhält man

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a + b \operatorname{tang} \frac{x + \mu}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + a - b \operatorname{tang} \frac{x + \mu}{2}}$$

Allgemeiner ergibt sich

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = 2 \int \frac{dx}{b + c + \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tang} \frac{x + \mu}{2}}$$

Für die weitere Ausführung ist zu unterscheiden Integrale in reale oder in complexe Form.

6. Ersetzt man in dem Integrale

$$\int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tang} x)$$

den Cosinus und die Tangente durch den Sinus, der Form

$$\int \varphi(\sin x) dx.$$

Setzt man nun weiter $\sin x = z$, so ist $dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$ und man erhält

$$\int \varphi(\sin x) dx = \int \varphi(z) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Unter Umständen ist es zweckmässiger, den Cosinus auszudrücken; man kommt damit auf

$$\int \psi(\cos x) dx;$$

durch die Substitution $\cos x = z$ erhält man dann

$$\int \psi(\cos x) dx = - \int \psi(z) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Auf diesem Wege ergibt sich

$$\int \sin^n x dx = \int \frac{z^n}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so folgt nach

$$\int \frac{z^n}{\sqrt{1 - z^2}} dz = -\frac{1}{n} \left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3) \dots 5 \cdot 3}{(n-2)(n-4) \dots 4 \cdot 2} z \right]$$

daher hat man in diesem Falle

ascender Functionen.

$$-3x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \sin^3 x + \dots + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \cdot x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n} \left[x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} x^{n-3} + \dots + \frac{(n-1)(n-3) \dots 4}{(n-2)(n-4) \dots 3} x \right]$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \left[\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \sin^{n-3} x + \dots + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \sin x \right]$$

7. In manchen Fällen empfiehlt es sich, in dem Integrale

$$\int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$$

sinus und cosinus durch die tangente auszudrücken; man erhält

$$\int \varphi(\tan x) dx;$$

setzt man nun $\tan x = z$, so erhält man

$$\int \varphi(z) \frac{dz}{1+z^2}.$$

Diese Transformation wird insbesondere dann von Nutzen ist.

Hiernach ist

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \int \frac{dz}{az^2 + b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \tan x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{b + \sqrt{-ab} \cdot \tan x}{b - \sqrt{-ab} \cdot \tan x} + C$$

8. Für die Entwicklung des Integrals

$$\int \sin^n x \cos^m x dx,$$

in n und m positive ganze Zahlen sein mögen, kann folgendermaßen vorgegangen werden.

Ist m ungerade, $m = 2r + 1$, so hat man

$$\int \sin^n x \cos^{2r+1} x dx = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^r \cos x dx$$

$$= \int \left[\sin^n x - \binom{r}{1} \sin^{n+2} x + \binom{r}{2} \sin^{n+4} x - \dots \right] \cos x dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x - \frac{1}{n+3} \cdot \binom{r}{1} \sin^{n+3} x + \frac{1}{n+5} \cdot \binom{r}{2} \sin^{n+5} x - \dots$$

Ist n ungerade, so setzt man

$$\int \sin^{2r+1} x \cos^m x dx = \int (1 - \cos^2 x)^r \cos^m x \cdot \sin x dx$$

$$= \int \left[\cos^m x - \binom{r}{1} \cos^{m+2} x + \binom{r}{2} \cos^{m+4} x - \dots \right] \cdot \sin x dx$$

$$= -\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x + \frac{1}{m+3} \cdot \binom{r}{1} \cos^{m+3} x - \frac{1}{m+5} \cdot \binom{r}{2} \cos^{m+5} x + \dots$$

Sind m und n beide gerade, $m = 2q$, $n = 2r$, so hat man

$$\int \sin^{2q} x \cos^{2r} x dx = \int \sin^{2q} x (1 - \sin^2 x)^r dx$$

$$= \int \left[\sin^{2q} x - \binom{r}{1} \sin^{2q+2} x + \binom{r}{2} \sin^{2q+4} x - \dots \right] dx$$

Hier kann jedes Glied nach No. 6 integriert

9. Sind r und n positive ganze Zahlen, so

$$1. \quad \int \frac{\sin^{2r+1} x dx}{\cos^n x} = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^r \sin x dx}{\cos^n x} \\ = \int \left[\frac{1}{\cos^n x} - \binom{r}{1} \frac{1}{\cos^{n-2} x} + \right]$$

Ist $n = 2q$, so erhält man hieraus bei Potenzen von $\cos x$; ist $n = 2q + 1$, und q Potenzen von $\cos x$ noch ein Glied von der Fo

$$A \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -A \log$$

Sind r und q ganz und positiv, so ist

$$2. \quad \int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q-1} x} dx = \int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q} x} \\ = \int \frac{\sin^{2r} x}{(1 - \sin^2 x)^q} dx$$

Dieses Integral ist nach den Regeln für rationalen algebraischen Function (der Variabel

Für die Entwicklung des Integrales

$$\int \frac{\sin^{2r} x}{\cos^{2q} x} dx$$

wird man von der Substitution $\cos x = z$ Gebrauch

Ersetzt man in diesen Integralen x durch $\pi - x$ von der Form

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx.$$

10. Durch theilweise Integration findet man

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \\ \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} -$$

Hieraus ergibt sich

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \\ \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

Ersetzt man x durch $-\pi - x$, so folgt

$$\int e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx + b \cos bx) \\ \int e^{-ax} \cos bx dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx - b \sin bx)$$

11. Durch theilweise Integration ergibt

$$\int f(x) \arcsin x dx = \arcsin x \int f(x) dx \\ \int f(x) \arccos x dx = \arccos x \int f(x) dx \\ \int f(x) \arctan x dx = \arctan x \int f(x) dx$$

schliesslich nur noch eine algebraische

$$10 \quad x = \sin z$$

$$\int f(z) \cos z \, dz.$$

tionen

$$\arctang x = z$$

$$- \int f(z) \sin z \, dz,$$

$$f(z) \frac{dz}{\cos^2 z}.$$

unendliche Reihen.

en Satzes die Entwicklung

$$!_3 x^3 + \dots + A_n x^n + R_n,$$

ewisser Grenzen liegen

$$n = \infty,$$

$$+ A_n x^n + R_n) \, dx$$

$$+ \dots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1} + \int R_n \, dx.$$

isch den Inhalt einer Fläche, welche

ve $y = R_n$ begrenzt wird, und zwar

zu den Abscissen a und x gehörigen

willkürlich, sie soll nur kleiner als x

iss für alle Werthe der Variablen von

ien endlichen Werth von x ist $\int_a^x R_n \, dx$

en Ordinaten sämmtlich verschwinden;

ian hat

$$\int R_n \, dx = \text{Const.}$$

e die Reihe convergirt

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots,$$

ist daher

$$\int f(x) \, dx = A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \frac{1}{4} A_3 x^4 + \dots + C.$$

2. Wir benutzen diesen Satz zunächst, um einige in der Differentialrechnung gegebene Reihenentwicklungen auf einem neuen Wege abzuleiten.

A. Für jedes echt gebrochene x ist

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots, \quad x^2 < 1.$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + C.$$

Da nun $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C_1$, so ist, indem man C_1 und C vereint

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + C.$$

Den besonderen Werth, den die Constante zur Erfüllung dieser Gleichung haben muss, bestimmt man, indem man x einen besonderen Werth beilegt, für den die Reihensumme sich leicht angeben lässt. Wir nehmen $x = 0$ und erhalten

$$0 = C, \text{ also}$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

B. Aus der Entwicklung

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots, \quad x^2 \leq 1$$

folgt

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots + C.$$

Daher hat man

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots + C, \quad x^2 \leq 1.$$

Da für $x = 0$ die Reihe sowie $\text{arc tang } x$ verschwinden, so folgt $C = 0$, also

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots, \quad x^2 \leq 1.$$

C. Nach dem binomischen Satze ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots, \quad x^2 \leq 1.$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + C.$$

Mithin ist

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + C.$$

Für $x = 0$ verschwinden die Reihe und $\text{arc sin } x$; also ist $C = 0$ und man hat

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x^2 \leq 1.$$

3. Wenn man $f(x)$ in eine convergente Reihe nach TAYLOR entwickeln und das Integral $\int f(x) dx$ auf bisher bekannte Functionen reduciren kann, so dient der Satz in No. 1 dazu, die Function $f(x)$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln. Aus der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots, \quad x^2 \leq 1$$

folgt durch Integration

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + C.$$

Setzt man $x = 0$, so findet man $C = 0$. Also hat man die neue Reihe

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x^2 \leq 1$$

4. Die wichtigste Anwendung der Integration durch unendliche Reihen be

$$\int \frac{lx}{x} dx = \int lx \cdot dlx =$$

$$\int \frac{l(1+x)}{x} dx = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{x}$$

§ 7. Einfache be

1. Unter dem bestimmten Integral

$$\int_a^x f(x)$$

verstehen wir nach § 1, No. 5 die Fläche zwischen der Abscissenachse und der Kurve $y = f(x)$, wenn die Kurve zwischen $x = a$ und $x = x$ geschlossen wird, unter der Voraussetzung, dass die Grenzen a und x nicht unendlich bestimmt sind. Ein solches Integral ist ein particularer Werth

$$\int_a^x f(x)$$

ist; ist daher

$$\int_a^x f(x) dx =$$

so geht das bestimmte Integral

$$\int_a^x f(x)$$

aus $\varphi(x) + C$ hervor, indem man der C den Werth C_1 ertheilt, so dass man hat

$$1. \quad \int_a^x f(x) dx =$$

Nun folgt unmittelbar aus der Definition, dass wenn man x den besonderen Werth a ertheilt,

$$2. \quad 0 = \varphi(a) - \varphi(a)$$

Durch Subtraction folgt nun aus 1.

$$3. \quad \int_a^x f(x) dx =$$

In dieser Gleichung erscheint nun $\varphi(x)$ in $f(x) dx$ auftritt, soll man sich unter $\varphi(x)$ von einem gegebenen Anfangswerthe $\varphi(a)$ an den Endwerthe $\varphi(x)$ wächst, und dann bedeutet

dieser Bedeutung als obere Grenze an $x = x$ die Seite in $\varphi(x)$ auf.

Will man die Unbestimmtheit des Integrals vermeiden, so wird man zweckmässig ein anderes Zeichen für das bestimmte Integral wählen.

$$4. \quad \int_a^b f(x) dx =$$

Um die Beschränkung $b > a$ aufzuheben, wird man das bestimmte Integral die

Integrale.

$$a + k\delta)$$

e Abscis

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$-k) \frac{a-b}{n}$$

Setzt man $n-k=k'$, so geht k' von n bis 0, und n durchläuft. Daher hat man

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum_n^0 f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right)$$

Kehrt man hier die Ordnung der Summanden um,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \\ &= - \lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \end{aligned}$$

Vergleicht man die rechte Seite mit 5., so sieht man, dass die Definition

$$\lim \sum_0^n f\left(b + k' \cdot \frac{a-b}{n}\right) \cdot \frac{a-b}{n} =$$

Daher hat man schliesslich die Gleichung

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Dieselbe lehrt den Satz: Vertauscht man die Grenzen des Integrals, so wechselt das Integral das Vorzeichen. Aus der für $b > a$ gültigen Gleichung 4.

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

folgt nun mit Hülfe der Gleichung 6.

$$\int_b^a f(x) dx = - [\varphi(b) - \varphi(a)] = \varphi(a) - \varphi(b)$$

Mithin gilt die Gleichung 4. unabhängig davon, ob

2. Ist $a < b < c$, so folgt aus der geometrischen Bedeutung des Integrals die Gleichung

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Benutzt man nach No. 1

$$-\int_b^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

so erhält man

$$2. \quad \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Der Satz 1. gilt also auch, wenn man c vertauscht.

Ferner folgt aus 1.

$$-\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$$

$$3. \quad \int_b^a f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$$

Der Satz 1. gilt daher auch, wenn man

Aus der Anordnung acb (2) erhält man zweiten Grenze (nach 3) die Reihenfolge c zweiten und dritten cba , und daraus endlich zweiten bca . Hieraus ergibt sich, dass der

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

unabhängig davon gilt, wie die drei Zahlen .

3. Nicht selten hat man es mit Functionen zu thun, die die Eigenschaft haben, dass

$$f(a) = 0, \text{ und } f(a + z)$$

Hierher gehören z. B. alle ungeraden Potenzen

$$(a - a)^{2n+1} = 0, \quad [a - (a + z)]^{2n}$$

ferner alle goniometrischen Functionen von

$$\tan 0 = 0, \quad \tan z = -$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + z \right)$$

Für derartige Functionen ist

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx$$

Ersetzt man nämlich x durch $a + z$, also die Werthe $a - b$ und $a + b$ von x die Werthe $-b$ und b von z ; daher hat man

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = \int_{-b}^b f(a + z) dz$$

Nun ist weiter

$$1. \quad \int_{-b}^b f(a + z) dz = \int_{-b}^0 f(a + z) dz + \int_0^b f(a + z) dz$$

Ferner ist

$$\int_{-b}^0 f(a + z) dz = - \int_0^b f(a + z) dz$$

Ersetzt man rechts z durch $-z$, also a

$$\int_{-b}^0 f(a + z) dz = \int_0^b f(a - z) dz$$

imnte Integrale.

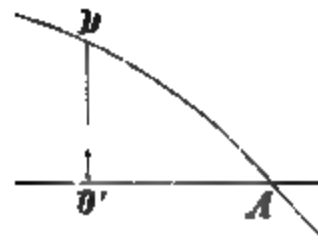
$$- f(a + z);$$

$$- \int_0^b f(a + z) dz.$$

st sich: Ist $f(a)$

$$z = 0.$$

leicht erläutern.



(M. 502.)

Da nun aber zu negativen Ordinaten negative so folgt, dass die Flächen $BB'A$ und $AC'C$ entgegengesetzt verschwindet ihre Summe, es ist also

$$\int_{a-b}^{a+b} f(z) dz = 0.$$

Diele hierzu haben wir:

$$\int_{-b}^b (Ax^3 + Bx^3 + Cx) dx = 0,$$

$$\int_{-b}^b \sin x dx = 0,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} \cos x dx = 0,$$

$$\int_{-b}^b \arcsin x dx = 0.$$

die Curve $y = f(x)$ eine zur Y-Achse im se, ist also

$$f(a + z) = f(a - z),$$

und nimmt man an dem Integrale

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx$$

dieselbe Substitution und Zerlegung vor, wie in No. 3, so

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = \int_{-b}^0 f(a+z) dz + \int_0^b f(a+z) dz = \int_0^b f(a-z) dz + \int_0^b f(a+z) dz.$$

Daher ist jetzt

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = 2 \int_a^{a+b} f(x) dx.$$

Die Eigenschaft $f(a+z) = f(a-z)$ besitzen alle geraden Potenzen von $(a-x)$; ferner die goniometrischen Functionen Sinus und Cosinus, denn es ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\cos x = \cos(-x).$$

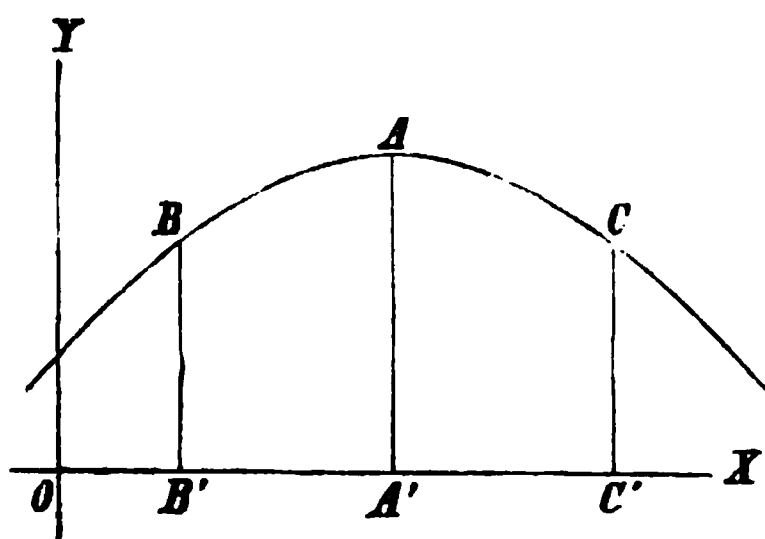
Man hat daher z. B. die Reductionen:

$$\int_{a-b}^{a+b} (a-x)^2 dx = 2 \int_a^{a+b} (a-x)^2 dx,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-b}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x dx = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+b} \sin x dx,$$

$$\int_{-b}^b \cos x dx = 2 \int_0^b \cos x dx.$$

Um auch diesen Satz geometrisch anschaulich zu machen, sei $OA' = a$,



(M. 503.)

$B'A' = A'C' = b$; dann sind die Flächen $BB'A'A$ und $AA'C'C$ gleich und es ist daher $BB'C'C = 2AA'C'C$, also

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = 2 \int_a^{a+b} f(x) dx.$$

5. Enthält $f(x)$ eine von den Grenzen a und b unabhängige Grösse γ , so ist

$$\int_a^b f(x, \gamma) dx$$

eine Function von γ . Setzen wir daher

$$\int_a^b f(x, \gamma) dx = F(\gamma),$$

so ist

$$\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} = \lim \left[\int_a^b f(x, \gamma + \Delta\gamma) dx - \int_a^b f(x, \gamma) dx \right] : \Delta\gamma.$$

Nun ist

$$\int_a^b f(x, \gamma + \Delta\gamma) dx - \int_a^b f(x, \gamma) dx = \int_a^b [f(x, \gamma + \Delta\gamma) - f(x, \gamma)] dx.$$

Folglich hat man

$$\begin{aligned} \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} &= \lim \int_a^b \frac{f(x, \gamma + \Delta\gamma) - f(x, \gamma)}{\Delta\gamma} dx \\ &= \int_a^b \lim \frac{f(x, \gamma + \Delta\gamma) - f(x, \gamma)}{\Delta\gamma} dx = \int_a^b \frac{df(x, \gamma)}{d\gamma} dx. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma}$$

ach r

einig
o ist

$$-a^{\pi+1}$$

Ist $\pi > 0$, so bleibt x^π für alle endlichen Werthe
1. gilt daher für alle endlichen a und b .
ich gross, wenn $x = 0$ ist; in diesem Falle ist

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

unbeschränkt anwendbar.

Wird $f(x)$ für die untere Grenze $a (< b)$, oder
nen zwischen den Grenzen liegenden Werthen
r stehen wir unter

$$\int_a^b f(x) dx$$

Grenzwert, gegen welchen das Integral

$$\int_{a+\delta}^b f(x) dx, \quad \text{bez.} \quad \int_a^{b-\delta} f(x) dx$$

die Summe

$$\int_{a+\delta}^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$

verschwindende Werthe der positiven Grössen

Demnach ist, wenn a eine negative, b eine positive

$$\int_a^b x^\pi dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^b x^\pi dx = \frac{1}{\pi+1} (b^{\pi+1} - \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\pi+1}),$$

$$\int_a^b x^\pi dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\delta} x^\pi dx + \int_{\delta}^b x^\pi dx \right) = \frac{1}{\pi+1} [b^{\pi+1} - a^{\pi+1}]$$

Ist nun $\pi > -1$, so ist $\pi+1 > 0$, und daher

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (-\delta)^{\pi+1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\pi+1} = 0$$

also ist

$$\int_0^b x^\pi dx = \frac{1}{\pi+1} b^{\pi+1}, \quad \int_a^b x^\pi dx = \frac{1}{\pi+1} (b^{\pi+1} - a^{\pi+1})$$

die Formel 1. gilt also für alle Werthe von a

Ist hingegen $\pi < -1$, so ist $\pi+1 < 0$ und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (-\delta)^{\pi+1} = \infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\pi+1} = 0$$

Daher ist in diesem Falle

$$\int_0^b x^m dx = -\infty,$$

Das von der negativen Grenze a bis zu die Differenz zweier unendlich grossen Werten, so ist die Grenze Null sich nähern, so ist

Für $n = 1$ und positive Werthe von a

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a}$$

Geht man zur Grenze $a = 0$ über, so

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \infty$$

7. Aus dem unbestimmten Integrale

$$\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$$

ergibt sich das bestimmte

$$\int_a^b e^{mx} dx = \frac{1}{m} (e^{mb} - e^{ma})$$

Insbesondere ist

$$\int_0^1 e^{mx} dx = \frac{1}{m} (e^m - 1)$$

$$\int_0^a e^{-x} dx = 1 - e^{-a}$$

Geht man zur Grenze $a = \infty$ über, so

$$1. \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Aus der Reduction

$$\int x^m e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} x^m e^{-ax} + \frac{m}{a} \int x^{m-1} e^{-ax} dx$$

folgt, wenn m und a positiv sind,

$$2. \quad \int_0^{\infty} x^m e^{-ax} dx = \frac{m!}{a^{m+1}}$$

Denn $x^m e^{-ax}$ verschwindet, wenn $x = \infty$ verschwindet, erkennt man an der Reihenentwicklung

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

die auch für $x = \infty$ gilt; man erhält hierna

$$x^m e^{-ax} = 1 : \left(\frac{1}{x^m} + \frac{a}{x^{m-1}} + \frac{a^2}{2! x^{m-2}} + \dots \right)$$

Die ersten m Glieder des Divisors verschwinden und alle folgenden werden unendlich gross;

Ist nun m eine positive ganze Zahl, so wendung von 2.

nmte Integr

$$\frac{-2) \dots 3}{a^m}$$

hält man

$$\frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-z} dz.$$

$$\frac{-2) \dots 3}{a^{m+1}}$$

die aus d
n durch

$$\frac{\dots (m -}{2^p + 1}$$

$$r \operatorname{lang} \frac{x}{a}.$$

$$= \frac{\pi}{4a},$$

$$= \frac{\pi}{2a}.$$

arch b , so

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{b}}.$$

h b und n

Gebrauch

$$\frac{d^{n-1}(b+x^2)^{-1}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots ($$

$$\frac{d^{n-1}b^{-\frac{1}{2}}}{db^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n-1}}$$

so erhält man, wenn man schliesslich wieder b durc

$$3. \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (}$$

9. Durch theilweise Integration findet man

$$\int \sin^m x dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x dx$$

Ersetzt man im letzten Integrale $\cos^2 x$ durch 1

$$\int \sin^m x dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x dx$$

daher ist



$$\int \sin^m x dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx.$$

Führt man hier die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ein, so erhält man, sobald $m > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x dx.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Reduction gelangt man, je nachdem m gerade oder ungerade ist, schliesslich zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

Daher erhält man für ein gerades m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{(m-1)(m-3)(m-5) \dots 3 \cdot 1}{m(m-2)(m-4) \dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

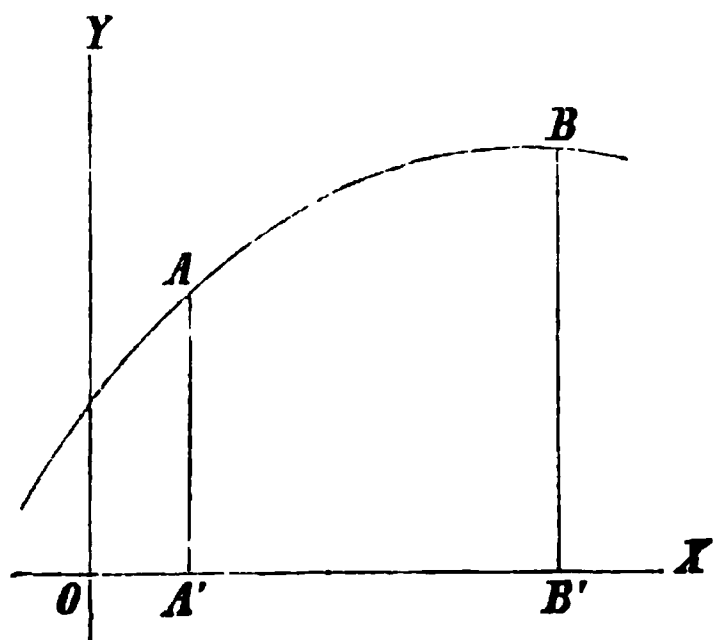
für ein ungerades m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{(m-1)(m-3) \dots 4 \cdot 2}{m(m-2) \dots 5 \cdot 3}.$$

Ersetzt man $\sin x$ durch z , so ist $\cos x dx = dz$, also $dx = dz : \sqrt{1-z^2}$, und den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x entsprechen für z die Grenzen 0 und 1. Vertauscht man nach der Substitution wieder die Buchstaben z und x , da, wie man sieht, die Bezeichnung der Integrationsvariablen bei einem bestimmten Integral zwischen constanten Grenzen ganz willkürlich ist, so erhält man anstatt 1. und 3. die Integralformeln

$$3. \quad \int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{(m-1)(m-3) \dots 3 \cdot 1}{m(m-2) \dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ gerade} \\ \frac{(m-1)(m-3) \dots 4 \cdot 2}{m(m-2) \dots 3 \cdot 1}, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

§ 8. Berechnung von ebenen Flächen, Curvenbogen, Raumtheilen und unebenen Flächen durch einfache bestimmte Integrale.



(M. 504.)

1. Wenn der Curvenzug (Fig. 504) $y = f(x)$ zwischen Punkten A und B , deren Abscissen a und b sind, stetig verläuft, und so beschaffen ist, dass, während ein Punkt P auf der Curve sich von A und B so bewegt, dass jeder Curvenpunkt nur einmal durchlaufen wird, die Horizontalprojection P' von P immer in derselben Richtung von A' nach B' gelangt, so ist die Fläche $A'ABB'$ (§ 1, No. 5)

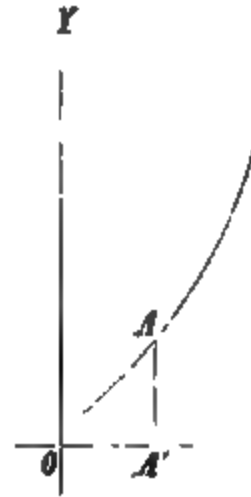
$$1. \quad F = \int_a^b f(x) dx.$$

bogen, Raumtheilen und unebe

en α und
h gross,

Δx .

1 schief-
mit dem
gehörige,
nstreifen



zwischen den Grenzen enthalten

$$y \sin \alpha \Delta x < \Delta F < (y + \Delta y) \sin \alpha \cdot \Delta x.$$

Also ist

$$y \sin \alpha < \frac{\Delta F}{\Delta x} < (y + \Delta y) \sin \alpha.$$

Geht man zur Grenze $\Delta x = 0$ über,
so erhält man

$$\frac{dF}{dx} = y \sin \alpha,$$

mithin für die Fläche $AA'B'B$ (unter
übrigens gleichen Voraussetzungen, wie
oben)

$$3. \quad F = \sin \alpha \int_a^b y dx.$$

Ist in rechtwinkligen Coordinaten $y = f(x)$
die Gleichung einer geschlossenen Curve, die von
den Normalen zur Abscissenachse in zwei Punkten
getroffen wird, so bestimme man zunächst auf
analytisch-geometrischem Wege die Abscissen a
und b der beiden die Curve tangirenden Ordinaten,
zwischen denen die Curve liegt. Bezeichnet nun y_1
die zu einer Abscisse x gehörige grössere, y_2 die
zugehörige kleinere Ordinate, so ist die gesuchte
Fläche (Fig 507)

$$F = \int_a^b y_1 dx - \int_a^b y_2 dx,$$

mithin

$$4. \quad F = \int_a^b (y_1 - y_2) dx.$$

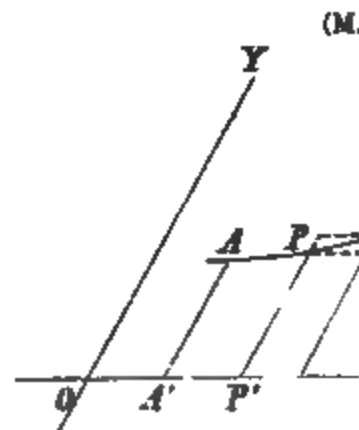
Für schiefwinklige Coordinaten erhält man
(Fig. 508)

$$5. \quad F = \sin \alpha \cdot \int_a^b (y_1 - y_2) dx.$$

2. Eine Parabel, deren Achse in die Y-Achse
und deren Scheitel in den Nullpunkt fällt, hat die
Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

Daher ist die Fläche $P_1'P_1P_2P_2'$



malrechn

$$x = \frac{1}{6}$$

gerech

$$\frac{r^3}{3\rho} = \frac{1}{3}$$

Theil c

enswert

$$(x_1^2 +$$

$2d$ bez

$$x_1 + 2$$

$$dx_1 +$$

$$_1 + d)^4$$

wissen

$$\eta_2, \eta_3,$$

$$_1 + 4\eta$$

ystem, u

$$= \frac{d}{3} [(\eta_1$$

Systeme

$$' + 4\eta$$

igung, u

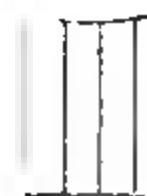
eindeu

dinate v

η_3 der

nd der

chse pa



u erhal

Die ganze Ellipsenfläche F folgt hieraus, wenn man $\beta = 0$, $\alpha = 2\pi$ setzt, zu

$$F = \pi \cdot ab.$$

5. Die Hyperbelfläche, die von der Hyperbel und einer zur Hauptachse normalen Sehne begrenzt wird, beträgt, wenn x die Abscisse der begrenzenden Sehne ist, und a und b die Halbachsen der Hyperbel sind,

$$f = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

Nun ist, wie sich nach § 4, No. 4 leicht ergibt,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l(x + \sqrt{x^2 - a^2})] + C.$$

Daher hat man

$$f = \frac{b}{2a} \left(x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right).$$

Hierfür kann man setzen

$$f = \frac{1}{2} \left[xy - \frac{b}{a} l \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \right].$$

Wählt man die Asymptoten zu Coordinatenachsen, so ist die Hyperbelgleichung

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Ist α der halbe Winkel der Asymptoten, so ist

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Daher liegt zwischen zwei Ordinaten η_1 und η_2 , die dasselbe Vorzeichen haben, die Fläche

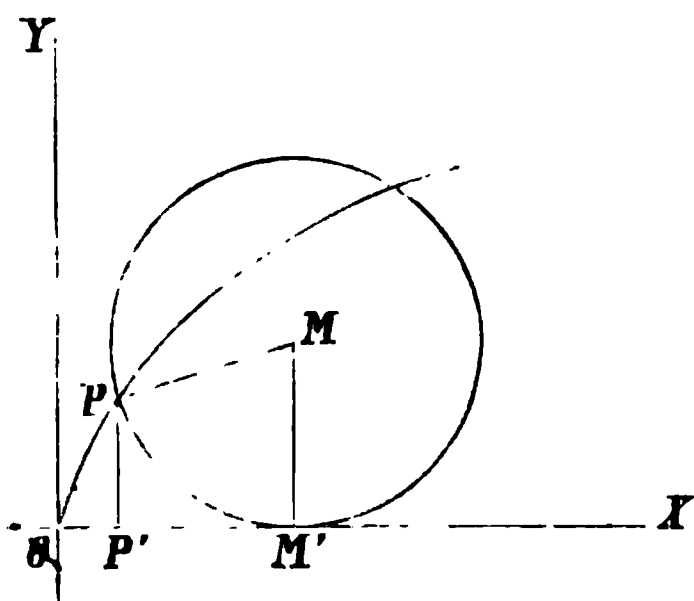
$$f = \sin 2\alpha \cdot \frac{a^2 + b^2}{4} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{x} = \frac{ab}{2} l \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

6. Die Gleichungen einer Cycloide seien

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi).$$

Alsdann ist $dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi$,

und für die Fläche, die von dem im Nullpunkte beginnenden Cycloidbogen und den Coordinaten des Cycloidpunktes P eingeschlossen wird, ergibt sich



(M. 513.)

$$f = \int_0^x y dx = a^2 \int_0^\varphi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi.$$

Da nun

$$\begin{aligned} (1 - \cos \varphi)^2 &= 1 - 2 \cos \varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \\ &= \frac{3}{2} - 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

so ist

$$\int_0^\varphi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\varphi}{2} - 2 \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

Folglich hat man

$$1. \quad f = \frac{a^2}{4} (6\varphi - 8 \sin \varphi + \sin 2\varphi).$$

Die von PP' , $P'M'$ und dem Bogen PM' des erzeugenden Kreises eingeschlossene Fläche ist

$$f_1 = \frac{PP' + MM'}{2} \cdot P'M' - \frac{a^2 \varphi}{2} = \frac{a^2}{2} (2 \sin \varphi - \cos \varphi \sin \varphi - \varphi).$$

Daher hat man für die von der Abscissenachse, dem Cycloidenbogen OP und dem Kreisbogen PM' eingeschlossene Fläche

$$2. \quad OPM' = f + f_1 = a^2(\varphi - \sin \varphi) = a \cdot OP'.$$

Also ist diese Fläche gleich dem Rechtecke aus dem Halbmesser des erzeugenden Kreises und der Abscisse des Punktes P .

Aus 1. erhält man für $\varphi = 2\pi$ die Fläche, die von dem zu einer vollen Umdrehung gehörigen Cycloidenbogen und der Abscissenachse eingeschlossen wird

$$3. \quad f = 3\pi a^2.$$

7. Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten

$$r = f(\varphi),$$

so lässt sich leicht der Sector angeben, der von den Radien zweier zu den Polarwinkeln α und β gehöriger Curvenpunkte A und B und dem Curvenbogen AB begrenzt wird.

Haben P und P_1 die Coordinaten φ, r und $\varphi + \Delta\varphi, r + \Delta r$, so kann $\Delta\varphi$ immer so klein genommen werden, dass der Curvesector $OP P_1 = \Delta\varphi$ zwischen den Kreissectoren enthalten ist, die den Centriwinkel $\Delta\varphi$ und die Radien r und $r + \Delta r$ haben; alsdann ist

$$\text{wenn } \Delta r > 0: \quad \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi < \Delta S < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta\varphi,$$

$$\text{,, } \Delta r < 0: \quad \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi > \Delta S > \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta\varphi.$$

Dividirt man Glied für Glied durch $\Delta\varphi$ und geht zur Grenze $\Delta\varphi = 0$ über, so convergiren beide Begrenzungen des Quotienten $\Delta S : \Delta\varphi$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{2} r^2$; daher hat man

$$\frac{dS}{d\varphi} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2} r^2.$$

Hieraus folgt unter der Voraussetzung, dass der Curvenbogen AB continuirlich ist und ganz im Endlichen liegt, und dass φ nur wächst, wenn ein Punkt ohne umzukehren den Bogen von A bis B durchläuft

$$S = \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\alpha} r^2 d\varphi.$$

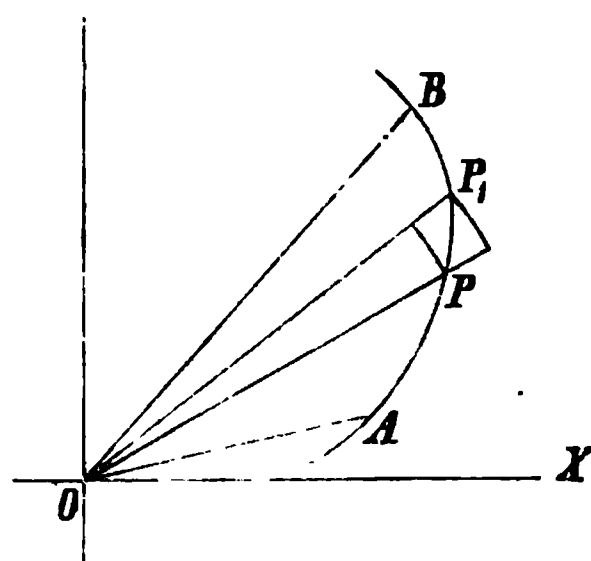
Für den Inhalt einer geschlossenen Curve, welche von den Radien in zwei realen Punkten geschnitten wird, hat man, wenn der Nullpunkt im Innern der Fläche liegt,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi.$$

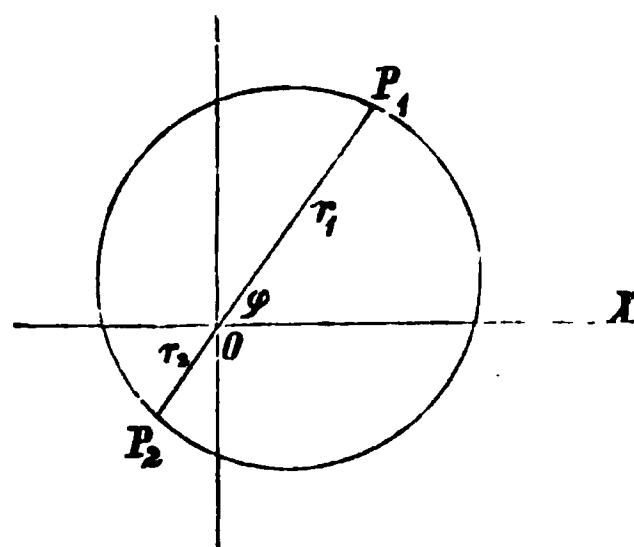
Sind r_1 und r_2 die beiden Radien, welche zum Polarwinkel φ gehören, und ist r_1 positiv, so ist r_2 negativ; für die Fläche F hat man alsdann auch

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r_1^2 d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r_2^2 d\varphi, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (r_1^2 + r_2^2) d\varphi. \end{aligned}$$

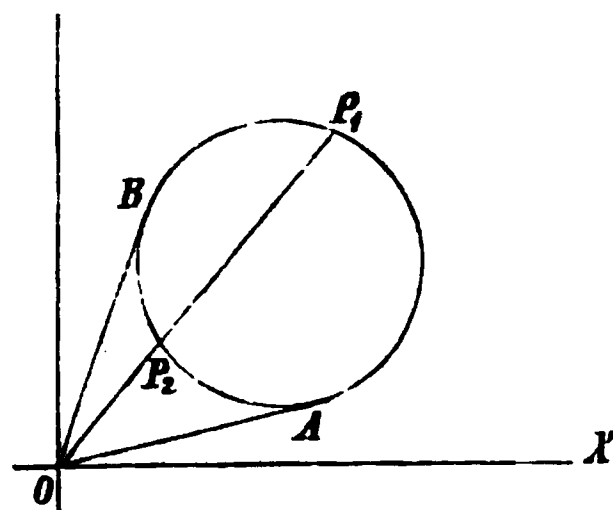
Liegt der Nullpunkt ausserhalb der gesuchten Fläche, so bestimme man die Winkel α und β , deren Radien die Curve berühren, zwischen denen also die Fläche gelegen ist; gehören nun zu φ die Radien r_1 und r_2 , und ist $r_1 > r_2$, so ist die gesuchte Fläche



(M. 514)



(M. 515.)



(M. 516.)

$$S = \frac{1}{2} \int_a^{\beta} r_1^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_a^{\beta} r_2^2 d\varphi,$$

also

$$S = \frac{1}{2} \int_a^{\beta} (r_1^2 - r_2^2) d\varphi.$$

8. Die Gleichung der Fusspunktcurve der Ellipse ist

$$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

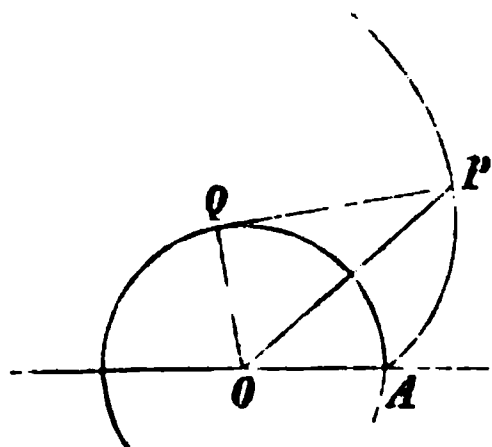
Daher hat man für einen an der X-Achse beginnenden Sector dieser Curve

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} [a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi] d\varphi \\ &= \frac{a^2 + b^2}{4} \varphi + \frac{c^2}{8} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Einen Quadranten erhält man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$S = \frac{a^2 + b^2}{8} \pi,$$

die ganze Fläche ist daher das arithmetische Mittel der beiden über den Hauptachsen construirten Kreise.



(M. 517.)

9. Für die Kreisevolvente hat man, wenn AQ mit ω und der Halbmesser des Kreises mit a bezeichnet werden

$$r^2 = a^2 (1 + \omega^2), \quad \text{tang}(\omega - \varphi) = \omega.$$

Aus der letzteren Gleichung folgt

$$d\omega - d\varphi = \cos^2(\omega - \varphi) d\omega,$$

mithin

$$d\varphi = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega.$$

Daher ist der Sector AOP

$$S = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\omega} \omega^2 d\omega = \frac{1}{6} a^2 \omega^3.$$

10. Legt man bei einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt den Nullpunkt in den Doppelpunkt, so ist die Gleichung der Curve von der Form 1.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3,$$

die Glieder ersten und nullten Grades fehlen.

Setzt man $\text{tang} \varphi = t$, so ist $y = xt$, $r^2 = x^2(1 + t^2)$,

$$d\varphi = \frac{dt}{1 + t^2},$$

und daher die Fläche des Sectors, für dessen Endpunkte t die Werthe a und b hat

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b x^2 dt.$$

Führt man $y = tx$ in 1. ein, so entsteht für x die lineare Gleichung

$$A + Bt + Ct^2 = (D + Et + Ft^2 + Gt^3) \cdot x.$$

Hier setzen wir zur Abkürzung

$$A + Bt + Ct^2 = T, \quad D + Et + Ft^2 + Gt^3 = T,$$

und erhalten somit

$$x = \frac{T}{T};$$

daher ergibt sich für den Curvensector

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{T^2}{T^3} dt.$$

jedem Falle nach den Regeln über die Integration echt gebrochener rationaler Functionen ausgeführt werden. Es ist bemerkenswerth, dass diese Sektoren mithin durch algebraische Functionen, Logarithmen und Arcustangens ausgedrückt werden können.

Wählt man bei einer symmetrischen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt die Symmetrieachse zur Y -Achse, so ist die Gleichung für x geraden Grades, mithin

$$B = D = F = 0,$$

und die Gleichung 1. reducirt sich auf

$$2. \quad Ax^2 + Cy^2 = Ex^2y + Gy^3.$$

Die Richtungen der Asymptoten bestimmen sich aus der cubischen Gleichung

$$Et + Gt^3 = 0;$$

diese ergibt eine der X -Achse parallele Asymptote $t = 0$ und die beiden Asymptotenrichtungen

$$t = \sqrt{-E:G}.$$

Setzt man zur Bestimmung der Ordinate k der erstern Asymptote $y = k$ in 2., so folgt

$$(A - Ek)x^2 = Gk^3 - Ck^2.$$

Hieraus folgen für x zwei unendlich grosse Wurzeln, wenn

$$k = A:E.$$

Die in diesem Abstände der X -Achse parallele Gerade hat also mit der Curve drei unendlich ferne Punkte gemein, ist somit Wendetangente mit unendlich fernem Wendepunkte.

Diese Wendetangente wird selbst unendlich fern, und gleichzeitig auch die anderen beiden Asymptoten, wenn $E = 0$.

Da G alsdann von Null verschieden sein muss, sobald es sich um eine eigentliche Curve dritter Ordnung handelt, so kann man die Gleichung durch G dividiren und in der Form angeben

$$Ax^2 + Cy^2 = y^3.$$

Für diese Curve hat man nun

$$T = A + Ct^2, \quad T = t^3,$$

$$S = \frac{1}{2} \int_a^t \frac{(A + Ct^2)^2}{t^6} dt$$

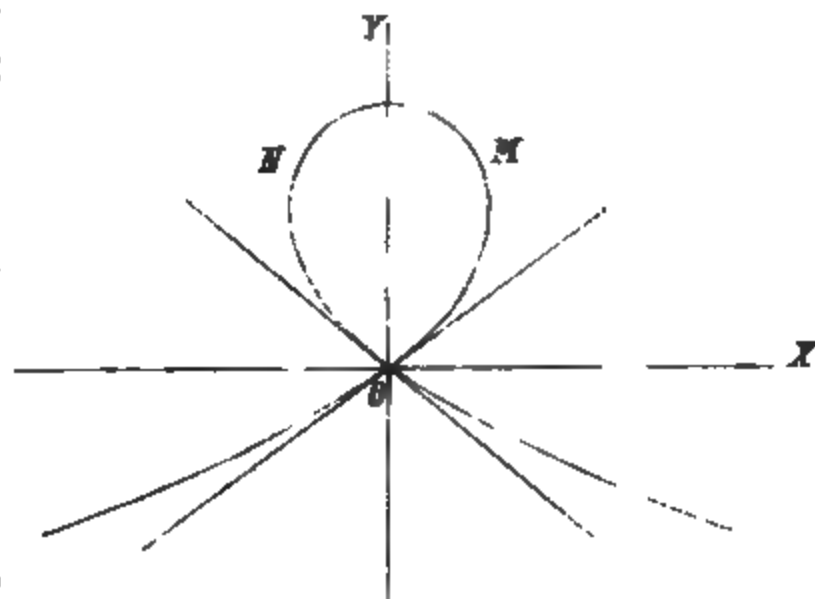
$$= \frac{1}{2} \int_a^t \left(\frac{A^2}{t^6} + \frac{2AC}{t^4} + \frac{C^2}{t^2} \right) dt$$

$$= \frac{A^2}{10} \left(\frac{1}{a^5} - \frac{1}{t^5} \right) + \frac{AC}{3} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{t^3} \right) + \frac{C^2}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t} \right).$$

Für die Doppelpunktstangenten hat man die Gleichung

$$A + Ct^2 = 0.$$

Haben A und C verschiedene Vorzeichen, so sind die Tangenten real und man hat für den zwischen ihnen liegenden Curvensector, für die Schleife OMN ,



(M. 518.)

$$S = 2 \sqrt{-\frac{C}{A}} \left[\frac{A^2}{10} \cdot \left(-\frac{C}{A}\right)^2 + \frac{AC}{3} \cdot \left(-\frac{C}{A}\right) + \frac{C^2}{2} \right],$$

$$= \frac{8}{15} C^2 \sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Es ist hervorzuheben, dass die Sektoren dieser Curven rationale algebraische Functionen des Parameters t sind.

11. Das Differential ds eines Bogens der Curve $y = f(x)$ ist bekanntlich

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Daher ist der Bogen zwischen den Punkten A und B , deren Abscissen a und b sind

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Hierbei wird ein rechtwinkeliges Coordinatensystem vorausgesetzt. In einem schiefwinkligen Parallel-Coordinatensysteme mit dem Achsenwinkel erscheint ds als der Grenzwert der Seite eines Dreiecks, das die Seiten Δx und Δy und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\pi - \alpha$ hat; daher ist

$$\frac{ds}{dx} = \lim \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta x \Delta y \cos \alpha}{\Delta x^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \left(\frac{dy}{dx}\right) \cos \alpha,$$

und man hat somit

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + 2y' \cos \alpha + y'^2} dx.$$

12. Für einen im Scheitel anfangenden Bogen der Parabel

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

ist

$$y' = \frac{x}{p}, \quad \text{und daher}$$

$$1. \quad s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} dx = \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{p^2 + x^2} dx$$

$$= \frac{x}{2p} \sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p}.$$

Für die Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{bx}{a \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Bezeichnet man die numerische Excentricität mit ϵ , so erhält man für einen auf der Y -Achse beginnenden Bogen

$$2. \quad s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - \epsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx.$$

Dieses Integral ist irreductibel.

Für die Hyperbel ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \frac{bx}{a \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Bezeichnet man auch hier die numerische Excentricität durch ϵ , so ergibt sich für einen im Scheitel beginnenden Bogen

ogen, Raumthe

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2} = 1$$

elliptischen Integrale, auf die wir im II. Theile d
werden.

13. Für die Cycloide ist

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

Nimmt man t zur unabhängigen Variablen, so

$$dx = a(1 - \cos t) dt, \quad dy = a \sin t dt$$

und daher ein im Nullpunkte beginnender Bogen

$$s = \int_0^x \sqrt{dx^2 + dy^2} = a \int_0^t \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt =$$

Dies ergibt

$$s = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right).$$

Die Länge der ganzen Cycloide erhält man h
sich zu

$$s = 8a.$$

14. Für die Curve dritter Ordnung

$$Ax^3 + Cy^3 = y^3$$

ist, wenn man wieder $y = tx$ setzt,

$$x = \frac{A + Ct^3}{t^3}, \quad dx = -\frac{3A + Ct^2}{t^4} dt, \quad dy =$$

Folglich ist für einen zwischen den Richtunge
Curvenbogen

$$s = \int_{t^1}^{t^2} \sqrt{(Ct^2 + 3A)^2 + 4A^2} dt$$

Dieses Integral ist im Allgemeinen elliptisch.
n'sche oder semicubische Parabel $Ax^3 = y^3$

$$s = A \int_{t^1}^{t^2} \frac{\sqrt{9 + 4t^2}}{t^4} dt$$

Hierbei ist $y = tx$, mithin

$$x = \frac{A}{t^3}, \quad y = \frac{A}{t^3}.$$

Setzt man in dem Integrale $t = 1 : z$, so erh

$$s = A \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{9z^2 + 4} \cdot z dz$$

Nun ist bekanntlich

$$\int \sqrt{9z^2 + 4} \cdot z dz = \frac{1}{27} (9z^2 +$$

Ersetzt man hier

$$z^2 = \frac{1}{t^2} = \frac{y}{A},$$

und führt die Grenzen 0 und y ein, so erhält man schliesslich

$$s = \frac{1}{27\sqrt{A}} [\sqrt{(9y + 4A)^3} - 8\sqrt{A^3}].$$

15. Will man Polarcoordinaten verwenden, so macht man die Substitutionen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$$

Daher ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad \text{und man hat}$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

16. Die Spirale des Archimedes hat die Gleichung

$$r = a\varphi;$$

hier ist $r' = a$, und man erhält den vom Nullpunkt an gerechneten Bogen

$$\begin{aligned} s &= a \int_0^{\varphi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi \\ &= \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + l(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})]. \end{aligned}$$

Für die hyperbolische Spirale ist

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad r' = -\frac{a}{\varphi^2}, \quad s = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi^2} d\varphi.$$

Daher ist nach § 4, No. 4,

$$s = a \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} l(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) - \frac{1}{\varphi} \sqrt{\varphi^2 + 1} \right],$$

wobei durch das Zeichen

$$\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\varphi) \right]$$

die Differenz $f(\varphi_2) - f(\varphi_1)$ angedeutet werden soll.

17. Aus den Gleichungen der Kreisevolvente (No. 9) ergibt sich

$$r d\varphi = \frac{a^2 \omega^2}{r} d\omega, \quad dr = \frac{a^2 \omega}{r} d\omega, \quad ds = a \omega d\omega$$

und man erhält daher für den Bogen, dessen Endpunkte den Wälzungswinkeln 0 und ω zugehören

$$s = \frac{1}{2} a \omega^2.$$

18. Das Bogendifferential einer Raumcurve ist (Differentialrechn. § 6, No. 8)

$$1. \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Sind die Gleichungen der Horizontal- und der Verticalprojection gegeben

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x),$$

so hat man

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx;$$

daher ist der zwischen den Abscissen x_1 und x_2 enthaltene Bogen

$$2. \quad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

theilen und u

als Function

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

$$2bx,$$

so ist die Curve der Durchschnitt zweier parabolisc
es ergibt sich

$$y' = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad z' = \sqrt{\frac{b}{x}};$$

Rechnet man den Bogen vom gemeinsamen Scheitel
aus, so hat man

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{x+a+b}{x}} dx.$$

Setzt man $x = u^2$, so folgt

$$s = 2 \int_0^u \sqrt{u^2 + a + b} du.$$

Daher erhält man schliesslich

$$s = \sqrt{x(x+a+b)} + \sqrt{a+b} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+a+b}}{\sqrt{a+b}} \right)$$

20. Die Raumcurve dritter Ordnung

$$x = at, \quad y = bt^2, \quad z = ct^3$$

ist der gemeinsame Durchschnitt der Flächen zweiter Ordnur
durch Elimination von t aus den drei Gleichungen erhalten

$$bx^2 - a^2y = 0, \quad b^2xz - acy^2 = 0, \quad cxy -$$

dieselben stellen einen parabolischen Cylinder, einen k
bolisches Paraboloid dar.

Aus den Curvengleichungen erhält man

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = 2bt, \quad \frac{dz}{dt} = 3ct^2$$

daher ist die Länge eines im Nullpunkte beginnenden Bog

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4} dt.$$

Dieses Integral ist im Allgemeinen elliptisch; es w
 $4b^4 - 9a^2c^2 = 0$.

Setzt man $2b^3 = 3ac$ voraus, so nimmt der 1
leichung an

$$3xz - 2y = 0,$$

ährend die beiden anderen Flächen keine Besonderheiten

Das Integral 1. wird jetzt

$$s = \int_0^t (a + 3ct^2) dt = at + ct^3 = x +$$

21. Schneidet man aus einem begrenzten Volumen du
ieraden G normale Ebenen Q und Q_1 eine Schicht ΔV

ebene Q von einem gewissen Nullpunkte um $p + \Delta p$ entfernt, hat ferner die Schn Volumen der Schicht ΔV von dem Cyli je kleiner Δp ist, und stimmt mit dem C überein, wofern nur Δp hinlänglich klein

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta p} =$$

Hieraus folgt durch Integration für schnitten liegt, die die Abstände $p = a$ u

$$V = \int_a^b$$

Sind insbesondere die Querschnitte n den Querschnitt in diesem Falle mit q_x ,

$$V = \int_{x_1}^x$$

Um die zwischen zwei Parallel Rotationskörpers zu erhalten, lässt ma fallen; ist nun die Gleichung eines Meri dessen Achsen G und normal zu G sin Coordinate mit r bezeichnet wird,

$$r = f$$

so ist das Volumen der Schicht

$$V = \pi \int_a^b$$

22. Ein zur X -Achse normaler Quersc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

Daher ist die Fläche desselben

$$q_x = \pi \frac{bc}{a^2} (a$$

mithin hat man für das Volumen einer Sc dazu parallelen begrenzt wird

$$\begin{aligned} V &= \pi \frac{bc}{a^2} \int_0^x (a \\ &= \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 x \end{aligned}$$

Das Volumen des ganzen Ellipsoids

$$\begin{aligned} V &= \pi \frac{bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot abc. \end{aligned}$$

Schneidet man das einschalige Hy

$$\frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

schnitt eine Ellipse mit den Halbachsen $a\sqrt{z^2 + c^2} : c$ und $b\sqrt{z^2 + c^2} : c$. Das Volumen einer Schicht zwischen XY -Ebene und einer parallelen Ebene ist daher

$$\begin{aligned} V &= \pi \frac{ab}{c^2} \int_0^z (z^2 + c^2) dz, \\ &= \pi \frac{ab}{c^2} \left(\frac{1}{3} z^3 + c^2 z \right). \end{aligned}$$

Die Schicht zwischen den Ebenen $z = -c$ und $z = c$ beträgt

$$\frac{8\pi}{3} abc,$$

und ist daher doppelt so gross, wie ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c .
Im zweischaligen Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

nehmen wir einen Querschnitt normal zur X -Achse; derselbe ist eine Ellipse mit den Halbachsen $b\sqrt{x^2 - a^2} : a$ und $c\sqrt{x^2 - a^2} : a$. Das vom Scheitel bis zu einem Querschnitte reichende Volumen ist daher

$$\begin{aligned} V &= \pi \frac{bc}{a^2} \int_a^x (x^2 - a^2) dx, \\ &= \pi \cdot \frac{bc}{a^2} \left(\frac{1}{3} x^3 - a^2 x + \frac{2}{3} a^3 \right). \end{aligned}$$

23. Das elliptische Paraboloid

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

hat normal zur Z -Achse einen elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen $\sqrt{2az}$ und $\sqrt{2bz}$. Daher ist das normal zur Achse abgeschnittene Segment

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \sqrt{ab} \int_0^z z dz, \\ &= \pi \sqrt{ab} \cdot z^2. \end{aligned}$$

Ist F die Fläche der das Segment begrenzenden Ellipse, so ist

$$F = 2\pi \sqrt{ab} \cdot z,$$

und man hat daher

$$V = \frac{1}{2} Fz,$$

also die Hälfte des Cylinders von der Basis F und der Höhe z .

Vom hyperbolischen Paraboloid

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

berechnen wir das oberhalb der XY -Ebene entlang der positiven X -Achse erstreckende und von einem Querschnitte normal zur X -Achse begrenzte Segment.

Eine Normalebene zur X -Achse schneidet die Fläche in einer Parabel mit dem Scheitel in der Höhe $x^2 : 2a$ über der XY -Ebene liegt, und die von der Y -Achse in einer Sehne von der Länge $2\sqrt{b : a} \cdot x$ geschnitten wird. Der Inhalt des parabolischen Querschnitts ist daher

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} x^3;$$

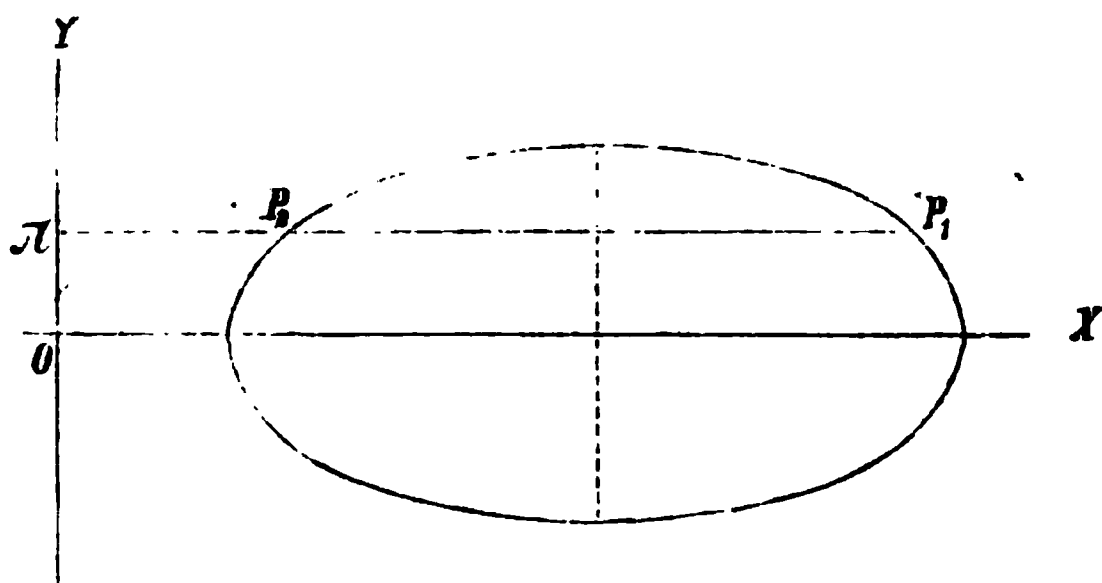
mithin ist die gesuchte Schicht

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \int_0^x x^3 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{x^4}{4},$$

oder, wenn mit F der das Volumen begrenzende Querschnitt bezeichnet wird

$$V = \frac{1}{4} F \cdot x,$$

also ein Viertel des Cylinders von der Basis F und der Höhe x .



(M. 519.)

deren Halbmesser ΠP_1 und ΠP_2 sind; daher ist, wenn e den Abstand des Ellipsenmittelpunktes von der Rotationsachse bezeichnet

$$q = \pi \cdot (\Pi P_1 + \Pi P_2) (\Pi P_1 - \Pi P_2),$$

$$= \frac{4\pi a e}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Folglich ist das Ringvolumen

$$V = \frac{4\pi a e}{b} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - y^2} dy = \frac{8\pi a e}{b} \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} dy.$$

Setzt man $y = b \cos \varphi$, so erhält man

$$\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} dy = b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} b^2 \quad (\S 7, \text{No. 9, 1}).$$

Hieraus folgt

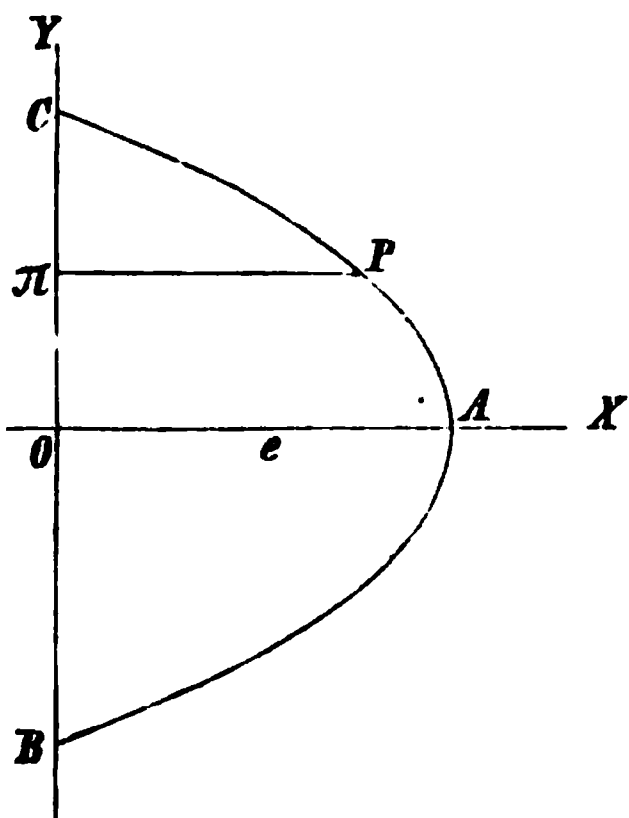
$$V = 2\pi^2 \cdot a b e.$$

Bezeichnet E die Fläche der rotirenden Ellipse und w den Perimeter des von ihrem Mittelpunkte beschriebenen Kreises, so ist

$$V = E \cdot w.$$

Dieselbe Formel gilt auch, wie man sofort sieht, für jeden zwischen zwei Meridianen gelegenen Sector dieses Ringes, sobald w den innerhalb des Sectors gelegenen Theil des vom Mittelpunkte beschriebenen Weges bezeichnet.

Rotirt ein Parabelsegment ABC um die zur Parabelachse normale Ordinate BC , und ist die Parabelgleichung $y^2 = 2a(e - x)$, so ist die Fläche des zur Ordinate $O\Pi = y$ gehörigen Parallelkreises



(M. 520.)

$$q = \pi x^2 = \frac{\pi}{4a^2} (2ae - y^2)^2.$$

Daher ist das Ringvolumen

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4a^2} \int_{-\sqrt{2ae}}^{\sqrt{2ae}} (2ae - y^2)^2 dy = \frac{\pi}{2a^2} \int_0^{\sqrt{2ae}} (2ae - y^2)^2 dy, \\ &= \frac{16\pi}{15} e^2 \sqrt{2ae}. \end{aligned}$$

Bezeichnet F die rotirende Fläche, so ist

$$F = \frac{4}{3} e \sqrt{2ae};$$

daher hat man

$$V = \frac{4\pi}{5} e F.$$

25. Wir beschliessen diesen Abschnitt mit Formeln und Beispielen über den Inhalt von Rotationsflächen.

Um eine zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Zone einer Rotationsfläche zu berechnen, die durch Umdrehung der Curve $y = f(x)$ um die X -Achse entsteht, betrachten wir zwei auf einem Meridiane gelegene Punkte P und P_1 mit den Coordinaten x, y und $x + \Delta x, y + \Delta y$. Die Kegelzone, welche die Sehne PP_1 beschreibt, hat den Inhalt

$$\Delta S = 2\pi \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} (y + \frac{1}{2} \Delta y).$$

Die zwischen denselben Parallelkreisen enthaltene Flächenzone sei ΔF . Nähert sich Δx dem Grenzwerthe Null, so nähert sich der Quotient $\Delta F : \Delta x$ dem Grenzwerthe von $\Delta S : \Delta x$; daher hat man

$$\frac{dF}{dx} = \lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

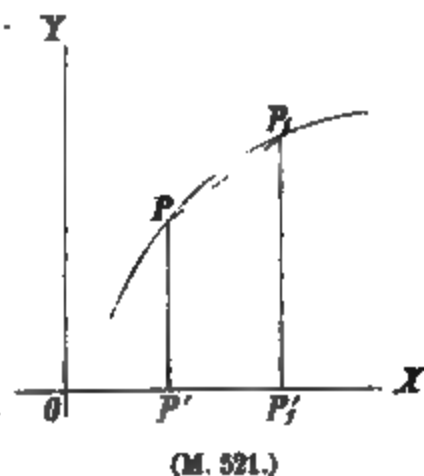
Hiernach ergibt sich für die Zone, deren Parallelkreise die Abscissen a und b haben,

$$F = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

26. Rotirt die Parabel $y^2 = 2px$ um die X -Achse, so ist der vom Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Theil des Rotationsparaboloids

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^x \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx, \\ &= 2\pi \sqrt{p} \int_0^x \sqrt{2x + p} dx, \\ &= \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}]. \end{aligned}$$

Rotirt diese Parabel um die Y -Achse, so entsteht eine Rotationsfläche vierten Grades, die im Nullpunkte eine Spitze hat. Für die von der Spitze bis zu einem Parallelkreise reichende Zone derselben ist



$$F = 2\pi \int_0^y x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \frac{\pi}{p^2} \int_0^y y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy.$$

Nun ist (§ 4, No. 4)

$$\int y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy = \frac{1}{8} (2y^3 + p^2 y) \sqrt{p^2 + y^2} - \frac{p^4}{8} \int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}}.$$

Daher ist

$$F = \frac{\pi}{8p^2} (2y^3 + p^2 y) \sqrt{p^2 + y^2} - \frac{\pi p^2}{8} l \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.$$

27. Für die Oberfläche des Ellipsoids, das durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um die X -Achse entsteht, hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{b}{a^2} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{y}.$$

Daher ist eine in der YZ -Ebene beginnende Zone des Rotationsellipsoids

$$F = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx.$$

Nach § 4, No. 4 ist

$$\int \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} + \frac{a^4}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}.$$

Ist $a > b$, das Ellipsoid also durch Rotation um die grosse Achse entstanden, so ist, wenn c die Excentricität des Meridians bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}} = \frac{1}{c} \arcsin \frac{cx}{a^2} + C;$$

Ist dagegen $a < b$, so hat man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^4 + c^2 x^2}} = \frac{1}{c} l(cx + \sqrt{a^4 + c^2 x^2}) + C.$$

Daher ergibt sich schliesslich,

wenn $a > b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2} x \sqrt{a^4 - c^2 x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c} \arcsin \frac{cx}{a^2};$$

wenn $a < b$,

$$F = \frac{\pi b}{a^2} x \sqrt{a^4 + c^2 x^2} + \frac{\pi a^2 b}{c} l \frac{cx + \sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a^2}.$$

Die ganze Oberfläche erhält man, wenn man x durch a ersetzt und mit 2 multiplicirt

$$F = 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a} \right), \quad a > b;$$

$$F = 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{c} l \frac{b + c}{a} \right), \quad a < b.$$

28. Rotirt die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um die X -Achse, so ist die von einem Scheitel bis zu einem Parallelkreise sich erstreckende Fläche des zweischaligen Rotationshyperboloids, wenn die Excentricität wieder mit c bezeichnet wird

$$1. \quad F = \frac{2\pi b}{a^2} \int_a^x \sqrt{c^2 x^2 - a^4} dx$$

$$= \frac{\pi b}{a^2} \left[x \sqrt{c^2 x^2 - a^4} - a^2 b - \frac{a^4}{c} \log \frac{cx + \sqrt{c^2 x^2 - a^4}}{a(c+b)} \right].$$

Rotirt dieselbe Hyperbel um die X -Achse, so entsteht ein einschaliges Rotationshyperboloid. Für eine von der XY -Ebene bis zu einem Parallelkreise reichende Zone desselben ist

$$F = 2\pi \int_0^y x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Da nun

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{ay}{b \sqrt{b^2 + y^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a \sqrt{b^4 + c^2 y^2}}{b^2 x} c,$$

so hat man

$$2. \quad F = \frac{2\pi a}{b^2} \int_0^y \sqrt{b^4 + b^2 y^2} dy,$$

$$= \frac{\pi a}{b^2} \left(y \sqrt{b^4 + c^2 y^2} + \frac{b^4}{c} \log \frac{cy + \sqrt{b^4 + c^2 y^2}}{b^2} \right).$$

29. Bezeichnet ds das Bogendifferential eines Meridians, so kann man die Zone der Rotationsfläche kürzer in der Form angeben

$$F = 2\pi \int y ds.$$

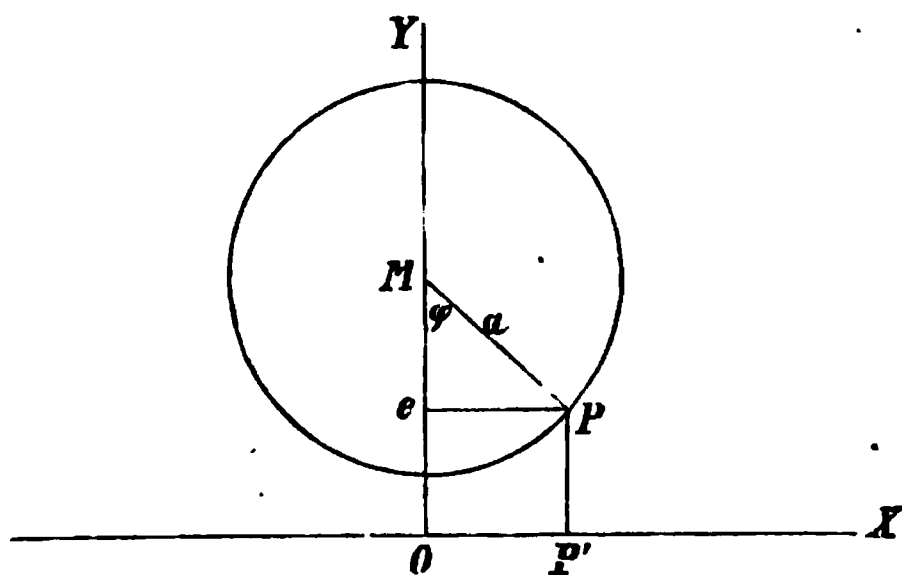
Hier erscheint s als die Integrationsvariable, und y ist durch s auszudrücken. Statt dessen kann man unter Umständen auch y und ds durch eine andere unabhängige Variable t ausdrücken; die Grenzen des Integrals sind dann die Werthe von t , welche für die Endpunkte des Meridians der Zone gelten.

Rotirt ein Kreis mit dem Halbmesser a um eine Gerade OX , die in seiner Ebene um e vom Centrum entfernt liegt, und nimmt man den Winkel φ zur unabhängigen Variablen, so ist

$$y = e - a \cos \varphi, \quad ds = a d\varphi.$$

Will man die ganze Oberfläche des Ringes berechnen, so gelten für φ die Grenzen 0 und 2π ; daher ist

$$F = 2\pi a \int_0^{2\pi} (e - a \cos \varphi) d\varphi = 4\pi^2 a e.$$



(M. 522.)

§ 9. Bestimmte Doppelintegrale.

1. Das einfache bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

haben wir als den Grenzwert definiert, dem sich die Summe

$$\sum_0^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

nähert, wenn n unendlich wächst, und haben, wenn $a < b$, diesen Grenzwert als den Inhalt der Fläche erkannt, die von der Curve $y = f(x)$, der X -Achse und den zu den Abscissen a und b gehörigen Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ eingeschlossen wird. Die Abscissendifferenz $b - a$ erscheint dabei in n gleiche Theile getheilt, ein solcher Theil ist $(b - a) : n$ und der Functionswerth

$$f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

ist die Ordinate, die zum k ten Theilpunkte gehört.

Setzen wir

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x, \quad f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = y,$$

so haben wir einfacher

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum y \Delta x.$$

Die Voraussetzungen, dass alle Δx gleich sind und dass die y die zu den Theilpunkten gehörigen Ordinaten sind, können aufgegeben werden; theilt man die Differenz $b - a$ in n Theile $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_n x$ von beliebigem Verhältniss und ist y_k eine Ordinate der Curve $y = f(x)$, die zu einem innerhalb $\Delta_k x$ gelegenen Punkte der Abscissenachse gehört, so ist

$$\lim \sum y_k \Delta_k x$$

ebenfalls die obige Fläche.

Ist nämlich die Curve $y = f(x)$ zwischen A und B beständig steigend oder beständig fallend, und bezeichnet man mit η_k und Y_k die grösste und kleinste innerhalb $\Delta_k x$ fallende Ordinate, und mit F die Fläche $AA'B'B$, so gelten die Begrenzungen

$$\begin{aligned} \sum \eta_k \Delta_k x &< F < \sum Y_k \Delta_k x, \\ \sum \eta_k \Delta_k x &< \sum y_k \Delta_k x < \sum Y_k \Delta_k x. \end{aligned}$$

Der Unterschied der Grenzen ist

$$\sum Y_k \Delta_k x - \sum \eta_k \Delta_k x = \sum (Y_k - \eta_k) \Delta_k x.$$

Bezeichnet Δ den grössten der Theile

$$\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \dots, \Delta_n x,$$

so ist offenbar

$$\sum (Y_k - \eta_k) \Delta_k x < \Delta \cdot \sum (Y_k - \eta_k).$$

Da die Curve nach der Voraussetzung nur steigt oder fällt, so sind Y_k und η_k die beiden Ordinaten in den Endpunkten von $\Delta_k x$; im ersten Falle ist daher $\eta_k = y_{k-1}$, $Y_k = y_k$; im andern umgekehrt $\eta_k = y_k$, $Y_k = y_{k-1}$.

Folglich ist im ersten Falle

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + y_n - y_{n-1} = y_n - y_0,$$

im letzten

$$\sum_1^n (Y_k - \eta_k) = (y_0 - y_1) + (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + \dots + (y_{n-1} - y_n) = y_0 - y_n.$$

Sind nun die Ordinaten alle endlich, so verschwindet das Produkt

$$\Delta \cdot \sum (Y_k - \eta_k) = \pm \Delta \cdot \sum (y_n - y_0)$$

mit Δ zugleich; daher hat man in der That

$$F = \lim \sum y_k \Delta_k x,$$

oder kürzer mit Hinweglassung des Index k

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum y \Delta x,$$

wobei man zu merken hat, dass die Summe über alle innerhalb der Begrenzung liegenden x zu erstrecken ist,

$$a \leq x \leq b.$$

Wenn die Curve abwechselnd steigt und fällt, so kann man die soeben durchgeführten Betrachtungen mit den für denselben Fall in § 1, No. 5 angestellten combiniren; man kommt dadurch zu der Erkenntniss, dass auch für diesen Fall

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum y \Delta x,$$

wenn nur y_k für alle zwischen den Grenzen a und b enthaltene Werthe von x endlich bleibt.

Anstatt dieses Integral als das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral von $f(x) dx$ zu bezeichnen, kann man es geometrisch anschaulicher das über die Strecke $A'B'$ ausgedehnte Integral von $f(x) dx$ nennen.

2. Ist z eine Function zweier Variabeln, $z = \varphi(x, y)$ und betrachten wir x und y als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes der Ebene, so gehört zu jedem Punkte der Ebene ein bestimmter Werth von z . Ist nun in der Ebene eine begrenzte Fläche f gegeben, und theilen wir dieselbe in beliebig gestaltete kleine Theile Δf , multipliciren jeden Theil $\Delta_k f$ mit einem z_k , welches zu irgend einem innerhalb Δf gelegenen Punkte gehört, so verstehen wir unter dem über die Fläche f ausgedehnten Integrale

$$\int z df$$

den Grenzwert, gegen den die Summe

$$\sum z_k \Delta_k f$$

convergirt, wenn sämmtliche $\Delta_k f$ verschwinden; hierbei ist die Summe über alle im Innern von f liegende Flächentheile Δf zu erstrecken; man hat also

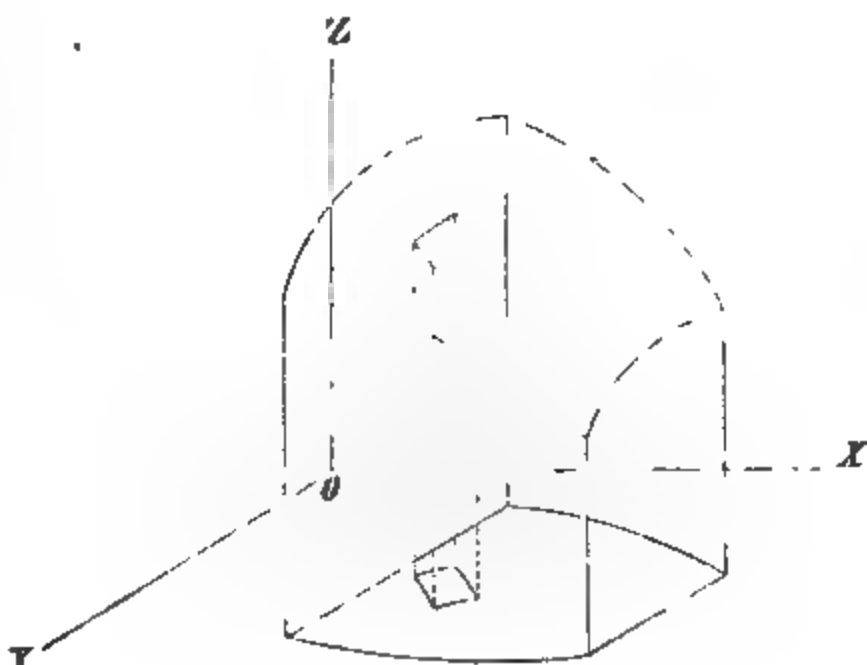
$$\int z df = \lim \sum z_k \Delta_k f.$$

Dieser Begriff eines über eine Fläche erstreckten Integrals wird geometrisch am anschaulichsten, wenn wir die Oberfläche F

$$z = \varphi(x, y)$$

construiren, und diese Fläche mit dem verticalen Cylinder durchschneiden, auf dem die entlang des Perimeters von f errichteten z Ordinaten liegen.

Bezeichnen ζ_k und Z_k die grösste und kleinste Ordinate der Fläche $z = \varphi(x, y)$, deren Fusspunkte innerhalb $\Delta_k f$ liegen und V den Theil des Cylinders zwischen der XY -Ebene und der Fläche F , so ist



(M. 529.)

$$\begin{aligned}\sum \zeta_k \Delta_k f &< V < \sum Z_k \Delta_k f \\ \sum \zeta_k \Delta_k f &\leq \sum s_k \Delta_k f < \sum Z_k \Delta_k f.\end{aligned}$$

Geht man zur Grenze für verschwindend kleine Δf über, so fallen die Begrenzungen

$$\sum \zeta_k \Delta_k f \quad \text{und} \quad \sum Z_k \Delta_k f$$

zusammen; daher ist

$$\int s df = \lim \sum s_k \Delta_k f = V.$$

3. Wenn man die Differenz AB der äussersten Abscissen der Fläche F in kleine Theile $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_n x$ und die Differenz der äussersten Ordinaten CD in kleine Theile $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \Delta_3 y, \dots, \Delta_n y$ theilt, und durch die Theilpunkte Parallelen zu den Achsen zieht, so entstehen mn Rechtecke, von denen ein Theil ganz ins Innere der Fläche f fällt. Die Summe dieser letzteren Rechtecke ist kleiner, als f und convergirt gegen den Grenzwert f , wenn die Δx und Δy verschwindend klein werden; man kann daher in der Gleichung

$$1. \quad \int s df = \lim \sum s_k \Delta_k f$$

diese Rechtecke als die Flächentheile Δf benutzen, also, wenn man den Index weglässt, Δf durch $\Delta x \Delta y$ ersetzt. Um den Uebergang zur Grenze anzudeuten, hat man Δf , Δx und Δy gegen df , dx und dy zu vertauschen und gewinnt so für 1. die besondere Darstellung

$$2.. \quad \int s df = \int s dx dy = \lim \sum s \Delta x \Delta y.$$

Die Berechnung des Grenzwertes kann geordnet in folgender Weise geschehen: Man addire zunächst die Elemente der Summe, die zu demselben $\Delta x = EF$ gehören, also zwischen zwei benachbarten Ordinaten liegen; für diese Summanden ist Δx ein gemeinsamer Faktor, und x kann in Rücksicht auf den vorzunehmenden Grenzübergang in dem Faktor $s = \varphi(x, y)$ constant gleich OE (oder OF) genommen werden. Deutet man diese Summation bei unveränderlichem x durch das Zeichen Σ_1 an, so ist die Summe dieser Elemente

$$\Delta x \cdot \Sigma_1 s \Delta y.$$

Geht man hier zur Grenze für verschwindende Δy über, so entsteht

$$\Delta x \lim \Sigma_1 s \Delta y.$$

Nun ist aber der Grenzwert das bestimmte Integral von $s dy$, ausgedehnt über den im Innern der Fläche f liegenden Theil der in E (oder F) errichteten Ordinate; unter Berücksichtigung dieser Grenzen ist daher

$$\Delta x \lim \Sigma_1 s \Delta y = \Delta x \cdot \int s dy.$$

Setzt man hierin für Δx der Reihe nach alle Theile von AB , addirt die so erhaltenen Produkte, und geht dann zur Grenze für verschwindende Δx über, so erhält man

$$\begin{aligned}\lim \sum s \Delta x \Delta y &= \lim \sum \Delta x \lim \Sigma_1 s \Delta y \\ &= \lim \Delta x \int s dy.\end{aligned}$$

Das innerhalb der angegebenen Grenzen genommene Integral

$$\int s dy$$

ist eine Function von x allein; der Grenzwert rechts ist das von der kleinsten bis zur grössten Abscisse der Fläche f erstreckte Integral

$$\int (\int s dy) dx.$$

Es ist gebräuchlich die Klammern wegzulassen und das Differential der Variablen, nach welcher zuerst integriert wird, an die letzte Stelle zu setzen.

Das über eine begrenzte Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y) df$$

wird daher durch zweimalige Integration gefunden; man denke sich zunächst x constant und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y) dy,$$

erstreckt über den Theil der durch das Ende von x gehenden Normalen zu OX , der innerhalb der Fläche f liegt; dieses Integral ist eine Function von x allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int \left[\int \varphi(x, y) dy \right] dx$$

erstreckt von der kleinsten bis zur grössten Abscisse der Fläche f .

Man kann in dieser Betrachtung die Coordinaten x und y gegen einander vertauschen und gewinnt dann die folgende Regel: Um das über die Fläche f erstreckte Integral

$$\int \varphi(x, y) df$$

zu erhalten, denke man sich zunächst y constant (z. B. gleich OG) und berechne das bestimmte Integral

$$\int \varphi(x, y) dx,$$

erstreckt über den Theil der zu y gehörigen Normalen zu OY , der innerhalb f liegt; dieses Integral ist eine Function von y allein; hierauf berechne man das Integral

$$\int \left[\int \varphi(x, y) dx \right] dy,$$

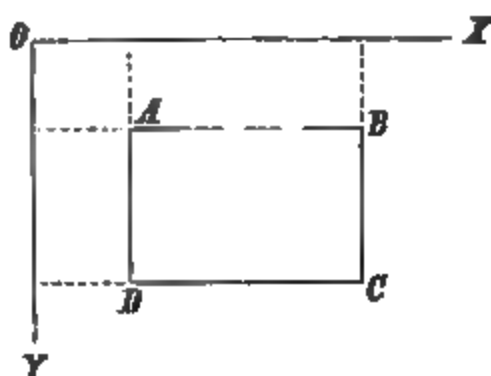
erstreckt von der kleinsten bis zur grössten Ordinate der Fläche f .

Da die über Flächen erstreckten Integrale durch zweimalige bestimmte Integration gefunden werden, so bezeichnet man sie als bestimmte Doppelintegrale.

4. Wir wollen nun an einigen Beispielen die Grenzen der aufeinander folgenden Integrationen bestimmen.

A. Ist die Fläche f ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten den Coordinatenachsen parallel sind, und in welchen AD und BC die Abscissen a und a_1 , AB und DC die Ordinaten b und b_1 haben, so ist

$$\begin{aligned} \int z df &= \int_a^{a_1} \int_b^{b_1} z dx dy, \\ &= \int_b^{b_1} \int_a^{a_1} z dy dx. \end{aligned}$$



(M. 526.)

Wenn beide Integrationen zwischen constanten Grenzen erfolgen, so kann daher die Reihenfolge der Integrationen ohne Aenderung der Grenzen gewechselt werden.

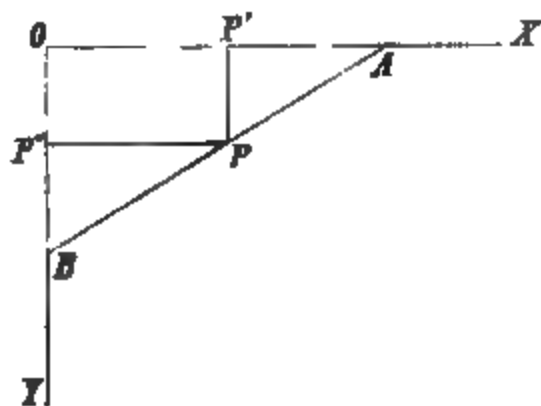
Die Bedingung, dass das Doppelintegral über die Fläche des Rechtecks ausgedehnt werden soll, kann durch die Ungleichungen ersetzt werden

$$a \leq x \leq a_1; \quad b \leq y \leq b_1.$$

B. Ist die Fläche f das Dreieck OAB , dessen Hypotenuse AB die Gleichung hat

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

so gehört zu einer gegebenen Abscisse die Ordinate



(M. 526.)

$$y = \frac{b}{a}(a - x),$$

zu einer gegebenen Ordinate die Abscisse

$$x = \frac{a}{b}(b - y).$$

Integriert man zuerst nach y bei unverändertem x , so hat sich diese Integration über die $P'P$ zu erstrecken, also $y = 0$ bis $y = b(a - x) : a$; die nachfolgende Integration in Bezug auf x erstreckt sich über OA , also von $x = 0$ bis $x = a$; daher hat man

$$\int z df = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} z dx dy.$$

Integriert man dagegen zuerst nach x bei unverändertem y , so erstreckt sich diese Integration über die Strecke $P'P$, und die darauf folgende Integration nach y über die Strecke OB ; folglich ist

$$\int z df = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} z dx dy = \int_0^b \int_0^{a(1-\frac{y}{b})} z dy dx.$$

Um den Spielraum für x und y analytisch zu definieren, bemerken wir, dass die Function

$$T(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$$

für alle Punkte auf derselben Seite der Geraden AB dasselbe Vorzeichen hat, also für alle mit O auf derselben Seite liegenden Punkte negativ ist, da für die Coordinaten des Nullpunkts sich $T(0, 0) = -1$ ergibt. Die Bedingung, dass das Doppelintegral

$$\iint z dx dy$$

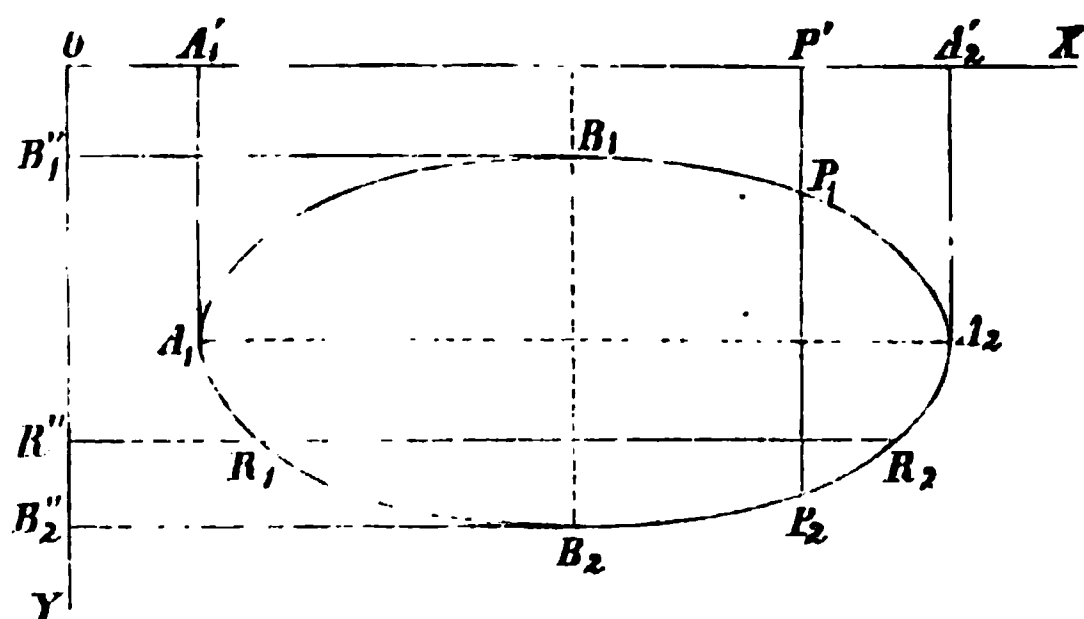
über die Dreiecksfläche OAB auszudehnen ist, kann also durch die Bedingung ersetzt werden, dass x und y alle positiven Werthe annehmen, für welche

$$-1 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \leq 0,$$

oder

$$0 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1.$$

C. Ist das Integral $\int z df$ über eine Ellipse erstreckt, deren Halbachsen a



(M. 527.)

und die dann eintretende Integration nach y über $B_1''B_2''$. Da nun

$$P'P_1 = \delta - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - \gamma)^2}, \quad P'P_2 = \delta + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - \gamma)^2},$$

$$R''R_1 = \gamma - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y - \delta)^2}, \quad R''R_2 = \gamma + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y - \delta)^2},$$

wobei die Wurzeln positiv zu rechnen sind, so ergeben sich die Grenzen

$$\begin{aligned}
 df &= \int_{\gamma-a}^{\gamma+a} \int_{\delta-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}}^{\delta+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\gamma)^2}} z dx dy, \\
 &= \int_{\delta-b}^{\delta+b} \int_{\gamma-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}}^{\gamma+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-\delta)^2}} z dy dx.
 \end{aligned}$$

Perimeters von f ist

$$= \frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 = 0;$$

der geschlossenen Ellipsenfläche hat die Function φ Punkte innerhalb das entgegengesetzte. Da nun für $(\gamma, \delta) = -1$ ist, so folgt, dass φ für alle Punkte im Beachten wir ferner, dass φ im Centrum den kleinsten r das Doppelintegral die analytische Begrenzung

$$\frac{(x-\gamma)^2}{a^2} + \frac{(y-\delta)^2}{b^2} - 1 \leq 0.$$

von den Coordinatenachsen, von einer zur Abscisse x von einer zur Y -Achse und von einer zur Y -Achse und von einer zur Y -Achse und von einer zur Y -Achse

$$b - \frac{x^2}{2p}.$$

Folglich ist

$$\int z df = \int_0^a \int_0^{b-\frac{x^2}{2p}} z dx dy.$$

Will man zuerst nach x integrieren, so zerlegt man die Fläche f in das Rechteck $OACD$, dessen Seiten sind

$$OA = a, \quad OD = AC = b - \frac{a^2}{2p},$$

und in das Parabelsegment DBC ; man hat nun

$$\int z df = \int_0^{b-\frac{a^2}{2p}} \int_0^a z dy dx + \int_{b-\frac{a^2}{2p}}^b \int_0^{\sqrt{2p(b-y)}} z dy dx.$$

Die Function

$$x^2 - 2p(b-y)$$

schwindet für die Punkte der Parabel, und ist für alle Punkte im Innern der Fläche f grösser, als für O , und von demselben Vorzeichen; statt anzugeben, dass das Doppelintegral $\iint z dy dx$ über die Fläche $OACB$ zu erstrecken ist, hat man daher die Bedingungen

$$0 \leq x \leq a; \quad y > 0; \quad -2pb \leq x^2 - 2p(b-y) \leq 0.$$

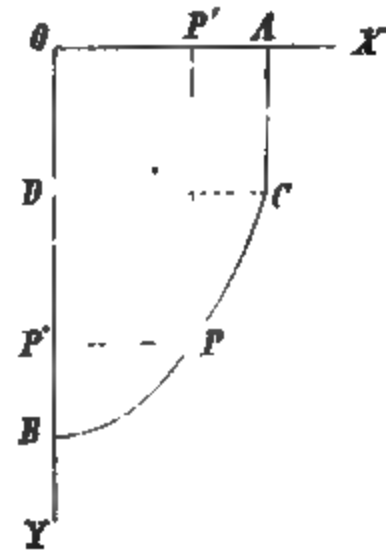
5. Wir beschäftigen uns nun mit der Einführung neuer Variabeln in Doppelintegrale, und beginnen diese Untersuchung mit einem besonders einfachen Beispiele. Will man in das Doppelintegral

$$\iint z dx dy$$

Polarcoordinaten r und φ einführen, so hat man in z die rechtwinkligen Coordinaten x und y durch r und φ nach den bekannten Gleichungen zu ersetzen

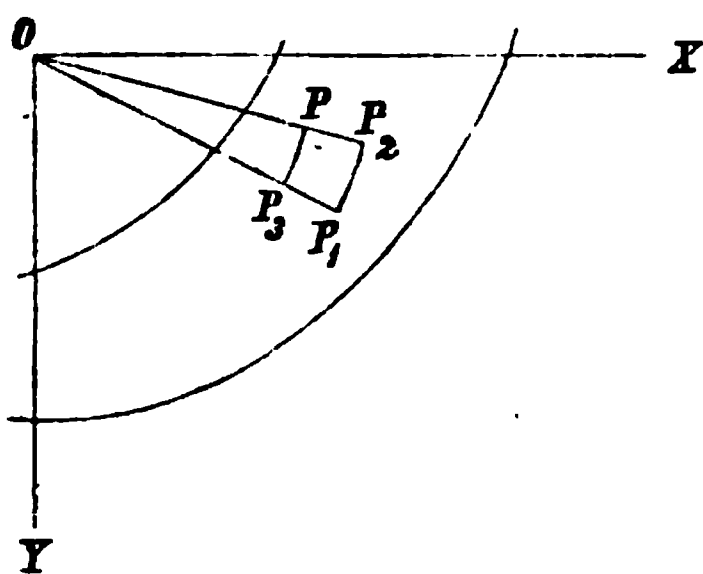
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Ferner hat man das Flächendifferential df durch r und φ auszudrücken,



(M. 528.)

Haben P und P_1 die Polarcoordinaten r, φ und $r + \Delta r, \varphi + \Delta \varphi$, so ist das kleine Flächenstück $PP_2P_1P_3$



(M. 529.)

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta \varphi - \frac{1}{2}r^2 \Delta \varphi \\ &= \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \Delta r \Delta \varphi.\end{aligned}$$

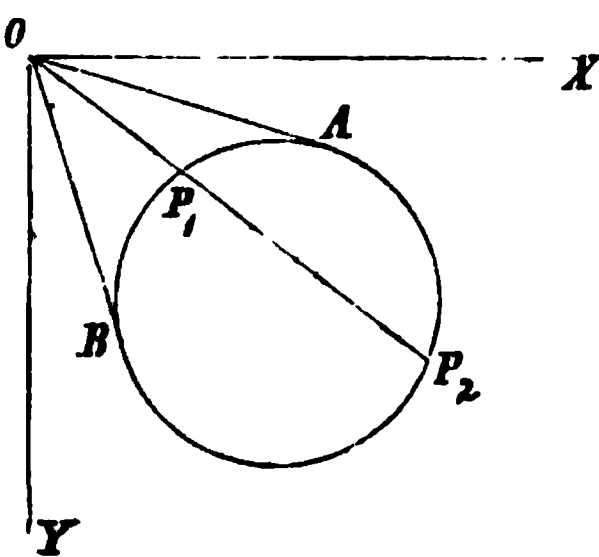
Geht man zur Grenze für verschwindende Δr und $\Delta \varphi$ über, so erhält man

$$df = r dr d\varphi.$$

Daher ist

$$1. \quad \iint z dx dy = \iint z r d\varphi dr.$$

Will man, wie hier angedeutet, zuerst nach r integrieren, so hat man das Integral über die Strecke P_1P_2 (Fig. 530) des Strahles OP_2 auszu-dehnen, die im Innern von f liegt; die Grenzen für die darauf folgende Integration nach φ sind der grösste und kleinste Werth von φ , die bei f vorkommen, also die Arcus der Winkel AOX und BOX .



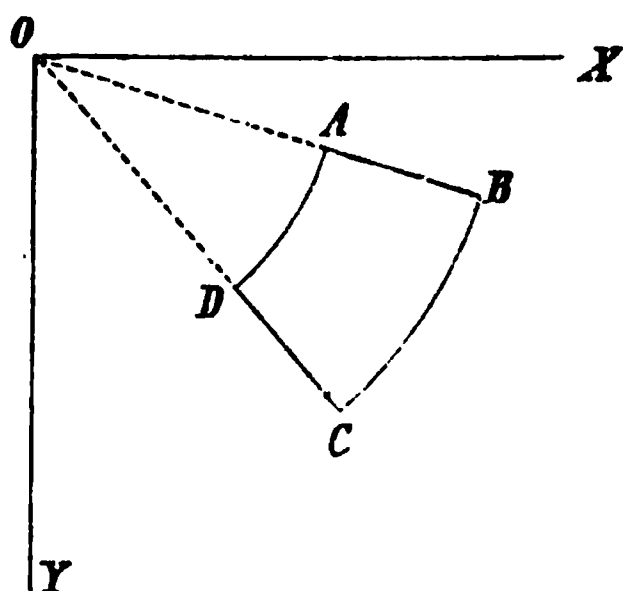
(M. 530.)

Ist f ein Sector eines Kreises mit Centrum O , dessen äusserste Radien und Polarwinkel α, α_1 und β, β_1 sind, so wird die Integration nach y und x wegen der Begrenzung von f sehr unbequem; man müsste das Integral in drei Theile zerfallen; für Polarcoordinaten wird die Arbeit viel einfacher, denn man hat

$$\iint z df = \int_{\beta}^{\beta_1} \int_{\alpha}^{\alpha_1} z r d\varphi dr.$$

Ist f eine Kreisfläche O mit dem Radius a , so hat man

$$\iint z df = \int_0^{2\pi} \int_0^a z r d\varphi dr.$$



(M. 531.)

6. Die Transformationsgleichung No. 5, 1 kann auch unabhängig von geometrischen Betrachtungen

in folgender Weise hergestellt werden.

In dem gegebenen Integrale ersetze man die Variable y , mit der die Integration beginnen soll, durch die neue Variable r . Die Substitutionsformel für y wird aus den beiden Gleichungen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

durch Elimination von φ gewonnen.

Wenn x und y sich um dx und dy ändern, so hat man für die zugehörigen Änderungen von r und φ

$$\begin{aligned}1. \quad & dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \\ 2. \quad & dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.\end{aligned}$$

Bei der Integration nach y bleibt x unverändert, daher hat man in 1. $dx = 0$ zu nehmen, und aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi\end{aligned}$$

das Differential $d\varphi$ zu eliminieren; man erhält

$$3. \quad \sin \varphi dy = dr, \quad dy = dr : \sin \varphi.$$

Setzt man dies in das gegebene Integral, so entsteht

$$4. \quad \iint z dx dy = \iint z \cdot \frac{1}{\sin \varphi} dx dr,$$

wobei man sich $\sin \varphi$ durch x und r ausgedrückt denken muss. Die Grenzen der Integration nach r sind hier den Grenzen der Integration nach y entsprechend zu nehmen; der analytische Spielraum für x und r ergibt sich aus der Ungleichung bez. den Ungleichungen, die den Spielraum von x und y angeben, indem in denselben y durch r und x ausdrückt.

In dem Integrale

$$\iint z \frac{1}{\sin \varphi} dx dr$$

ändere man nun die Anordnung der Integrationen und bestimme der neuen Anordnung entsprechend die Grenzen; in dem somit erhaltenen Integrale

$$\iint z \cdot \frac{1}{\sin \varphi} dr dx$$

ersetze man x durch r und φ . Da bei der Integration nach x die Variable r ungeändert bleibt, so hat man für dx den Werth zu setzen, der sich aus der Substitutionsformel

$$x = r \cos \varphi$$

unter Voraussetzung eines constanten r ergibt, also

$$5. \quad dx = -r \sin \varphi d\varphi.$$

Die Grenzen der Integration nach φ sind denen für die Integration nach x entsprechend zu bestimmen. Man gewinnt somit

$$6. \quad \iint z dx dy = - \iint z r d\varphi dr.$$

Aus 5. geht hervor, dass im Quadranten XOY bei unverändertem r die Variable φ abnimmt, wenn x wächst; dem grössten Werthe von x entspricht daher der kleinste von φ und umgekehrt. Nach dem Begriffe des über eine Fläche genommenen Integrals werden die unteren Grenzen kleiner vorausgesetzt als die oberen. Vertauscht man im letzten Integrale die Grenzen für φ , so hat man das Vorzeichen zu wechseln. Unter dieser Voraussetzung erhält man nun in Uebereinstimmung mit No. 5, 1

$$\iint z dx dy = \iint z r d\varphi dr.$$

6. Wir wenden uns nun zu den allgemeinen Transformationsformeln für Doppelintegrale.

Um für x und y neue Variable λ und μ einzuführen, die mit x und y durch die Gleichungen zusammenhängen

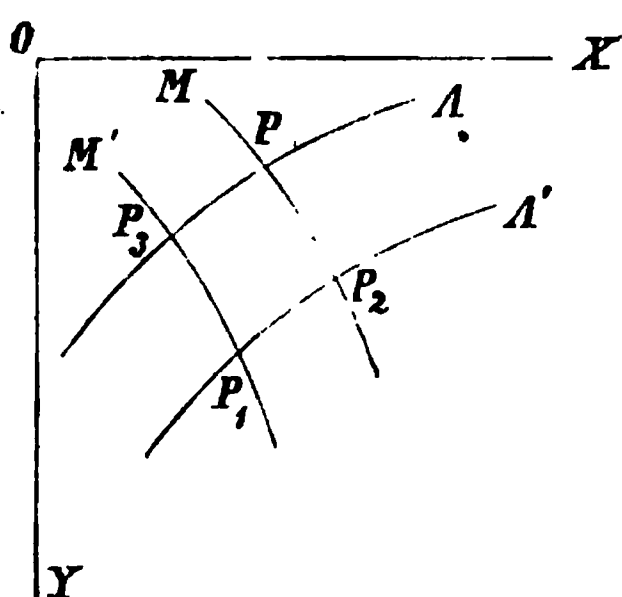
$$1. \quad x = \psi(\lambda, \mu), \quad y = \chi(\lambda, \mu),$$

betrachten wir die Curven, für deren Punkte λ , bez. μ constant sind; die Gleichung einer Curve der ersten Art erhalten wir, indem wir μ aus 1. eliminiren, die einer Curve der zweiten Art durch Elimination von λ . Diese Curven bezeichnen wir als die Parametercurven λ und μ , und die Werthe λ und μ , die einem gegebenen Punkte P entsprechen, als die Parameter (oder Coordinaten im weitesten Sinne) des Punktes.

Für Polarcoordinaten r und φ sind die Parametercurven λ Strahlen durch den Nullpunkt und die Parametercurven μ Kreise um den Nullpunkt.

Wir werden nun unsere Betrachtungen auf solche Transformationen beschränken, bei denen im Allgemeinen zu jedem realen Werthepaare x, y ein und nur ein reales Werthepaar λ, μ gehört, bei welchen also jeder Punkt einen realen Parameter λ und einen realen Parameter μ besitzt. Alsdann geht durch jeden

Punkt P im Allgemeinen eine Parametercurve λ und eine Parametercurve μ ; dies



(M. 532.)

mögen die Curven Λ und M sein. Wächst λ um $\Delta\lambda$ und μ um $\Delta\mu$, so erhält man zwei neue Parametercurven Λ' und M' ; da nach der Voraussetzung zu jedem P nur ein λ und μ gehört, so schneiden sich Λ und Λ' nicht, ebensowenig M und M' . Geht man nun für $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ zur Grenze Null über, so wird $PP_2P_1P_3$ ein verschwindend kleines Viereck, und die Curvenbögen können mit den Sehnen verwechselt werden. Da PP_3 und P_3P_1 , sowie PP_2 und P_3P_1 dabei zu unendlich nahen Geraden werden, und sich nicht schneiden, so folgt, dass $PP_2P_1P_3$ beim Uebergange zur Grenze ein

verschwindend kleines Parallelogramm wird. Der Inhalt desselben ist

$$df = \sin\tau d\rho d\varsigma,$$

wenn man mit τ den Winkel bezeichnet, unter dem sich die Parametercurven in P durchschneiden, und mit $d\rho$ und $d\varsigma$ die an P liegenden Bogenelemente von Λ und M .

Die unendlich kleinen Aenderungen, welche den Coordinaten von P ertheilt werden müssen, um zum Punkte P_3 zu gelangen, gehen durch Differentiation aus 1. hervor unter der Voraussetzung, dass λ constant ist. Man hat daher

$$2. \quad dx = \frac{\partial\psi}{\partial\mu} d\mu, \quad dy = \frac{\partial\chi}{\partial\mu} d\mu.$$

Sind ferner δx und δy die unendlich kleinen Aenderungen, welche man den Coordinaten von P ertheilen muss, um zu P_2 zu gelangen, so hat man

$$3. \quad \delta x = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} d\lambda, \quad \delta y = \frac{\partial\chi}{\partial\lambda} d\lambda.$$

Ferner ist

$$4. \quad d\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad d\varsigma = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}, \quad \sin\tau = \frac{dy}{d\rho} \cdot \frac{\delta x}{d\varsigma} - \frac{dx}{d\varsigma} \cdot \frac{\delta y}{d\varsigma}.$$

Hieraus folgt weiter

$$df = \sin\tau d\rho d\varsigma = dx \delta y - dy \delta x,$$

und daher mit Hülfe der Werthe 2. und 3.

$$df = \pm \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\lambda} \right) d\mu d\lambda.$$

Da df positiv ist, so ist das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden, je nachdem der Klammerinhalt positiv oder negativ ist.

Damit erhalten wir schliesslich die Transformationsformel

$$\iint z dx dy = \pm \iint z \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\lambda} \right) d\lambda d\mu.$$

Beginnt man, wie hier angedeutet, mit der Integration nach μ , so hat man die Grenzen so zu bestimmen, dass sie dem innerhalb f liegenden Theile einer Parametercurve Λ entsprechen; für die nachfolgende Integration nach λ sind die Grenzen der kleinste und grösste auf f vorkommende Werth von λ .

8. Zur weiteren Erläuterung führen wir die Substitution elliptischer Coordinaten aus (vergl. Differentialrechnung § 5, No. 14).

Sind a und b positive Zahlen und ist $a > b$, so genügen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a + \tau} + \frac{y^2}{b + \tau} - 1 = 0$$

von τ , von denen der eine λ zwischen $-a$ und $-b$ liegt, und der andere μ grösser ist als $-b$.

Nimmt man λ und μ als neue Variable, so sind die Parametercurven Kegelschnitte, die der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

confocal sind; und zwar sind die Curven Λ Hyperbeln, die Curven M Ellipsen. Die Parameter λ, μ eines Punktes hängen mit den Coordinaten x, y durch die Gleichungen zusammen

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1, \quad \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} = 1.$$

Aus ihnen ergeben sich die Substitutionsformeln

$$x = \sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}, \quad y = \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}}.$$

Für die Punkte der Y -Achse ist $x = 0$ und daher ist $\lambda = -a$, hat also den kleinsten vorkommenden Werth; der andere Parameter μ ergibt sich aus der Gleichung $y = \sqrt{b+\mu}$; für die Punkte der X -Achse ist $y = 0$, $\lambda = -b$; μ ergibt sich aus $x = \sqrt{a+\lambda}$.

Für ein Bogendifferential auf Λ hat man

$$d\rho^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right)^2 \right] d\mu^2 = \frac{d\mu^2}{4} \cdot \frac{\mu - \lambda}{(a+\mu)(b+\mu)};$$

für ein Bogendifferential auf M

$$d\varsigma^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 = \frac{d\lambda^2}{4} \cdot \frac{\lambda - \mu}{(a+\lambda)(b+\lambda)}.$$

Da die Parametercurven Λ und M sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist ein beliebiges Bogendifferential

$$ds^2 = d\rho^2 + d\varsigma^2 = \frac{\lambda - \mu}{4} \cdot \left[\frac{d\lambda^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)} - \frac{d\mu^2}{(a+\mu)(b+\mu)} \right],$$

und das Flächendifferential

$$df = d\rho d\varsigma = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\lambda - \mu) d\mu d\lambda}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel hat man hier übereinstimmend mit dem Vorzeichen von $\lambda - \mu$ zu wählen.

Man hat daher die Transformation

$$\iint \varphi(x, y) dx dy = \frac{1}{4} \iint \varphi \left(\sqrt{\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{a-b}}, \sqrt{\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{b-a}} \right) \\ \times \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{-(a+\mu)(b+\mu)(a+\lambda)(b+\lambda)}} d\lambda d\mu.$$

Soll das Integral über den innerhalb XOY liegenden Quadranten der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$$

ausgedehnt werden, und beginnt man mit der Integration nach λ , so hat man dieselbe über den Quadranten der Ellipse zu erstrecken

$$\frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} - 1 = 0.$$

Dem auf der X -Achse liegenden Scheitel dieser Ellipse gehört der Parameter $\lambda = -b$, dem auf der Y -Achse liegenden $\lambda = -a$ zu; die Integration nach λ erfolgt daher zwischen den Grenzen $-a$ und $-b$. Da ferner für die an die

X -Achse sich anschmiegende Curve M der Parameter $\mu = -b$ und für die begrenzende Curve $\mu = 0$ ist, so hat man die Transformation

$$2. \quad \int_0^a \int_0^b \varphi dx dy = \frac{1}{4} \int_{-b}^0 \int_{-a}^{-b} \varphi \cdot \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{-(a + \mu)(b + \mu)(a + \lambda)(b + \lambda)}} d\mu d\lambda.$$

Da innerhalb des ganzen Integrationsgebiets $\lambda < \mu$, so ist statt des Zählers $\lambda - \mu$ in 1. hier $\mu - \lambda$ gesetzt worden; in Uebereinstimmung hiermit ist die Wurzel im Nenner positiv zu rechnen.

9. Berechnung von Oberflächen. Um das Stück F der Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$ zu erhalten, das eine gegebene Horizontalprojection f hat, zerlegen wir f in kleine Theile Δf und durchschneiden F durch die Mäntel der parallel der Z -Achse erstreckten Cylinder, welche Δf zu Normalschnitten haben; hierdurch zerfällt F in ebensoviel Theile wie f , die wir mit ΔF bezeichnen. Legen wir nun in irgend einem Punkte innerhalb jedes ΔF eine Tangentenebene an F und bezeichnen das Stück derselben, dessen Horizontalprojection mit Δf zusammenfällt, mit ΔT , so stimmen die Summen $\Sigma \Delta F$ und $\Sigma \Delta T$ um so genauer überein, je kleiner die Normalschnitte Δf sind. Geht man zur Grenze für verschwindend kleine Δf über, so erhält man

$$F = \lim \Sigma \Delta F = \lim \Sigma \Delta T.$$

Ist τ der Winkel, unter dem ΔT gegen die XY -Ebene geneigt ist, so ist bekanntlich

$$\Delta T = \frac{\Delta f}{\cos \tau},$$

daher hat man

$$F = \lim \Sigma \frac{\Delta f}{\cos \tau},$$

oder

$$1. \quad F = \int \frac{1}{\cos \tau} \cdot df = \iint \frac{1}{\cos \tau} dx dy.$$

Ist die Gleichung der Fläche $z = \varphi(x, y)$, so ist (Differentialrechnung § 6, No. 1)

$$\cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

und daher

$$2. \quad F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Aus der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ folgt

$$\cos \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} : \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2},$$

$$3. \quad F = \iint \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \cdot dx dy.$$

10. Für das elliptische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b},$$

$$\frac{1}{\cos \tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy.$$

Führt man neue Variable durch die Gleichungen ein

$$x = a \lambda \cos \mu, \quad y = b \lambda \sin \mu,$$

so sind die Parametercurven Λ Ellipsen

$$\left(\frac{x}{a\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\lambda}\right)^2 = 1,$$

und die Curven M sind Strahlen durch den Nullpunkt, deren Winkel ψ mit der X -Achse sich ergibt aus

$$\tan \psi = \frac{b}{a} \tan \mu.$$

Nimmt man als Horizontal-Projection f einen Quadranten der Parametercurve $\lambda = k$ so sind die Grenzbedingungen für x und y

$$0 \leq \frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Die Grenzbedingung für λ ist

$$0 \leq \lambda \leq k.$$

Die Grenzen für ψ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$; dieselben Grenzen ergeben sich für μ .

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= a \cos \mu, & \frac{\partial x}{\partial \mu} &= -a \lambda \sin \mu, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= b \sin \mu, & \frac{\partial y}{\partial \mu} &= b \lambda \cos \mu, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= ab \lambda. \end{aligned}$$

Daher hat man für die gesuchte Fläche

$$\begin{aligned} F &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^k \sqrt{1 + \lambda^2} \cdot \lambda d\mu d\lambda, \\ &= \frac{\pi}{6} ab [(1 + k^2)^{\frac{3}{2}} - 1]. \end{aligned}$$

Für das hyperbolische Paraboloid ist

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}$$

und daher

$$\frac{1}{\cos \tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy.$$

Hieraus erkennt man: Tangentenebenen, welche die beiden Paraboloiden

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0, \quad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

in Punkten berühren, die dieselbe Projection auf die XY -Ebene haben, sind gleich geneigt gegen die XY -Ebene. Flächenstücke beider Paraboloiden, welche dieselbe Projection auf die XY -Ebene haben, sind gleich.

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos \mu \frac{\partial r}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sin \mu \left(\cos \mu \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \sin \mu \left(\sin \mu \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right)$$

Hieraus ergeben sich

$$L = -$$

$$M = r$$

$$N = r$$

Hieraus erhält man

$$M^2 + N^2$$

und dann weiter

$$L^2 + M^2 + N^2$$

Daher ist schliesslich

$$1. \quad F = \int$$

Die Cosinus der

bekanntlich (Differential

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \quad - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Ersetzt man die partialen Differentialquotienten durch L, M, N , so entsteht

$$- \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad - \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad - \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

Hieraus ergibt sich für den Winkel ν , den die Normale mit dem Radius vector bildet,

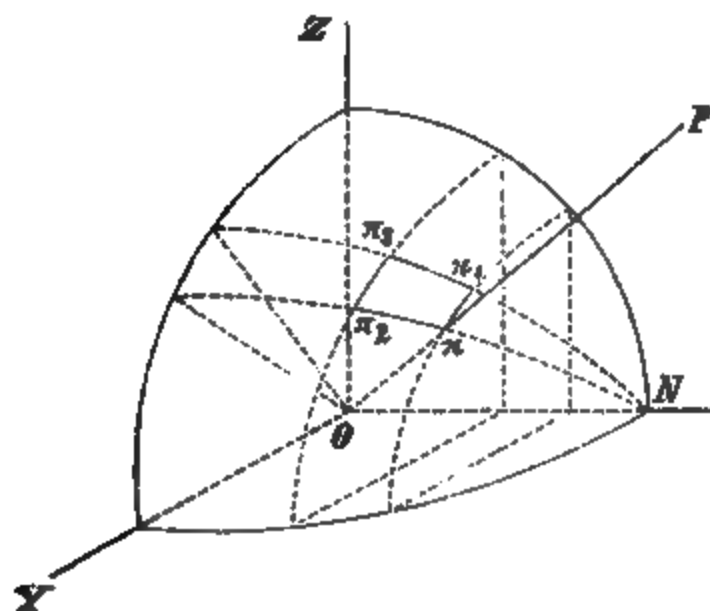
$$\cos \nu = - \frac{xL + yM + zN}{r\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = \frac{r^2 \sin \mu}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

Man hat daher

$$2. \quad F = \iint \frac{r^2}{\cos \nu} \sin \mu \, d\lambda \, d\mu.$$

Zu dieser Formel gelangt man auch durch folgende trische Betrachtung.

Beschreibt man um den Punkt eine Kugel, deren Radius $r = 1$ ist, bezeichnet ihren Punkt N mit der X -Achse und zählt die Meridiane von der XY -Ebene an, so ist μ die polare Distanz und λ die Länge der Centralprojection Π des Punktes



(M. 583.)

he bestimmte Integrale.

stück $\Pi\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ der Kugel, da
l den Breitenkreisen μ und $\mu -$
nähert sich beim Uebergange zu verschwindend kleinen $\Delta\lambda$ und $\Delta\mu$ ei
ecke aus den Seiten

$$\lim \Pi\Pi_1 = \sin\mu d\lambda, \quad \lim \Pi\Pi_2 = d\mu.$$

Wir projeciren dieses Kugelelement $\Delta S = \Pi\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ von O :
Tangentenebene der Fläche im Punkte P und auf eine Ebene, d
parallel zu dieser Tangentenebene gelegt ist; die erstere Projection :
letzte $\Delta\Phi$; diese beiden Projectionen hängen durch die Gleichung

$$\Delta F = r^2 \cdot \Delta\Phi.$$

Geht man nun zur Grenze für verschwindend kleine ΔS über, so
 ΔF mit einem Elemente der gegebenen Oberfläche, und ΔS mit c
projection der Fläche $\Delta\Phi$ auf die Tangentenebene der Kugel in Π v
man hat daher

$$d\Phi = \frac{dS}{\cos v} = \frac{1}{\cos v} \sin\mu d\lambda d\mu,$$

folglich

$$dF = \frac{r^2}{\cos v} \sin\mu d\lambda d\mu,$$

und schliesslich

$$F = \iint \frac{r^2}{\cos v} \sin\mu d\lambda d\mu.$$

§ 10. Dreifache bestimmte Integrale.

1. Ein gegebenes begrenztes Volumen v theilen wir auf irge
Weise in kleine Theile

$$\Delta_1 v, \Delta_2 v, \Delta_3 v, \dots \Delta_k v \dots,$$

und bezeichnen mit $f_k(x, y, z)$ den Werth, den die Function $f(x, y, z)$
einen im Innern von Δv gelegenen Punkt annimmt.

Unter dem über das Volumen v erstreckten Integrale

$$\int f(x, y, z) dv$$

verstehen wir alsdann den Grenzwert, gegen den die Sum

$$\sum f_k(x, y, z) \Delta_k v$$

für verschwindend kleine Werthe der Δv convergirt, wenn
Summation über alle in v enthaltenen Volumenelemente a
wird. Es ist also

$$1. \quad \int f(x, y, z) dv = \lim \sum f(x, y, z) \Delta v,$$

wobei rechts der Index k unterdrückt worden ist.

Dieses Integral hat eine einfache mechanische Bedeutung.
specifischen Gewichte eines homogenen Körpers (d. i. bei welch
Volumina gleiche Gewichte haben) versteht man den Quotienten γ
und Volumen; das Gewicht eines gegebenen Volumens eines homoge
ist daher das Produkt aus dem Volumen und dem specifischen Ge
ein Körper nicht homogen, so versteht man unter dem an einem Pu
vorhandenen specifischen Gewichte den Grenzwert des Quotienten

$$\Delta\gamma : \Delta v.$$

Hierbei bedeutet Δv einen kleinen Theil des Körpers, in w
Punkt x, y, z liegt, und $\Delta\gamma$ das Gewicht dieses Theiles.

Es bedeute nun die Function $f(x, y, z)$ das specifische Gewicht

x, y, z eines Körpers vom Volumen v und $\rho(x, y, z)$ das grösste inneren Gewicht des Körpers,

$$\sum \rho(x, y, z) \Delta v <$$

$$\sum \rho(x, y, z) \Delta v <$$

Verschwinden die Δv , so geht daher

$$\int \rho(x, y, z) dv$$

Das über ein Volumen v erstreckte Gewicht eines Körpers an, der an jedem Punkte gleiches Gewicht hat.

Ueber ein Volumen erstreckte Bedeutung in der Mechanik. Die Anziehung, die in einer bestimmten Richtung ausübt, ist einer Function φ der Coordinaten abhängig. Ist nun ρ die Dichte und der Function φ , so giebt $\int \rho \varphi dv$ die Anziehung an, die der angezogene Punkt in v enthaltenen Körper erleidet.

2. Das Integral $\int \rho dv$ kann theilt, auf sehr verschiedenen Weisen. folgend einfache Integration.

Durch Parallelebenen zu den Coordinatenachsen; sind $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die Dimensionen des Volumentheils, in dessen Innem

$$\int \rho(x, y, z) dv$$

Addirt man zunächst die Elemente, die zu den X -Achsen liegen, so hat der Grenzübergang hat x in der Abscisse, ist also bei dieser Addition

$$\Delta x \cdot \lim \sum \rho$$

Dabei ist das Integral über y und z der die Abscisse x hat.

Man hat nun weiter

$$\lim \sum \rho \cdot \Delta z \Delta y \Delta x = \int \rho dv$$

Die Grenzen des Integrals sind die zwischen denen das Volumen v liegt.

Unter Einhaltung der angegebenen

$$\int \rho(x, y, z) dv$$

3. Ist das Volumen v ein Parallelepiped mit den Grenzen $x = a_1, x = a_2, y = b_1, y = b_2, z = c_1, z = c_2$, die Grenzen der Integrale, es ist

$$\int \rho dv$$

Ordnet man in

be bestimmte Integrale.

, z. B. so, dass man erst
en Volumenelemente add

Theilsumme

$$\Delta y \Sigma f \Delta z \Delta x.$$

Hierbei ist y in $f(x, y, z)$ constant. Der Uebergang z
schwindende Δz und Δx liefert

$$\Delta y \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dx dz.$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\int f dv = \lim \Sigma \Delta y \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dx dz = \int_{b_0}^{b_1} \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dy dx dz$$

Es ist daher

$$\int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f dx dy dz = \int_{b_0}^{b_1} \int_{a_0}^{a_1} \int_{c_0}^{c_1} f dy dx dz.$$

Auf diesem Wege gewinnt man den Satz: Wenn die C
ind, so kann die Reihenfolge der Integrationen g
hne dass die Grenzen sich ändern.

Sind die Grenzen nicht constant, so ändern sich mit d
ntegrationen auch die Grenzen.

4. Um die Integration $\int f dv$ in Polarcoordinaten auszu
in f die Coordinaten x, y, z gemäss der Gleichungen

$$x = \rho \cos \mu, \quad y = \rho \sin \mu \cos \lambda, \quad z = \rho \sin \mu.$$

Wir construiren Kugeln S um den Nullpunkt, und
die in Richtung eines Radius gemessene Dicke der Schicht
einander folgenden Kugeln; hierauf Rotationskegel C , welc
haben und bezeichnen mit $\Delta \mu$ den Winkel der derselben M
hörigen Mantellinien zweier auf einander folgenden Kegel; sc
durch die X -Achse und bezeichnen mit $\Delta \lambda$ den Winkel z
folgenden Ebenen.

Durch den Kegel, dessen Meridian den Winkel μ mi
wird auf der Kugeloberfläche mit dem Radius ρ eine Calotte b
ie $\rho(1 - \cos \mu)$ hat; also ist der auf dieser Calotte stehen

$$2\pi \rho \cdot \rho(1 - \cos \mu) \cdot \frac{\rho}{3} = \frac{2\pi}{3} \rho^3 (1 - \cos \mu).$$

Wächst μ um $\Delta \mu$, so wächst dieser Sector um

$$\frac{2\pi}{3} \rho^3 [1 - \cos(\mu + \Delta \mu) - (1 - \cos \mu)] = \frac{2\pi}{3} \rho^3 [\cos \mu -$$

Behält man angesichts des Grenzübergangs nur Glieder n
 $\Delta \mu$ bei, so erhält man

$$\frac{2\pi}{3} \rho^3 \sin \mu \Delta \mu.$$

Wächst ferner ρ um $\Delta \rho$, so wächst dieses Volumen um

$$\frac{2\pi}{3} \sin \mu \Delta \mu [(\rho + \Delta \rho)^3 - \rho^3];$$

behält man hier von dem Klammerinhalte nur Glieder mit de
 $\Delta \rho$, so entsteht

$$3. \quad 2\pi \rho^2 \sin \mu \Delta \mu \Delta \rho.$$

Der Theil dieses Ringes, der zwischen zwei benachbart

ist eines von den Volumenelementen, in
hat zum Ringvolumen 3. das Verhältniss

$$\Delta v = \rho^2 \sin$$

Somit ergibt sich schliesslich

$$\iiint f dv = \iiint f \cdot \rho'$$

Die Grenzen sind hier dem Volume

5. Drückt man x, y, z durch drei n

1. $x = \varphi(\rho, \lambda, \mu), \quad y = \psi(\rho, \lambda, \mu), \quad z = \chi(\rho, \lambda, \mu)$

und wählt die Parameter so, dass im Allgemeinen zu jedem Punkte des Volumens v ein und nur ein reales Parametersystem ρ, λ, μ gehört, so kann man die Integration auch in den neuen Variablen ρ, λ, μ durchführen.

Denkt man sich in den Gleichungen 1. den Parameter ρ gegeben, eliminirt λ und μ , so erhält man eine Gleichung in x, y, z , die ρ enthält. Die Fläche, welche diese Gleichung darstellt, enthält alle die Punkte, denen der Parameterwerth ρ zugehört; wir wollen sie die Parameterfläche P nennen. In gleicher Weise erhalten wir die Parameterflächen Λ und M , welche die Parameterwerthe λ oder μ zugehört.

Der Voraussetzung nach schneiden sich zwei Parameterflächen derselben Art nicht; folglich kann das Volumenelement, das von den drei Paar Parameterflächen der Parameter $\rho, \rho + \Delta\rho, \lambda, \lambda + \Delta\lambda, \mu, \mu + \Delta\mu$ eingeschlossen ist, für verschwindende Werthe von $\Delta\rho, \Delta\lambda, \Delta\mu$ als Parallelepiped betrachtet werden.

Die drei dem Punkte P benachbarten Ecken P_1, P_2, P_3 dieses Volumenelements erreicht man durch Verschiebungen von P , wenn dabei der Parameterwerth ρ und λ und μ und ρ , ρ und λ ungeändert bleiben.

Bezeichnet man die Coordinaten von P mit x, y, z , so ist daher

$$\Delta_1 x = \frac{\partial x}{\partial \rho} \Delta \rho, \quad \Delta_1 y = \frac{\partial y}{\partial \rho} \Delta \rho, \quad \Delta_1 z = \frac{\partial z}{\partial \rho} \Delta \rho;$$

$$\Delta_2 x = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \Delta \lambda, \quad \Delta_2 y = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \Delta \lambda, \quad \Delta_2 z = \frac{\partial z}{\partial \lambda} \Delta \lambda;$$

$$\Delta_3 x = \frac{\partial x}{\partial \mu} \Delta \mu, \quad \Delta_3 y = \frac{\partial y}{\partial \mu} \Delta \mu, \quad \Delta_3 z = \frac{\partial z}{\partial \mu} \Delta \mu.$$

Das Volumen eines Tetraeders, dessen Ecken die Coordinaten x, y, z haben, stimmt bekanntlich dem absoluten Werthe nach überein mit

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Subtrahirt man die erste Zeile von jeder folgenden, so erhält man

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$

Lässt man hier $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \Delta_1 y, \dots, \Delta_3 z$ an die Stelle der Coordinatendifferenzen treten, so erhält man für das Parallelepiped aus den Kanten PP_1, PP_2, PP_3

$$\Delta v = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} \cdot \Delta \mu \Delta \lambda \Delta \rho.$$

fache bestimmte Integrale.

die rechtwinkligen Coordinaten

so hat man die Transformation

$$\iiint f dx dy dz = \pm \iiint f \cdot J \cdot d\rho d\lambda d\mu,$$

wobei

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix}.$$

Die Grenzen sind hierbei wieder dem Volumen v entsprechend und das Vorzeichen so zu wählen, dass es mit dem von J übereinstimmt.

Man kann die Transformation auch unabhängig von den anderen Variablen durchzuführen. Aus den Gleichungen

$$x = \varphi(\rho, \lambda, \mu), \quad y = \psi(\rho, \lambda, \mu)$$

setzt man ρ und λ und substituirt diese Werthe in

$$z = \chi(\rho, \lambda, \mu);$$

so erhält man z als Function von x, y und μ . Nimmt man μ als Variable für die Integration, so hat man dz durch $d\mu$ zu ersetzen, während x und y in der ersten Integration bleiben y und x unverändert; unter dx und dy versteht man durch Differentiation der Substitutionsgleichungen

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu,$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial z}{\partial \mu} d\mu.$$

es folgt

$$dz = \frac{J}{J_1} d\mu,$$

wobei

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix}.$$

Daher hat man zunächst

$$\iiint f dx dy dz = \iiint f \frac{J}{J_1} dx dy d\mu,$$

wobei man die Grenzen der Integration nach μ nach den Grenzen der anderen Variablen bestimmen hat.

Hierauf ändert man die Ordnung der Integrationen; nach der Integration nach μ sind die Grenzen entsprechend bestimmt worden sind, erhält man

$$\iint f \cdot \frac{J}{J_1} \cdot dx d\mu dy.$$

Nun eliminire man aus den beiden ersten Substitutionsgleichungen y als Function von λ, μ und x aus. Führt man $d\lambda$ statt dy in das Integral ein, so hat man dy durch $d\lambda$ zu ersetzen zu berücksichtigen, dass μ und x unverändert bleiben.

Unter dieser Voraussetzung erhält man

a

und hat demnach

und daher die zweite Umform

2.
$$\iiint f d.$$

wobei die Grenzen für λ den

Hier ändert man nochm
der nach x , bildet also, inde

Nun kann man x durch

ersetzen; da bei der Integrati
bleiben, so hat man

Bestimmt man nun die ϵ
für x , so hat man schliesslic

3.
$$\iiint f d$$

in Uebereinstimmung mit de
unwesentlich ist.

Die in No. 5 gegebene λ
No. 5, die Bedingung stell
Integrale, wie im ursprünglic
Transformation verwendeten

$$dz = \int_{J_1}^J d$$

erkennt man leicht, dass zu
und zwei negative Werthe ϵ
positive und ein negativer ϵ
negativ, so folgt, dass wach
auf μ bezügliche obere Grer
benen Integrale alle untern
die untere Grenze für μ klei
und damit das Vorzeichen d

Hieraus folgt, dass wen
die obern sein sollen, das
nachdem $J \geq 0$.

7. Das Quadrat der Fu

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{vmatrix},$$

wobei abkürzend gesetzt ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2, & a_1 &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ b_0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, & a_2 &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ c_0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2, & b_1 &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} \end{aligned}$$

Für die verschwindend kleinen Verschiebungen PP_1

$$\begin{aligned} PP_1 &= \sqrt{a_0} d\rho, & PP_2 &= \sqrt{b_0} d\lambda, & P \\ PP_1 \cdot PP_2 \cdot \cos P_1 PP_2 &= a_1 d\rho \\ PP_1 \cdot PP_3 \cdot \cos P_1 PP_3 &= a_2 d\rho \\ PP_2 \cdot PP_3 \cdot \cos P_2 PP_3 &= b_1 d\lambda \end{aligned}$$

Wenn sich je drei Parameterflächen P, Λ, M so sind $P_1 PP_2, P_1 PP_3, P_2 PP_3$ rechte Winkel; man hat. Die Determinante J^2 reducirt sich alsdann auf ihr Di

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}$$

Dieser Fall tritt bei den gewöhnlichen räumlichen K

8. Ein weiteres Beispiel für orthogonale Pa
elliptischen Raumkoordinaten.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes, und die cubische Gleichung der Unbekannten v

$$1. \quad \frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} = 1$$

immer drei reale Wurzeln. Beseitigt man nämlich die

$$2. \quad F(v) = x^2(b+v)(c+v) + y^2(a+v)(c+v) - (a+v)(b+v)(c+v) =$$

Setzt man für v der Reihe nach die Werthe $-a, -$

$$F(-a) = x^2(b-a)(c-a), \quad F(-b) = y^2(a-b)(c-b),$$

$$F(-c) = z^2(a-c)(b-c), \quad F(\infty) = \infty$$

Die Wurzeln der Gleichung 1. liegen daher zwis
 $-c, -c$ und $-b, -b$ und $-a$; wir bezeichnen
 ρ, λ, μ . Die Gleichungen der Parameterflächen sind

$$P = \frac{x^2}{a+\rho} + \frac{y^2}{b+\rho} + \frac{z^2}{c+\rho} =$$

$$3. \quad M = \frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} =$$

$$\Lambda = \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} + \frac{z^2}{c+\mu} =$$

Die Flächen P sind dreiachsige Ellipsoide, Λ sin
zweischalige Hyperboloide. Da ρ, λ, μ die Wurzeln
gilt die Identität

$$\begin{aligned} (a+v)(b+v)(c+v) - x^2(b+v)(c+v) - y^2(a+v)(c+v) \\ = (v-\rho)(v-\lambda)(v-\mu). \end{aligned}$$

Ersetzt man hier v der Reihe nach durch $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man die Substitutionsgleichungen

$$4. \quad x^2 = \frac{(a+\rho)(a+\lambda)(a+\mu)}{(b-a)(c-a)}, \quad y^2 = \frac{(b+\rho)(b+\lambda)(b+\mu)}{(a-b)(c-b)}, \quad z^2 = \frac{(c+\rho)(c+\lambda)(c+\mu)}{(a-c)(b-c)}.$$

Durch Subtraction je zweier der Gleichungen 3. erhält man die Gleichungen

$$5. \quad \begin{aligned} & \frac{x^2}{(a+\rho)(a+\lambda)} + \frac{y^2}{(b+\rho)(b+\lambda)} + \frac{z^2}{(c+\rho)(c+\lambda)} = 0, \\ & \frac{x^2}{(a+\rho)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\rho)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\rho)(c+\mu)} = 0, \\ & \frac{x^2}{(a+\lambda)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\lambda)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\lambda)(c+\mu)} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2$ die Cosinus der Stellungswinkel der Tangentenebenen der Flächen P, Λ, M im Punkte P , so ist bekanntlich

$$6. \quad \begin{aligned} \rho_0 : \rho_1 : \rho_2 &= \frac{x}{a+\rho} : \frac{y}{b+\rho} : \frac{z}{c+\rho}, \\ \lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 &= \frac{x}{a+\lambda} : \frac{y}{b+\lambda} : \frac{z}{c+\lambda}, \\ \mu_0 : \mu_1 : \mu_2 &= \frac{x}{a+\mu} : \frac{y}{b+\mu} : \frac{z}{c+\mu}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 5. sagen daher aus, dass diese Tangentenebenen normal zu einander sind, dass sich also die durch P gehenden Parameterflächen P, Λ, M normal schneiden.

Aus den Gleichungen 4. ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial x}{\partial \rho} &= \frac{x}{a+\rho}, & 2 \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \frac{y}{b+\rho}, & 2 \frac{\partial z}{\partial \rho} &= \frac{z}{c+\rho}; \\ 2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{x}{a+\lambda}, & 2 \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{y}{b+\lambda}, & 2 \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \frac{z}{c+\lambda}; \\ 2 \frac{\partial x}{\partial \mu} &= \frac{x}{a+\mu}, & 2 \frac{\partial y}{\partial \mu} &= \frac{y}{b+\mu}, & 2 \frac{\partial z}{\partial \mu} &= \frac{z}{c+\mu}; \end{aligned}$$

hieraus folgt weiter

$$7. \quad J = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{x^2}{(a+\rho)^2} + \frac{y^2}{(b+\rho)^2} + \frac{z^2}{(c+\rho)^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c+\lambda)^2}} \\ \cdot \sqrt{\frac{x^2}{(a+\mu)^2} + \frac{y^2}{(b+\mu)^2} + \frac{z^2}{(c+\mu)^2}}.$$

Die Radicanden, die wir der Reihe nach mit $1:R^2, 1:L^2, 1:M^2$, bezeichnen wollen, kann man in folgender Weise bestimmen. Für die in 6. enthaltenen Cosinus hat man die Werthe

$$8. \quad \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{Rx}{a+\rho}, & \rho_1 &= \frac{Ry}{b+\rho}, & \rho_2 &= \frac{Rz}{c+\rho}, \\ \lambda_0 &= \frac{Lx}{a+\lambda}, & \lambda_1 &= \frac{Ly}{b+\lambda}, & \lambda_2 &= \frac{Lz}{c+\lambda}, \\ \mu_0 &= \frac{Mx}{a+\mu}, & \mu_1 &= \frac{My}{b+\mu}, & \mu_2 &= \frac{Mz}{c+\mu}. \end{aligned}$$

Aus diesen Werthen und mit Rücksicht auf die Gleichungen 3. ergibt sich

$$9. \quad \begin{aligned} \rho_0 x + \rho_1 y + \rho_2 z &= R, \\ \lambda_0 x + \lambda_1 y + \lambda_2 z &= L, \\ \mu_0 x + \mu_1 y + \mu_2 z &= M. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren (vergl. Analyt. Geom. des Raumes, § 2, No. 4),

ifache bestimmte Integrale.

von P in einem Systeme sind, die tenebenen der Parameterflächen

ie die Formeln, welche x, y, z i so erhält man

$$R + \lambda_0 L + \mu_0 M,$$

$$R + \lambda_1 L + \mu_1 M,$$

$$R + \lambda_2 L + \mu_2 M.$$

$\mu_0 \dots \mu_2$ durch die Werthe 8.; das

$$\frac{L^2}{a + \lambda} + \frac{M^2}{a + \mu} = 1,$$

$$\frac{L^2}{b + \lambda} + \frac{M^2}{b + \mu} = 1,$$

$$\frac{L^2}{c + \lambda} + \frac{M^2}{c + \mu} = 1.$$

ss die cubische Gleichung

$$\frac{L^2}{u + \lambda} + \frac{M^2}{u + \mu} = 1$$

igt man in dieser Gleichung die

wechselt die Zeichen, so erhält man

$$(u + \rho)(u + \lambda)(u + \mu) - R^2(u + \lambda)(u + \mu) - L^2(u + \rho)(u + \mu) - M^2(u + \rho)(u + \lambda) = (u - a)(u - b)(u - c).$$

Man hat daher die Identität

$$(u + \rho)(u + \lambda)(u + \mu) - R^2(u + \lambda)(u + \mu) - L^2(u + \rho)(u + \mu) - M^2(u + \rho)(u + \lambda) = (u - a)(u - b)(u - c).$$

Setzen wir in diese identische Gleichung für u , der Reihe nach ρ, λ, μ , so erhalten wir sofort

$$12. \quad R^2 = \frac{(\rho + a)(\rho + b)(\rho + c)}{(\lambda - \rho)(\mu - \rho)}, \quad L^2 = \frac{(\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda + c)}{(\rho - \lambda)(\mu - \lambda)},$$

$$M^2 = \frac{(\mu + a)(\mu + b)(\mu + c)}{(\rho - \mu)(\lambda - \mu)}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergibt sich schliesslich die gesuchte T

$$\iiint f dx dy dz = \frac{1}{8} \iiint f \cdot \frac{(\rho - \lambda)(\lambda - \mu)(\mu - \rho)}{\sqrt{-ABC}} d\rho d\lambda d\mu,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$A = (\rho + a)(\rho + b)(\rho + c), \quad B = (\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda + c), \quad C = (\mu + a)(\mu + b)(\mu + c).$$

Wir wollen diese Formel anwenden, um einen Octanten des berechnen, dessen Oberfläche die Gleichung hat

$$E = \frac{x^2}{a + \rho_0} + \frac{y^2}{b + \rho_0} + \frac{z^2}{c + \rho_0} - 1 = 0.$$

Das Doppelintegral nach μ und λ hat sich hierbei über all Octanten eines mit E confocalen Ellipsoids zu erstrecken, mit Werthe von μ und λ ; daher sind für μ die Grenzen $-a$ und $-b$ sind sie $-b$ und $-c$. Betreffs der Grenzen für ρ genügen die dass die Achsen der Parameterfläche mit ρ wachsen, und dass E s Parameterflächen P ist, nämlich für den besonderen Werth $\rho = \rho_0$ P , die innerhalb E liegen, gehören daher zu den Werthen $\rho = -$

Da es sich nur um eine Addition der Volumenelemente handelt, Verwendet man ferner die bekannte Formel für den Inhalt eines Ellipsoids, so erhält man schliesslich die bemerkenswerthe Integra

$$\frac{4}{3} \pi \sqrt{a + \rho_0} \sqrt{b + \rho_0} \sqrt{c + \rho_0}$$

§ 11. Die periodischen I

1. Die unendlichen Reihen
lernt haben, waren Potenzreihen
Potenzen der Variablen fortschreitend
andere Gattung unendlicher Reihen
der beiden allgemeinen Formen

$$1. \quad A_0 + A_1 \cos u$$

$$2. \quad B_1 \sin u$$

welche also nach dem Cosinus
u fortschreiten.

Wenn die Reihen innerhalb
sie Functionen von u dar; setzt

$$A_0 + A_1 \cos u$$

so ist offenbar

$f(u)$

Die Werthe, welche die Function
holen sich also in umgekehrter
u = 2π wächst. Beachtet man
nicht ändern, wenn u um ein
erkennt man, dass

$f(u)$

Die Summe der Reihe ist d
erkennt man sofort, dass auch
Beide Reihen werden daher

Hierin unterscheiden sich die

Potenzreihen sind innerhalb
an der Grenze der Convergenz
für alle Werthe der Variablen,
die Summe der Reihe unendlich
gegen sind für alle Werthe von
convergiren, und sind periodisch

2. Ist $f(u)$ eine Function
bleibt, so kann man die Coefficienten
 B_1, \dots, B_n so bestimmen, dass

$$1. \quad f(u) = A_0 + A_1 \cos u$$

$$2. \quad f(u) = B_1 \sin u +$$

für n verschiedene innerhalb der
gewählte Werthe von u erfüllt
von u z. B. in 1. ein, so erhält man
Coefficienten A_0, A_1, \dots, A_{n-1}
bestimmt werden können.

Die Summen der endlichen

*) Ueber die Convergenzbedingungen
Analysis, 4. Aufl., Bd. I. pag. 40.

eihen und die FOURIER'schen Integrale.

$$A_2 \cos 2u + \dots + A_{n-1} \cos(n-1)u \\ 2u + \dots + B_n \sin nu \\ \text{en } n \text{ Werthe der Variabeln } u \text{ mit de}$$

$f(u)$ überein.

Vermehrt man nun die Zahl n , so wächst die Anzahl der Punkt Curven S_n , Σ_n und $f(u) - u$ dabei als Abscisse und S_n , Σ_n beinate betrachtet — gemein haben; wird n unendlich gross, so ven S_n und $f(u)$, bez. Σ_n und $f(u)$ unendlich viele Punkte inn cissenintervalls 0 und π gemein. Es wird daher jedenfalls möglich fficienten A_0, A_1, A_2, \dots bez. B_1, B_2, B_3, \dots der unendlichen

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \dots \\ B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + \dots$$

u bestimmen, dass für alle Werthe von u innerhalb 0 und π d gegebene, innerhalb der Grenzen endlich bleibende Function $f(u)$

3. Angenommen, es gelte die Entwicklung

$$f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \dots$$

kann man die Coefficienten leicht auf folgendem Wege bestimmen

Man multiplicire 1. mit du und integrire zwischen den Grenzen jede ganze Zahl k

$$\int_0^\pi \cos ku \, du = 0,$$

ält man

$$\int_0^\pi f(u) \, du = \pi A_0,$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(u) \, du.$$

Zur Bestimmung der andern Coefficienten machen wir von de el Gebrauch

$$\int_0^\pi \cos ku \cos nu \, du = \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos(k-n)u \, du + \int_0^\pi \cos(k+n)u \, du \right) \\ = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi, & \text{wenn } k = n \\ 0, & \text{,, } k \neq n. \end{cases}$$

Multiplicirt man 1. mit $\cos ku \, du$ und integirt zwischen den Gren o erhält man hiernach

$$\int_0^\pi f(u) \cos ku \, du = \frac{1}{2} \pi A_k,$$

mithin

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(u) \cos ku \, du.$$

urch ein ähnliches Verfahren erhält man die Coefficienten der

$$f(u) = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \dots$$

ultiplicirt man beide Seiten mit $\sin ku \, du$ und integirt zw en 0 und π , indem man dabei von der Formel Gebrauch mach

$$\int_0^{\pi} \sin ku \sin nu \, du =$$

=

so erhält man

$$\int_0^{\pi}$$

und daher

5.

B

4. Hierbei ist vorausgesetzt

$$1. \quad f(u) = A_0 + A_1$$

$$2. \quad f(u) = B_1 \sin u +$$

zulässig sind, und unter die
worden. Es ist nun noch zu
 $f(u)$ haben muss, um in eine
Reihe 1. oder 2. entwickelbar

Um diese Frage zu entscheiden
aus 1. und 2. hervorgehen, v
bei dem Gliede mit dem Index

$$S_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(v) \, dv \right]$$

3.

$$+ \int_0^{\pi} f(v) \cos v \, dv$$

$$\Sigma_n = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} f(v) \sin v \, dv \right]$$

4.

$$+ \int_0^{\pi} f(v) \sin v \, dv$$

Vereinigt man alle Integrale

$$5. \quad S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(v) (1 + 2 \cos v) \, dv$$

$$6. \quad \Sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(v) (2 \sin v \sin u +$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R_1 = \cos(v - u) + \cos v$$

$$R_2 = \cos(v + u) + \cos v$$

so erhält man

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(v) (1 + R_1 + R_2) \, dv$$

und die FOURIER'schen

und R_2 lassen sich

$$= \cos 4a + \dots + \cos$$

mit $2 \sin \frac{1}{2} a$, und macht in jedem Gliede von der Formel (

$$2 \sin \frac{1}{2} a \cdot \cos ka = \sin (k + \frac{1}{2} a) - \sin (k - \frac{1}{2} a)$$

erhält man sofort

$$2 \sin \frac{1}{2} a (\cos a + \cos 2a + \dots + \cos na) = \sin \frac{1}{2} a - \sin \frac{1}{2} a + \sin \frac{3}{2} a - \sin \frac{3}{2} a + \dots + \sin (n + \frac{1}{2} a)$$

Hieraus folgt

$$\cos a + \cos 2a + \dots + \cos na = -\frac{1}{2} + \frac{\sin (n + \frac{1}{2} a)}{2 \sin \frac{1}{2} a}$$

Daher ist

$$R_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (v-u)}{2 \sin \frac{1}{2} (v-u)}, \quad R_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{1}{2} (v-u)}{2 \sin \frac{1}{2} (v-u)}$$

und schliesslich

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(v) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (v-u)}{\sin \frac{1}{2} (v-u)} dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(v) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (v-u)}{\sin \frac{1}{2} (v-u)} dv$$

$$\Sigma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(v) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (v-u)}{\sin \frac{1}{2} (v-u)} dv - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(v) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (v-u)}{\sin \frac{1}{2} (v-u)} dv$$

In diesen Gleichungen lassen wir nun n unendlich und Σ_n sich bestimmten endlichen Grenzen nähern und v gegebenenfalls sind, das hängt davon ab, was aus den beid

$$\int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (v-u)}{\sin \frac{1}{2} (v-u)} dv \quad \text{und} \quad \int_0^\pi f(v) \frac{\sin \frac{1}{2} (v-u)}{\sin \frac{1}{2} (v-u)} dv$$

wird, wenn n unendlich wächst.

Statt mit diesen beiden Integralen, werden wir uns Grenzwerte eines etwas einfacheren beschäftigen.

5. Grenzwert des Integrales $\int_0^a \frac{\sin mu}{u} F(u) du$, w

positiven ganzen Zahlen durchlaufend unendlich wächst, un

Wir theilen den Betrag ma in q ganze Vielfache von π der kleiner als π ist, so dass also

$$ma = q\pi + \rho, \quad a = \frac{q\pi + \rho}{m},$$

und zerlegen das gegebene Integral in

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u} F(u) du + \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{2\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u} F(u) du + \int_{\frac{2\pi}{m}}^{\frac{3\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u} F(u) du \\ & \dots + \int_{\frac{(q-1)\pi}{m}}^{\frac{q\pi}{m}} \frac{\sin mu}{u} F(u) du + \int_{\frac{q\pi}{m}}^{\frac{q\pi + \rho}{m}} \frac{\sin mu}{u} F(u) du \end{aligned}$$

und die FOURIER'schen

$$= 0, \quad q = \infty.$$

Der Grenzwert der Function unter dem ersten Integralzeichen

$$\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \frac{1}{\omega + 4\pi} - \dots \right)$$

ist für alle innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π liegen endlich. Denn für $\omega = 0$ ist zwar das erste Glied der Reihe unendlich gross, das Produkt mit dem verschwindenden $\sin \omega$ andern Bestandtheile des Produkts verschwinden mit $\sin \omega$.

Der Werth von ω enthält die Reihe

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \dots$$

Glieder, welche unbegrenzt abnehmen; daher hat die Reihe einen Grenzwert.

Hieraus folgt, dass der Grenzwert des Integrales

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \dots \right) \sin \omega d\omega$$

eine endliche bestimmte Grösse ist; wird dieselbe mit C bezeichnet, schliesslich

$$\lim \int_0^\pi \frac{\sin m\omega}{\omega} d\omega = C.$$

Wir werden sehr bald Gelegenheit finden C zu bestimmen.

6. Wir wenden uns nun zur Gleichung 2. der vorigen Nummer. Wir setzen voraus, dass $F(u)$ innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und π stetig und ununterbrochen abnimmt. Unter dieser Voraussetzung ist in dem Grenzwerte

$$\lim \int_0^p \frac{F\left(\frac{\omega + q\pi}{m}\right)}{\omega + q\pi} \sin \omega d\omega$$

der Zähler des hinter dem Integralzeichen stehenden Bruchs für m unendlich gross ist; da nun auch p eine endliche Grösse $< \pi$ ist, so folgt

$$\lim \int_0^p \frac{F\left(\frac{\omega + q\pi}{m}\right)}{\omega + q\pi} \sin \omega d\omega = 0.$$

Daher verbleibt

$$\lim \int_0^\pi \frac{\sin m\omega}{\omega} F(\omega) d\omega = \lim \int_0^\pi \left[\frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega + \pi}{m}\right)}{\omega + \pi} + \frac{F\left(\frac{\omega + 2\pi}{m}\right)}{\omega + 2\pi} - \dots \right] \sin \omega d\omega$$

Die Summe S der eingeklammerten Reihe wollen wir zunächst bilden, dass $F(\omega)$ innerhalb des Intervalles 0 und π stetig und ununterbrochen abnimmt. Alsdann enthält die Reihe S Glieder, welche Null abnehmen, und ist daher convergent. Die Summe S zwischen den Summen der ersten $2k$ und der ersten $2k + 1$ Glieder

$$S_{2k} = \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega + \pi}{m}\right)}{\omega + \pi} + \dots - \frac{F\left(\frac{\omega + (2k-1)\pi}{m}\right)}{\omega + (2k-1)\pi}$$

und

$$S_{2k+1} = \frac{F\left(\frac{\omega}{m}\right)}{\omega} - \frac{F\left(\frac{\omega + \pi}{m}\right)}{\omega + \pi} + \dots - \frac{F\left(\frac{\omega + (2k-1)\pi}{m}\right)}{\omega + (2k-1)\pi} + \frac{F\left(\frac{\omega + 2k\pi}{m}\right)}{\omega + 2k\pi}.$$

Wir können nun k unendlich gross voraussetzen, doch so, dass k zu m ein unendlich kleines Verhältniss hat; alsdann ist

$$\lim S_{2k} = F(0) \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \dots \right),$$

$$\lim(S_{2k+1} - S_{2k}) = \lim - \frac{F\left(\frac{\omega + 2k\pi}{m}\right)}{\omega + 2k\pi} = 0.$$

Da nun S zwischen S_{2k} und S_{2k+1} enthalten ist, so folgt

$$S = F(0) \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \pi} + \frac{1}{\omega + 2\pi} - \frac{1}{\omega + 3\pi} + \dots \right).$$

Hieraus ergibt sich

$$1. \quad \lim \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{u} F(u) du = C \cdot F(0).$$

Nimmt $F(u)$ von 0 bis α ab, ohne dabei immer positiv zu bleiben, so ist $F(u) - F(\alpha)$ immer positiv, und erfüllt daher die Voraussetzungen, für welche die Gleichung 1. gilt. Folglich ist

$$\lim \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{u} [F(u) - F(\alpha)] du = C [F(0) - F(\alpha)].$$

Da nun

$$2. \quad \lim \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{u} F(\alpha) du = C \cdot F(\alpha),$$

so folgt

$$\lim \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{u} F(u) du = C \cdot F(0),$$

so dass nun diese Gleichung für jede von 0 bis α abnehmende Function gilt.

Nimmt $F(u)$ von 0 bis α ununterbrochen zu, so nimmt $F(\alpha) - F(u)$ ununterbrochen ab; es ist daher

$$\lim \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{u} [F(\alpha) - F(u)] du = C \cdot [F(\alpha) - F(0)].$$

In Rücksicht auf 2. folgt hieraus

$$\lim \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{u} F(u) du = C \cdot F(0).$$

Wenn $F(u)$ von $u = 0$ bis $u = \alpha$ abwechselnd steigt und fällt, so kann man immer zwei Curven $F_1(u)$ und $F_2(u)$ angeben, von denen die erste innerhalb desselben Intervalls nur steigt, die zweite nur fällt; für welche $F_1(0) = F_2(0) = F(0)$; und dass ferner für jedes zwischen 0 und α gelegene u

$$F(u) = \frac{1}{2} [F_1(u) + F_2(u)].$$

URIER'schen Integrale.

und $u = \gamma$, so nehmen wir dann F_1 ; F_1 ist stetig steigend und be-

$$\frac{F_2(u)}{u} du$$

$$C + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin nu}{u} F(u) du$$

zwischen $u = 0$ und

$$F(0) \text{ und}$$

$$F(0)$$

$$= 0,$$

von verschiedenen $F(u)$ können, wie man leicht erkennt; wenn nur $F(u)$ innerhalb der Grenzen 0 bis a bleibt.

Um die Constante C zu bestimmen, wird man $F(u)$ so wählen, dass das Integral direkt ausgeführt werden kann. Wir setzen $F(u) = u : \sin u$

$$\int_0^a \frac{\sin nu}{\sin u} F(u) du = \int_0^a \frac{\sin nu}{\sin u} du.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{\sin(2n+1)a}{\sin a} = 1 + 2(\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \dots + \cos 2na)$$

Setzen wir m ungerade voraus und nehmen $a = \frac{\pi}{2}$, so entsteht

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nu}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Da nun in unserem Falle $F(0) = 1$, so folgt

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

Daher ist für jede innerhalb der Integrationsgrenzen endlich Function $F(u)$ und für ein positives a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin nu}{u} F(u) du = \frac{\pi}{2} F(0).$$

7. Aus dem soeben gewonnenen Grenzwerthe ergibt sich nun auch der Grenzwert des Integrales

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{\sin u} f(u) du$$

durch die Substitution

$$F(u) = \frac{u}{\sin u} f(u).$$

Dieselbe ist zulässig, sobald $f(u)$ innerhalb der Grenzen 0 und α endlich bleibt und α kleiner als π ist. Man erhält

$$1. \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{\sin u} f(u) du = \frac{\pi}{2} f(0), \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Liegen α und β zwischen 0 und π , so ist

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin mu}{\sin u} f(u) du = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\beta} \frac{\sin mu}{\sin u} f(u) du - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\alpha} \frac{\sin mu}{\sin u} f(u) du.$$

Daher folgt

$$2. \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin mu}{\sin u} f(u) du = 0.$$

Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, die in No. 4 abgebrochene Untersuchung zu Ende zu führen. Es handelte sich dort um die Grenzwerthe der beiden Integrale

$$J_1 = \int_0^{\pi} f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(v-u)}{\sin \frac{1}{2}(v-u)} dv \quad \text{und} \quad J_2 = \int_0^{\pi} f(v) \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)(v+u)}{\sin(v+u)} dv.$$

Setzt man in dem ersten $v-u=2w$, in dem zweiten $v+u=2w$, so erhält man

$$J_1 = 2 \int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{\pi-u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u) dw, \quad J_2 = 2 \int_{\frac{u}{2}}^{\frac{\pi+u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-u) dw.$$

Unter der Voraussetzung $0 < u < \pi$ zerlegen wir weiter

$$J_1 = 2 \int_{-\frac{u}{2}}^0 \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u) dw + 2 \int_0^{\frac{\pi-u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u) dw.$$

Für das zweite Integral ergibt sich nach 1. sofort

$$\int_0^{\frac{\pi-u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u) dw = \frac{\pi}{2} f(u).$$

Im ersten ersetzen wir w durch $-w$ und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{u}{2}}^0 \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w+u) dw = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(u-2w) dw = \frac{1}{2} \pi f(u).$$

u).

stetig, so i

beiden Bestandtheilen von J_1 sofort erkennt, für diesen We

$$J_1 = \pi[f(u-0) + f(u+0)],$$

wenn man mit $f(u-0)$ und $f(u+0)$ die Grenzwerte $f(u-x)$ und $f(u+x)$ erreichen, wenn die positive Zahl abnimmt.

Für $u=0$ fallen die Grenzen des ersten Theiles von J_1 verschwindet daher und es bleibt

$$J_1 = \pi f(+0), \text{ wenn } u=0.$$

Für $u=\pi$ fallen die Grenzen des zweiten Theils zusammen

$$J_1 = \pi f(\pi-0), \text{ wenn } u=\pi.$$

Das Integral J_2 verschwindet nach 2., sobald

$$0 < u < \pi;$$

ist $u=0$, so ergibt sich

$$J_2 = \pi f(+0).$$

Der Fall $u=\pi$ bedarf aber noch einer besonderen Unterfalle ist

$$J_2 = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-\pi) dw$$

Setzt man nun $w = \pi - x$, so erhält man

$$J_2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(\pi-x) dx.$$

Daher ist

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(2w-\pi) dw = \frac{\pi}{2} f(\pi)$$

Sollte $f(u)$ an der Stelle $u=\pi$ discontinuirlich sein, so wird, für $f(\pi)$ in dieser Gleichung $(\pi-0)$ zu nehmen.

Führt man diese Ergebnisse in No. 5, 7. und 8. ein, so erhält man die beiden Sätze*): Die periodische unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \dots$$

in welcher

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(v) dv, \quad A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(v) \cos kv$$

und $f(v)$ eine innerhalb der Integrationsgrenzen stetige Function ist, hat für jeden Werth von u von 0 bis π beider Grenzen die Summe $f(u)$, sobald $f(u)$ continuirlich ist. Bei Unterbrechungen der Continuität, so dass für gewisse Werthe von u die Grenzwerte $f(u-0)$ und $f(u+0)$ existiren, so ist die Summe $\frac{1}{2}(f(u-0) + f(u+0))$.

*) LEJEUNE-DIRICHLET, Crelle, Bd. 4, pag. 94. SCHLOEMILCH, Comptes Rendus, t. 123.

en sind, so ergibt für diese Werthe von u die Summe der arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerte. periodische unendliche Reihe

$$B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \dots,$$

r

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(v) \sin kv \, dv,$$

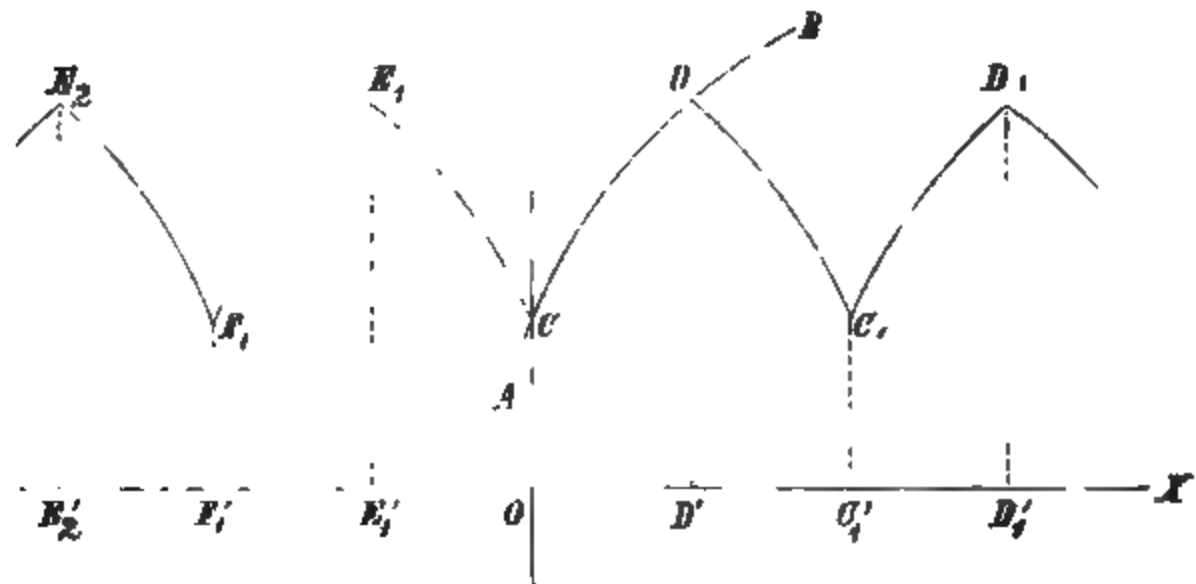
ine innerhalb 0 und π endliche Function ist, hat für jeden n u von 0 bis π , ausschliesslich beider Grenzen, den Werth $f(u)$ und $f(u)$ continuirlich ist; an Stellen, wo $f(u)$ discontinuirlich ist, giebt sie das arithmetische Mittel aus $f(u-0)$ und $f(u+0)$; an den Grenzen $u=0$ und $u=\pi$ verschwindet die Reihe.

Läuft u die Werthe von π bis 2π , so nimmt die Cosinusreihe in umgekehrter Folge dieselben Werthe, die Sinusreihe die entgegengesetzten gleichen an 0 bis π ; innerhalb der Intervalle für u von 2π bis 4π , 4π bis 6π sowie -6π bis 0, -4π bis -2π , -6π bis -4π u. s. w. wiederholt sich für beide Reihen die Werthe des Intervalles 0 und 2π .

3. Die Curve $y = f(x)$ und $OD' = D'C_1' = C_1'D'_1 + \dots = E_1'O = E_2'F_1' = \dots = \pi$, so fällt die Curve

$$Y = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + \dots$$

Y



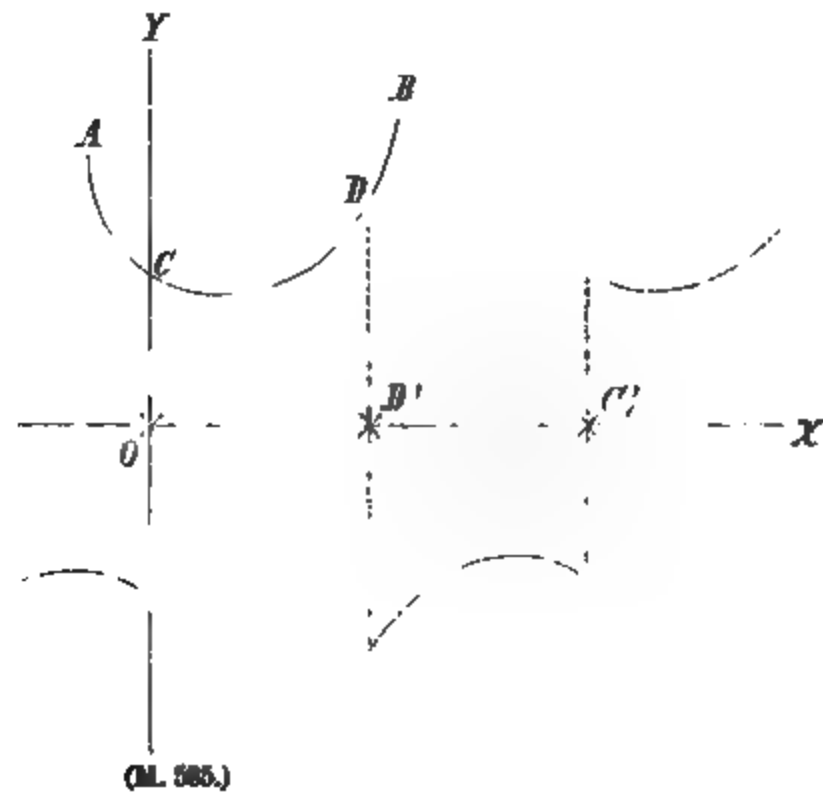
(M. 534.)

der Punkte C und D mit der Curve AB zusammen; ihr weiterer Verlauf aus den Bögen DC_1 , C_1D_1 , D_1C_2 , \dots , CE_1 , E_1F_1 , F_1E_2 , \dots , je zwei benachbarte zu der gemeinsamen Ordinate symmetrisch liegende Curve (Fig. 535)

$$Y = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \dots$$

halb der Punkte C und D ebenfalls mit AB zusammen, hat aber in zwei isolirte Punkte, ebenso in C'_1 , D'_1 , C'_2 , \dots sowie in E'_1 , F'_1 , E'_2 , \dots , D'_1 , $D'_1C'_1$, $C'_1D'_1$, \dots , OE_1 , $E'_1F'_1$, \dots gehörenden Curvenbögen ohne vorherige Umwendung und liegen abwechselnd auf verschiedenen Abscissenachsen.

Wenn wir zu Anwendungen übergehen, wollen wir noch in Kürze entscheiden, ob, bez. unter welchen Umständen es gestattet ist, aus den beiden



$$+ A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \dots$$

$$\sin u + B_2 \sin 2u + \dots$$

ten neue Gleichungen abzuleiten.

inusreihe ergibt

$$u - 2A_2 \sin 2u - 3A_3 \sin 3u \dots$$

en, so muss $f'(u)$ in eine Sinusreihe entwickelt

$f'(u)$ endlich sein von 0 bis π und die Coefficienten

$$(v) \sin kv dv = -kA_k.$$

n erhält man

$$= f(v) \sin kv - k \int f(v) \cos kv dv.$$

0 bis π erstreckt, so folgt

$$kv dv = -\frac{2k}{\pi} \int_0^\pi f(v) \cos kv dv.$$

die Gleichung 3. erfüllt. Die beiden Seiten
daher differentiirt werden, sobald $f'(u)$
bis π endlich bleibt.

man

$$+ 2B_2 \cos 2u + 3B_3 \cos 3u + \dots$$

ner Cosinusreihe entwickelbar sein, deren erstes
ort, dass $f(u)$ von 0 bis π endlich bleibt, dass das
ed der Reihe ergibt,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f'(u) du.$$

$$f'(u) \cos ku du = kB_k.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f$$

ergibt sich $f(\pi) = f(0)$.

Das die übrigen Coeffici
Integration

$\int f'(u) \cos ku \, du$
mithin ist

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(u) \cos ku$$

Die beiden Seiten d
rentiiren, wenn $f'(u)$ inn
wenn $f(\pi) = f(0) = 0$.

9. Entwicklung eini

A. Durch die Sinusreih

Setzt man $f(x) = 1$, s

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kv \, dv$$

und daher

$$\frac{\pi}{4} = \sin x +$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$\frac{\pi}{4} = 1$$

B. Für die Entwicklun

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx$$

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos \right.$$

Hierfür kann man setze

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos$$

An den Grenzen der G
mässig

$$\frac{\pi^2}{8} =$$

RIER'sche

entsteht

$$\frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi}$$

nn k u

, k g

$$\frac{x}{\pi} + \frac{\sin x}{\pi}$$

beide

das Vorzeichen; die Gleichung gilt also ebensoweit für negativ als für positiv x . Man hat daher für dieselbe die Gültigkeitsgrenze

$$-\pi < x < \pi.$$

bemerken, dass dieselben Gültigkeitsgrenzen da, wo $\sin x$ von x besteht, die für $x = 0$ verschwindet und

Setzt man in der Cosinusreihe $f(x) = \cos \mu x$, wobei μ eine beliebige reelle Zahl sein mag, so ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \mu x dx = \frac{\sin \mu \pi}{\mu \pi},$$

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \mu x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos (k + \mu)x + \cos (k - \mu)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (k + \mu)x}{k + \mu} + \frac{\sin (k - \mu)x}{k - \mu} \right]_0^\pi = (-1)^k \frac{\sin \mu \pi}{\mu \pi} \end{aligned}$$

es ergibt sich

$$\frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\cos \mu x}{\sin \mu \pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2 - \mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - \mu^2} - \dots$$

Um $f(x) = \sin \mu x$ in eine Sinusreihe zu entwickeln, so ist

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \mu x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos (k - \mu)x - \cos (k + \mu)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (k - \mu)x}{k - \mu} - \frac{\sin (k + \mu)x}{k + \mu} \right]_0^\pi = (-1)^k \frac{\sin \mu \pi}{\mu \pi} \end{aligned}$$

es ist

$$\frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\sin \mu x}{\sin \mu \pi} = \frac{\sin x}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - \mu^2} - \dots$$

Setzt man in C und D die Substitutionen $x=0$, $x=\pi$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{1}{\sin \mu \pi} &= \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{1^2 - \mu^2} - \frac{1}{2^2 - \mu^2} + \frac{1}{3^2 - \mu^2} - \dots \\ - \frac{\pi}{2\mu} \cdot \cot \mu \pi &= \frac{1}{1^2 - \mu^2} + \frac{1}{2^2 - \mu^2} + \frac{1}{3^2 - \mu^2} + \dots \\ \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \mu \pi} &= \frac{1}{1^2 - \mu^2} - \frac{3}{3^2 - \mu^2} + \frac{5}{5^2 - \mu^2} - \dots \end{aligned}$$

die für jeden Werth von μ gelten.

E. Für die Function $x \sin x$ hat

$$\int_0^{\pi} x \sin x \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin$$

$$\int_0^{\pi} x \sin(k \pm 1)x dx = \left[\frac{-x}{0} \right]$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x \cos kx dx$$

Auf den Fall $k = 1$ ist diese Fo

$$\int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx =$$

Fügt man hierzu noch

$$\int_0^{\pi} x \sin$$

so gewinnt man die Entwicklung

$$\frac{1}{2} x \sin x = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} -$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung wechselt; daher gilt diese Entwicklu

— 1

Dieselben Gültigkeitsgrenzen für ein, die für entgegengesetzt gleiche

F. Bekanntlich ist (§ 5, No. 9)

$$\int_0^{\pi} e^{\mu x} \cos kx dx = \frac{e^{\mu}}{\mu^2 +}$$

$$\int_0^{\pi} e^{\mu x} \sin kx dx = \frac{e^{\mu}}{\mu^2 +}$$

Daher hat man

$$\int_0^{\pi} e^{\mu x} \cos kx dx =$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\mu x} \cos kx dx =$$

$$\int_0^{\pi} e^{\mu x} \sin kx dx =$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\mu x} \sin kx dx =$$

Mit Hülfe dieser Integrale erhä

$$\frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{e^{\mu} - e^{-\mu}} = \frac{1}{2\mu^2 - 1}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{e^{\mu} + e^{-\mu}} = \frac{\sin x}{1^2 + \mu^2}$$

10. Es ist nicht nöthig, dass die Sinusreihe verwandelt wird, innerhalb

vielmehr die Curve CD (Fig. 534) aus
n jedes einer andern Gleichung ent-

spricht. Gilt

von 0 bis x_1 die Function $f_1(x)$,
" x_1 " x_2 " " " $f_2(x)$,
" x_2 " x_3 " " " $f_3(x)$,
"
" x_{r-1} " π " " " $f_r(x)$,

so hat man jedes bei der Berechnung der Coefficienten $A_0 A_1 A_2 \dots B_1 B_2 \dots$
vorkommende von 0 bis π erstreckte Integral in folgender Weise zu zerlegen

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = \int_0^{x_1} f_1(x) \cos kx dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \cos kx dx \\ + \int_{x_2}^{x_3} f_3(x) \cos kx dx + \dots + \int_{x_{r-1}}^{\pi} f_r(x) \cos kx dx.$$

und die einzelnen Theilintegrale zu berechnen.

Um hierfür ein einfaches Beispiel zu haben, wollen wir annehmen, es soll
 $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}\pi$ eine beliebige, endlich bleibende Function $\varphi(x)$ und von
bis π die Function $\varphi(\pi - x)$ gelten; für $x = \frac{1}{2}\pi$ ergeben beide Functionen
gemeinsamen Werth $\varphi(\frac{1}{2}\pi)$, so dass an der Uebergangsstelle keine Unter-
chung der Continuität eintritt. Für die Entwicklung in eine Sinusreihe hat man

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin kx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x) \sin kx dx.$$

Substituiert man im zweiten Integrale $\pi - x = \xi$, so erhält man

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x) \sin kx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi) \sin k(\pi - \xi) d\xi = -\cos k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi.$$

Da bei bestimmten Integralen auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen
nichts ankommt, so kann man hier ξ wieder durch x ersetzen, und erhält

$$B_k = 0, \text{ wenn } k \text{ gerade,} \\ = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin kx dx, \text{ wenn } k \text{ ungerade.}$$

Daher hat man die Entwicklung

$$\varphi(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + B_5 \sin 5x + \dots,$$

obei
$$B_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin kx dx,$$

id x auf den Spielraum von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ angewiesen ist.

Setzt man $\varphi(x) = x$, so erhält man

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2k+1)x dx = \frac{4}{\pi} \left[-\frac{x \cos(2k+1)x}{2k+1} + \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} \right] \\ = \frac{4}{\pi} \cdot \sin \frac{1}{2}(2k+1)\pi \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Daher hat man in Uel

$$\frac{\pi}{4} \cdot x = \sin:$$

11. Nimmt man ferner von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ die Function $\varphi(x) = x^2$ von $\frac{1}{2}\pi$ bis π aber $\varphi(x) = 0$, so hat die Curve CD an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ eine Unterbrechung der Continuität, es ist nämlich

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 0.$$

Entwickelt man für diese Function die Cosinusreihe, so erhält man, da die von $\frac{1}{2}\pi$ bis π erstreckten Theile der Coefficientenintegrale wegen $\varphi(x) = 0$ verschwinden

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{\pi^2}{24}, \\ \frac{\pi}{2} \cdot A_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos kx dx = \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx dx, \\ &= \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} + \frac{2x \cos kx}{k^2} - \frac{2 \sin kx}{k^3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \begin{cases} \frac{k^2 \pi^2 - 8}{4k^3} \sin \frac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ ungerade,} \\ \frac{\pi}{k^3} \cos \frac{k\pi}{2}, & \text{wenn } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Daher hat man die von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gültige Reihe

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{12} + \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3^3} + \frac{\cos 5x}{5^3} - \frac{\cos 7x}{7^3} + \dots \right) \\ &\quad - 2 \left(\frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \frac{\cos 8x}{8^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Setzen wir zur Prüfung dieser Entwicklung auf der rechten Seite $x = \frac{1}{2}\pi$, so muss sich das arithmetische Mittel aus $\varphi(\frac{1}{2}\pi - 0)$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi + 0)$, d. i. $\frac{1}{4}\pi^2$ ergeben. Wir erhalten, da die Cosinus aller ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ verschwinden,

$$\frac{\pi^2}{24} + 2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right).$$

Die eingeklammerte Reihe ist der vierte Theil von

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Bezeichnet man diese Summe mit S , so hat man

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right).$$

Der erste Theil der rechten Seite ist $\frac{1}{4}\pi^2$ (No. 9, B); der zweit daher hat man

$$\frac{3}{4} S = \frac{1}{4} \pi^2,$$

folglich ist

die FOURIER'sche

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5^2} +$$

$$= \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi}{1}$$

man man aus

$$A_0 \cos 2x + A_1 \cos 3x + B_2 \sin 3x$$

neue periodische Reihen ableiten, deren Gültigkeit nicht beschränkt ist.

Macht man in einer für $0 < x < a$ endlichen Function

$$x = \frac{ay}{\pi},$$

so erhält man

$$\varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right),$$

und diese Function von y ist endlich von $y = 0$ bis $y = \pi$ nach 1. und 2. entwickeln und erhält

$$3. \quad \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = A_0 + A_1 \cos y + A_2 \cos 2y + \dots$$

$$0 \leq y \leq \pi,$$

$$4. \quad \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) = B_1 \sin y + B_2 \sin 2y + B_3 \sin 3y + \dots$$

$$0 < y < \pi.$$

Die Coefficienten haben hier die Werthe

$$5. \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) dy, \quad A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) \cos ky dy.$$

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi\left(\frac{ay}{\pi}\right) \sin ky dy.$$

Substituiert man nun in 3., 4. und 5. wieder x für y ,

$$6. \quad \varphi(x) = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{a} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

$$0 \leq x \leq a, \quad A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a \varphi(x) dx, \quad A_k = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx.$$

$$7. \quad \varphi(x) = B_1 \sin \frac{\pi x}{a} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

$$0 < x < a, \quad B_k = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx.$$

13 Ist $F(x)$ eine beliebige, von $x = 0$ bis $x = a$ gegebene Function, theilt die Function $F(x) + F(-x)$ diese Eigenschaft und nimmt gleiche Werthe von x gleiche Werthe an; da auch der Cosinusreihe 6. zukommt, so gilt für diese Function noch zwischen den Grenzen 0 und $-a$. Für die Coeff

jedes
es er

1.

das 2
+ a

B

2.

;
schlie

3.

wobe

A_0 :

]

Func
Sinus
diese

!

Wert
solch
Reihe
 $f(x)$
Entw
entha



$f(x)$ durch beliebige endlich bleibende Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ fortsetzen (vergl. No. 10).

14. Die in No. 12 entwickelten Reihen gestatten eine werthvolle Anwendung auf das Problem der Umkehrung der Functionen*).

Dieses Problem besteht darin, y aus der Gleichung $x = \varphi(y)$ als Function von x , oder allgemeiner irgend eine Function $F(y)$ als Function von x auszudrücken.

$F(y)$ eine Function von x ist, so lässt sich $F(y)$ innerhalb gewisser durch eine Cosinusreihe ausdrücken

$$F(y) = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{a} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

$$0 < x < a.$$

Coefficienten sind

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a F(y) dx, \quad A_k = \frac{2}{a} \int_0^a F(y) \cos \frac{k\pi x}{a} dx.$$

Nach theilweise Integration folgt hieraus zunächst

$$A_0 = \frac{1}{a} \left[x F(y) \right]_0^a - \frac{1}{a} \int_{y_0}^{y_1} x F'(y) dy,$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi} \left[F(y) \sin \frac{k\pi x}{a} \right]_0^a - \frac{2}{k\pi} \int_{y_0}^{y_1} F'(y) \sin \frac{k\pi x}{a} dy,$$

= 0 und a die Werthe $y = y_0$ und y_1 entsprechen; hieraus folgt weiter

$$0 = F(y_1) - \frac{1}{a} \int_{y_0}^{y_1} \varphi(y) F'(y) dy, \quad A_k = - \frac{2}{k\pi} \int_{y_0}^{y_1} F'(y) \sin \frac{k\pi \varphi(y)}{a} \varphi(y) dy.$$

Bezüglich der Integrationsgrenzen ist hier Folgendes zu bemerken. Die nach x genommenen Coefficientenintegrale waren von 0 bis zu der positiven Zahl a genommen, und es war dabei vorausgesetzt, dass x von 0 bis a stetig wachse.

Will man nun x durch y ersetzen, so hat man zunächst die Gleichung

$$0 = \varphi(y)$$

aufzulösen; eine reale Wurzel β dieser Gleichung ist dann die der Grenze $x = 0$ entsprechende Grenze für y . Im Allgemeinen wechselt $\varphi(y)$ das Zeichen, wenn y durch den Werth β hindurchgeht; damit nun x von 0 bis zu der noch unbestimmten oberen Integralgrenze wachse, muss man y vom Werthe $y = \beta$ zunehmen oder abnehmen lassen, je nachdem $\varphi(y)$ von $\varphi(\beta) = 0$ aus mit y zugleich wächst oder abnimmt, und darf die Integration nach y nicht weiter ausdehnen, als bis zu solchen Werthe von y , für welchen das Wachsthum von $\varphi(y)$ in eine Abnahme übergeht, d. i. bis zu dem Werthe $y = \beta_1$, welchem das dem Werthe β nächst liegende Maximum der Function $\varphi(y)$ zugehört. Somit ist die obere Grenze a der Reihe 1. nicht ganz willkürlich, sondern a darf größer sein, als $\varphi(\beta_1)$.

Man nehme nun b eine zwischen β und β_1 liegende Zahl, so hat man in den obigen Formeln a , y_0 , y_1 durch $\varphi(b)$, β , b zu ersetzen und gewinnt mithin

$$F(y) = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{\varphi(b)} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{\varphi(b)} + \dots$$

$$0 \leq x \leq \varphi(b).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a} \int_{-a}^a F(t) \left(\cos \frac{k\pi t}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sin \frac{k\pi t}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} \right) dt,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a} \int_{-a}^a F(t) \cos \frac{k\pi}{a} (t-x) dt.$$

amenzeichen stehende Function für entgegengesetzt gleiche k gleiche Werthe hat, so hat man

$$\sum_1^{\infty} = \sum_{-\infty}^{-1};$$

man kann die Summe daher nach dem Schema zerlegen

$$\sum_1^{\infty} = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{-1}.$$

Da ferner die Function für $k=0$ in $F(t)dt$ übergeht, so erhält man schliesslich die Zusammenfassung

$$2. \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{a} \int_{-a}^a F(t) \cos k \frac{\pi}{a} (t-x) dt.$$

Ist a eine sehr grosse Zahl, so werden die mit Cosinus multiplicirten Glieder der Reihe 1. nahezu constant, während die Glieder des zweiten Theils wegen der Sinus gegen den ersten Theil unbedeutend klein werden. Da nun die Reihe nach wie vor die Function $F(x)$ ausdrückt, so folgt, dass die Anzahl der Glieder, durch die man eine hinlängliche Annäherung erzielt, im Verhältniss zu a sehr gross sein muss. Lässt man in 2. die Zahl a unendlich wachsen, so hat man daher daran festzuhalten, dass die äussersten Grenzen für k zu dem unendlichen a ein unendlich grosses Verhältniss haben.

Ist a unendlich, so ist $\pi : a$ unendlich klein. Bezeichnet man $k\pi : a$ durch u , so wächst u nach der über k soeben gemachten Bemerkung von $-\infty$ bis $+\infty$, die Grösse $\pi : a$ ist ein verschwindend kleiner Theil von u und kann mit Δu bezeichnet werden.

Damit geht aus 2. hervor

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos u (t-x) dt \right] \Delta u.$$

Aus dem Begriffe des bestimmten Integrals folgt, dass man hierfür setzen kann

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos u (t-x) du dt.$$

Hierbei gilt die von den periodischen Reihen her bekannte Beschränkung, $F(x)$ innerhalb des ganzen realen Gebiets nicht unendlich gross werden darf; ferner, dass das Doppelintegral

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos u (t-x) dt du$$

solche Werthe von x , für welche $F(x-0)$ von $F(x+0)$ verschieden sind, arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerte ergibt.

$$\int_{-\infty}^0 F(t) \sin ut dt = - \int_0^{\infty} F(t) \sin ut dt, \quad \int_{-\infty}^0 F(t) \cos ut dt = \int_0^{\infty} F(t) \cos ut dt$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut dt = 2 \int_0^{\infty} F(t) \cos ut dt.$$

Demnach ist schliesslich

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(t) \cos xu \cos ut du dt, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

Da das Produkt $\cos xu \cos ut$ unverändert bleibt, wenn u das Zeichen wechselt, so kann man hierfür noch einfacher setzen

$$2. \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(t) \cos xu \cos ut du dt, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

Wählt man hier wieder die Function gleich Null von $x = 0$ bis $x = b$, willkürlich von b bis β , und gleich Null von β bis ∞ , so erhält man

$$3. \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_b^{\beta} F(t) \cos xu \cos ut du dt, \quad 0 < b < x < \beta.$$

Für die Grenzen ist

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_b^{\beta} F(t) \cos bu \cos ut du dt = \frac{1}{2} F(b), \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_b^{\beta} F(t) \cos \beta u \cos ut du dt = \frac{1}{2} F(\beta);$$

ist $0 < x < b$, oder $b < x$, so ist

$$\int_0^{\infty} \int_b^{\beta} F(t) \cos xu \cos ut du dt = 0.$$

17. Nimmt man $F(x)$ willkürlich für das Gebiet 0 bis ∞ , setzt aber die Function für negative x so fort, dass $F(-x) = -F(x)$, so hat man

$$\int_{-\infty}^0 F(t) \cos ut dt = - \int_0^{\infty} F(t) \cos ut dt, \quad \int_{-\infty}^0 F(t) \sin ut dt = \int_0^{\infty} F(t) \sin ut dt,$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos ut dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin ut dt = 2 \int_0^{\infty} F(t) \sin ut dt.$$

Die Gleichung No. 16, 1. ergibt daher

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(t) \sin xu \sin ut du dt, \quad 0 < x < \infty.$$

Da das Produkt $\sin xu \sin ut$ für entgegengesetzt gleiche u gleiche Werthe hat, so hat man einfacher

$$1. \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(t) \sin xu \sin ut du dt, \quad 0 < x < \infty.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos ut \, dt = \left[\frac{e^{-t} \sin ut}{u} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin ut \, dt,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sin ut \, dt = - \left[\frac{e^{-t} \cos ut}{u} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos ut \, dt.$$

Hieraus ergibt sich leicht

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos ut \, dt = \frac{1}{1+u^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \sin ut \, dt = \frac{u}{1+u^2}.$$

Daher gewinnt man aus No. 16, 2 und No. 17, 2 die Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xu}{1+u^2} \, du = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin xu}{1+u^2} \, du = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x > 0.$$

Ersetzt man hier u durch $\frac{u}{\alpha}$ und x durch αx so erhält man die Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xu}{\alpha^2 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0, \quad x \geq 0,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin xu}{\alpha^2 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0, \quad x > 0.$$

Bemerkung. Die auf pag. 673 gegebene Herleitung des Resultates 3. stimmt im Wesentlichen mit FOURIER's Deduction überein; sie gestattet aber einige Zweifel und bedarf daher einer genaueren Untersuchung, bezüglich deren wir auf SCHLOEMILCH's »Compendium der höheren Analysis«, Bd. II, verweisen.

AB gleich und gleichgerichtet mit bi macht. Demnach sind die Strecken OA_1 , OA_2 , OA_3 , OA_4 der Reihe nach die Repräsentanten der complexen Zahlen

$$5 + 3i, \quad -5 + 3i, \quad -5 - 3i, \quad 5 - 3i,$$

und die Punkte A_1 , A_2 , A_3 , A_4 werden als die Zahlpunkte $\pm 5 \pm 3i$ bezeichnet.

Ist P' die Projection von P auf

OX und ist $OP' = x$, $P'P = y$,

so ist P der Zahlpunkt

$$x + yi.$$

Ferner ist

$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei wir die Wurzel positiv rechnen wollen; wird XOP mit φ bezeichnet, so ist

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

$$x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Die Grössen r und φ werden als Modul und Amplitude der complexen Zahl $x + iy$ bezeichnet.

Die complexen Zahlen

$$\cos \varphi + i \sin \varphi,$$

deren Modul gleich der Einheit

ist, bezeichnet man als complexe Einheiten; die Einheitspunkte liegen auf einem Kreise, der um den Nullpunkt mit der Längeneinheit als Halbmesser beschrieben ist. Zahlen $a + ib$, für welche a und b dasselbe Verhältniss haben, besitzen dieselbe Amplitude oder um π verschiedene Amplituden; sie liegen daher auf derselben durch den Nullpunkt gehenden Geraden.

3. Die geometrischen Definitionen der Summe und Differenz übertragen wir nun auch auf complexe Zahlen. Ist PR gleich OQ und gleichgerichtet, so setzen wir

$$OR = OP + OQ;$$

und ist PS gleich OQ , aber von entgegengesetzter Richtung, so ist

$$OS = OP - OQ.$$

Werden durch die Punkte P und Q die Zahlen $a + bi$, $c + di$ repräsentirt, so ist daher

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

4. Dem Principe der Continuität der Rechenregeln folgend, wird das Produkt complexer Zahlen durch die Gleichung defnirt

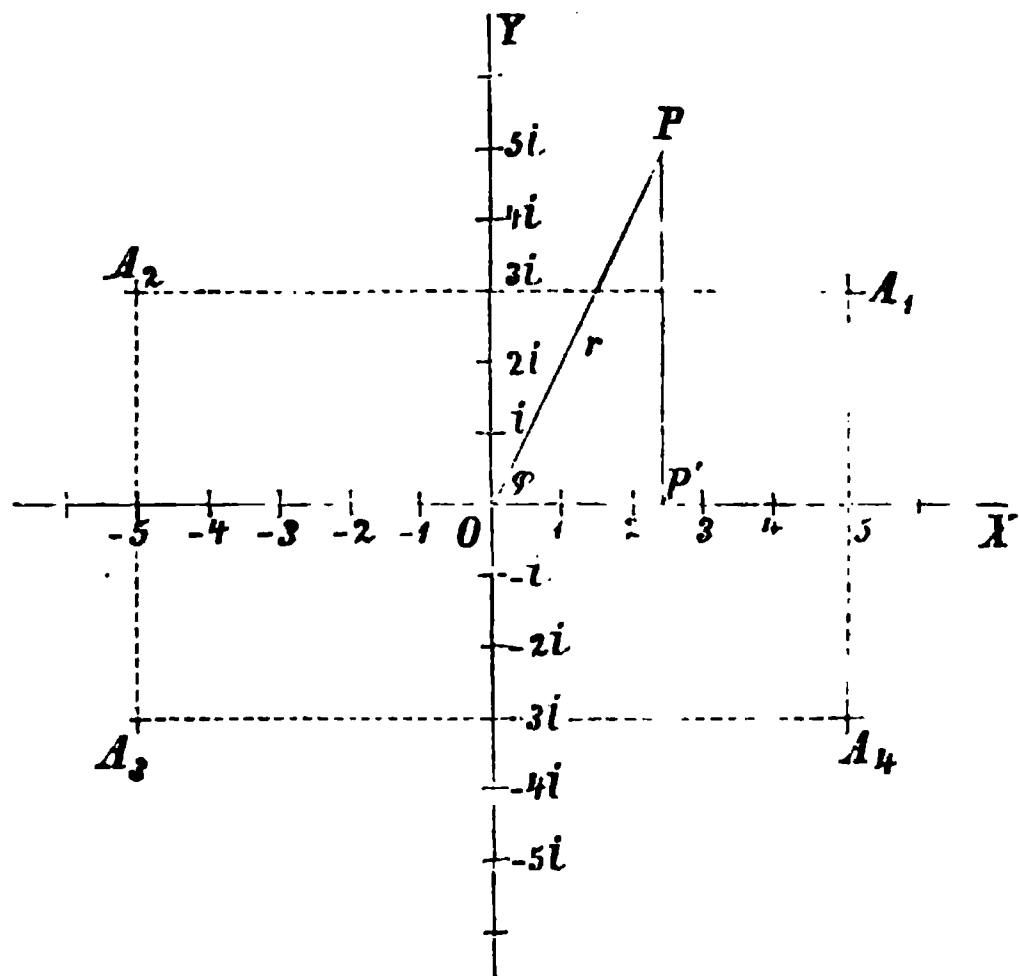
$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bc \cdot i + ad \cdot i + bd \cdot i \cdot i = ac - bd + (bc + ad)i.$$

Ist $a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $c + di = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, so ist der Modul R des Produkts

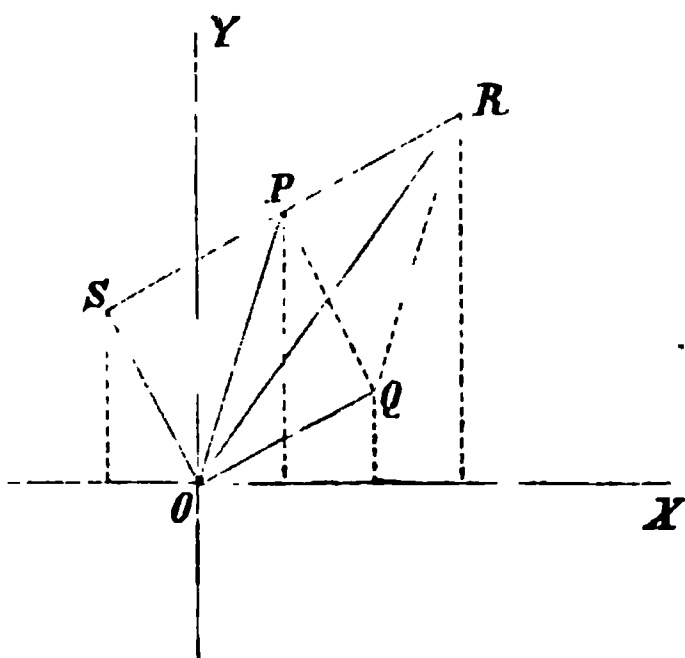
$$R = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} = \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + b^2 c^2 + a^2 d^2} \\ = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = r \cdot r_1.$$

Für die Amplitude Φ des Produkts hat man

$$\cos \Phi = \frac{ac - bd}{R} = \frac{a}{r} \cdot \frac{c}{r_1} - \frac{b}{r} \cdot \frac{d}{r_1} = \cos(\varphi + \varphi_1),$$



(M. 536.)



(M. 537.)

$$p = a_n + \rho_n,$$

wobei ρ_n sich der Grenze Null nähert, wenn n unendlich wächst.

Wendet man die Regel $z^{a+p} = z^a \cdot z^p$ auch auf ein irrationales p an, so ist

$$z^p = r^{a_n} (\cos a_n \varphi + i \sin a_n \varphi) \cdot z^{\rho_n}.$$

Geht man zur Grenze $n = \infty$ über, so verschwindet ρ_n ; da nun

$$\lim z^{\rho_n} = 1, \quad \lim a_n = p,$$

so folgt

$$z^p = r^p (\cos p \varphi + i \sin p \varphi).$$

Die Regel für die Potenz einer complexen Zahl gilt also auch für irrationale Exponenten. Die Ausdehnung des Begriffes Potenz auf complexe Exponenten wird erst im Verlaufe späterer Betrachtungen gewonnen werden.

6. Das bisher Mitgetheilte gestattet uns, den Begriff einer algebraischen Function einer complexen Variablen zu bilden. Unter einer ganzen rationalen algebraischen Function n ten Grades der complexen Variablen z versteht man die Grösse

$$s = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

wobei $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ gegebene reale oder complexe Zahlen sind. Unter einer algebraischen Function von z im weitesten Sinne versteht man eine Grösse s , deren Zusammenhang mit z durch das Verschwinden einer in Bezug auf s und z ganzen und rationalen Function hergestellt wird. Eine algebraische Function wird also durch eine Gleichung von der Form definiert

$$\varphi(s, z) = A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \dots + A_{n-1} s + A_n = 0,$$

wo $A_0, A_1 \dots A_n$ ganze rationale Functionen der Variablen z sind. Man sieht hieraus sofort: Ist s eine algebraische Function von z , so ist auch z eine algebraische Function von s .

7. Ist die Gleichung

$$\varphi(s, z) = 0$$

in Bezug auf s vom Grade n , so gehören zu jedem Werthe von z n im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe von s .

Dieser algebraische Fundamentalsatz wird in den Elementen der Algebra gewöhnlich nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Coefficienten $A_0, A_1 \dots A_n$ reale Zahlen sind; da wir ihn im Folgenden ganz allgemein zu verwenden haben, so mag ein von der genannten Beschränkung befreiter Beweis hier statt haben.

Man denke sich für z in die Function $\varphi(s, z)$ einen gegebenen Werth $a + bi$ eingesetzt. Setzt man nun für s einen veränderlichen Werth

$$s = \xi + \eta i,$$

so erhält man

$$\varphi(s) = M + Ni;$$

hierbei sind M und N Functionen von ξ und η . Das Quadrat des Modul von $\varphi(s)$, $M^2 + N^2$, kann nicht negativ werden, muss also für einen oder mehr als einen Werth von s einen Minimalwerth erhalten, der Null oder positiv ist; die diesem Minimalwerthe zugehörigen Werthe von M, N, ξ und η seien M_0, N_0, ξ_0, η_0 . Es sei nun ρ eine Wurzel einer Einheit, und ω eine reale Zahl; man ersetze in $\varphi(s)$ die Zahl s durch $\xi_0 + i\eta_0 + \rho\omega$ und erhalte dadurch

$$\varphi(\xi_0 + i\eta_0 + \rho\omega) = P + Qi.$$

Dieser Ausdruck ist in Bezug auf $\rho\omega$ eine ganze Function n ten Grades; er enthält in jedem Falle das Glied $\rho^n \omega^n$; ob auch die Glieder mit $\rho\omega, \rho^2 \omega^2, \rho^3 \omega^3 \dots$

$$+ B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \dots + B_{n-1}$$

Jede ganze algebraische Function n ten Grades einer Variablen ist das Produkt von n linearen Functionen.

Der soeben gegebene Satz ist von dem folgenden nicht verschieden: Jede Gleichung n ten Grades mit einer Unbekannten hat n Wurzeln, von denen mehrere zusammenfallen können.

Aus der Zerlegung der Function n ten Grades $\varphi(s)$ in n lineare Factoren erkennt man zugleich, dass die Gleichung $\varphi(s) = 0$ nicht mehr als n reale oder complexen Wurzeln haben kann.

Wenn eine Gleichung n ten Grades nur reale Coefficienten hat und eine complexe Wurzel zulässt, so hat sie bekanntlich auch die conjugirt complexe Wurzel. Dieser Satz gilt für Gleichungen mit complexen Coefficienten nicht. Man übersieht dies sofort, wenn man in der Gleichung n ten Grades

$$(s - a)(s - b) \dots (s - n) = 0$$

für die n Grössen $a, b, c \dots n$ beliebig gewählte reale oder complexe Zahlen setzt; denn man erhält dann eine Gleichung n ten Grades für s , deren complexe Wurzeln in keiner Weise von einander abhängig sind.

8. Wir schliessen hieran eine Bemerkung über die Zerlegung einer echt gebrochenen Function in Partialbrüche.

In § 3, No. 2 ist die Zerlegung einer echt gebrochenen realen Function gezeigt worden, unter der Voraussetzung, dass der Nenner keine mehrfachen Factoren hat. Das dort gewonnene Resultat

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x - \xi_1} + \frac{A_2}{x - \xi_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \xi_n}, \quad A_k = \frac{\psi(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)},$$

ist sich ohne Weiteres auf den Fall complexer Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ausdehnen. Dasselbe gilt von der Zerlegungsmethode § 3, No. 3, für den Fall, dass $\varphi(x)$ mehrfache Factoren hat.

Die in § 3, No. 4 gegebene Methode für den Fall mehrfacher complexer Wurzeln hat bei complexen Functionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ keine Anwendung; es bewendet hier bei der in No. 3 gegebenen Zerlegung.

9. Alle weiteren Functionen, die wir betrachten, werden in bestimmter Weise aus algebraischen Functionen abgeleitet. Einige auf Functionen einer complexen Variablen bezügliche Sätze, die wir nun mittheilen wollen, gelten für alle diese Functionen unabhängig von ihrer besonderen Natur.

10. Bevor wir zu diesen Sätzen übergehen, muss noch eine andere wichtige Frage erledigt werden.

Die geometrische Darstellung einer realen Function $f(x)$ einer realen Variablen x erfolgt, indem man x als Abscisse und $f(x)$ als Ordinate am einfachsten in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme betrachtet; die Curve $y = f(x)$ giebt dann ein anschauliches, viele Untersuchungen wesentlich erleichterndes Bild des Functionsverlaufs. Eine dem entsprechende Darstellung complexer Functionen einer complexen Variablen ist offenbar nicht möglich; denn die complexe Variable ist nicht auf einer Geraden, sondern nur auf einem Gebiete zweier Dimensionen darstellbar, und eine Function derselben ist im Allgemeinen wieder complex (nur für einzelne Werthe real oder rein imaginär), also wieder von zwei Dimensionen. Um den Zusammenhang einer complexen Function mit der Variablen anschaulich zu machen, hat man folgenden Weg eingeschlagen.

Man verwendet zwei Ebenen, eine Variabelnebene und eine Functionsebene. Die Punkte der ersteren stellen die Werthe der Variablen dar;

100

100

1

tude von s und z die Grössen R, Φ, r, φ , so ist

$$R = \frac{1}{r}, \quad \Phi = -\varphi.$$

the von r entspricht ein constanter von R , d. i.:
punkt in der Variabelnebene entspricht ein Kreis um

den Nullpunkt in der Functionsebene; die Radien zweier entsprechenden Kreise sind reciprok. Einem Strahle durch den Nullpunkt in der variablen Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt in der Functionsebene; zwei entsprechende Strahlen bilden entgegengesetzt gleiche Winkel mit den realen Achsen.

B. Ist $w = s^2$, also $u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi$, so ist

$$3. \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Durchläuft s eine Parallele zur Y -Achse, so ist x constant und y veränderlich. Die Gleichungen 3. ergeben die Gleichung der entsprechenden Curve der Functionsebene, wenn y aus beiden Gleichungen eliminirt wird. Man erhält

$$4. \quad v^2 = 4x^2(x^2 - u).$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel; die Symmetrieachse derselben fällt in die u -Achse, der Brennpunkt in den Nullpunkt, der Parameter ist $2x^2$, und die Parabel erstreckt sich entlang der negativen Seite der u -Achse.

Einer Parallelen zur realen Achse der Variabelnebene entspricht in der Functionsebene eine Curve, deren Gleichung aus 3. erhalten wird, wenn man y constant annimmt und die Variable x eliminirt; es ergibt sich

$$5. \quad v^2 = 4y^2(y^2 + u).$$

Dies ist eine Parabel, deren Achse ebenfalls mit der u -Achse, deren Brennpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt; der Parameter ist $2y^2$; die Parabel erstreckt sich in der Richtung der positiven u -Achse.

Die Parabelschaaren 4. und 5. sind confocal; jede Parabel der einen Schaar wird von jeder der andern Schaar unter rechten Winkeln geschnitten.

Modul und Amplitude von s hängen jetzt mit dem Modul und der Amplitude der Variablen durch die Gleichungen zusammen

$$R = r^2, \quad \Phi = 2\varphi.$$

Einem Kreise um den Nullpunkt in der z -Ebene entspricht also ein Kreis um den Nullpunkt in der w -Ebene; einem Strahle durch den Nullpunkt in der z -Ebene entspricht ein Strahl durch den Nullpunkt der w -Ebene; der Winkel, den letzterer mit der ξ -Achse bildet, ist doppelt so gross als der Winkel des entsprechenden Strahls mit der x -Achse.

12. Jede Function von $z = x + iy$ kann man auf die Form bringen

$$w = \varphi(z) = u + vi,$$

wobei u und v reale Functionen von x und y sind. Aber nicht jeder Ausdruck $u + vi$, worin u und v Functionen x und y sind, ist eine Function der complexen Variablen $z = x + yi$. Man hat nämlich

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} i,$$

mithin ist

$$1. \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\text{d. i.} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$; dw = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}} (du + i dv).$$

alen Differentialquotienten von z nach u und v

$$\frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = i \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial x}},$$

daher ist $\frac{\partial z}{\partial v} = i \frac{\partial z}{\partial u}$, w. z. b. w.

15. Aus der Gleichung No. 14, 2. folgt der wichtige Satz, dass der Differentialquotient einer Function einer complexen Variabeln nicht von dem Verhältnisse abhängt, in welchem sich x und y ändern, denn $\frac{\partial w}{\partial x}$ enthält nur die Variablen x und y , nicht aber das Verhältniss $dy:dx$.

Soll z eine verschwindend kleine Aenderung erfahren, so kann dies auf unendliche vielfache Weise geschehen, denn man kann den Punkt z nach allen möglichen Richtungen hin in der Functionsebene eine verschwindend kleine Verschiebung ertheilen. Zu jeder solchen unendlich kleinen Verschiebung dz von z gehört eine bestimmte, unendlich kleine Verschiebung dw des entsprechenden Punktes w in der Functionsebene; das Verhältniss $dw:dz$ ist aber von der Richtung der Verschiebung von z unabhängig.

16. Der Differentialquotient von w ist eine Function von z , denn es ist

$$\frac{\partial w'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dw}{dz} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dw}{dz} = i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Daher hat man

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = i \frac{\partial w'}{\partial y}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man schliesst nun sofort weiter, dass auch alle höhern Differentialquotienten von w Functionen von z sind.

17. Setzt man

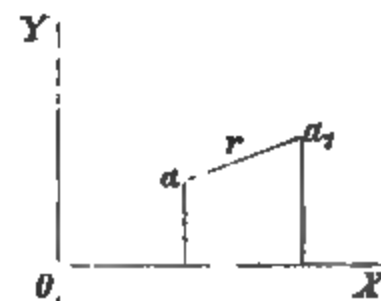
$$a = \alpha + \beta i \quad \text{und} \quad a_1 = \alpha_1 + \beta_1 i,$$

so ist $a_1 - a = \alpha_1 - \alpha + (\beta_1 - \beta)i$.

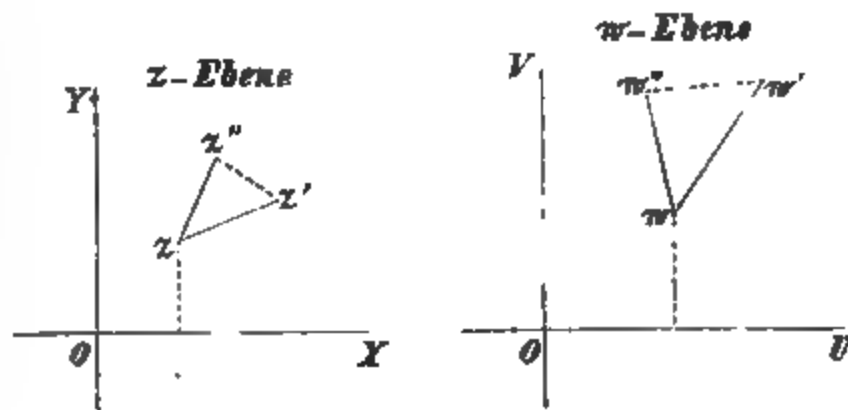
Der Modul der Differenz ist daher gleich dem Abstände r der Zahlpunkte a und a_1 und die Amplitude ist gleich der Winkel φ dieser Strecke mit der positiven realen Achse; man hat daher

$$a_1 - a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Wir ertheilen nun der Variablen z zwei verschiedene verschwindend kleine Verschiebungen, durch welche sie nach z' und z'' gelange; durch die entsprechenden Verschiebungen komme die Function von w nach w' und w'' . Bezeichnet man die verschwindend kleinen Moduln der Differenzen $z' - z$,



(M. 539.)



(M. 540.)

Punkten erleiden kann, in denen sie unendlich gross wird. Einwerthig sind alle rationalen Functionen. Die ganzen rationalen Functionen werden unendlich nur wenn $z = \infty$ ist; die echt gebrochenen

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

nur für solche Werthe von z , für welche der Nenner $\psi(z)$ verschwindet, die unecht gebrochenen ausserdem noch für $z = \infty$.

20. Gehören zu einem Werthe der Variabeln im Allgemeinen verschiedene Werthe von w , so heisst die Function mehrwerthig, und zwar zwei-, drei-, vierwerthig u. s. w., sobald zu einem z im Allgemeinen zwei, drei, vier u. s. w. verschiedene Werthe von w gehören. Mehrwerthig sind alle irrationalen Functionen; die durch die Gleichung n ten Grades für w

$$\varphi(w, z) = 0$$

definirte Function w ist n werthig.

Für einzelne Punkte a_1, a_2, \dots der z -Ebene können zwei oder mehrere Werthe einer n werthigen Function zusammenfallen; diese Punkte heissen die Verzweigungspunkte der mehrwerthigen Function.

Die Function

$$w = \sqrt{z - a}$$

ist zweiwerthig; für $z = a$ werden beide Werthe gleich Null, daher ist dieser Punkt ein Verzweigungspunkt. Die zweiwerthige Function

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

hat die Verzweigungspunkte a und b ; die zweiwerthige

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)}$$

hat vier Verzweigungspunkte, a, b, c, d . Die sechswerthige

$$w = \sqrt[3]{z^3 + az + b} + \sqrt{z}$$

hat drei Verzweigungspunkte; einer ist der Nullpunkt, die andern beiden sind die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + az + b = 0;$$

für $z = 0$ fallen dreimal zwei Werthe von w zusammen, für die Wurzeln von $z^2 + az + b = 0$ zweimal drei Werthe.

21. Wir wollen nun die Variable von einem Anfangswerthe $z = a$ auf irgend einer Curve zu einem Endwerthe $z = b$ führen und die Wege beachten, welche die Function w in der w -Ebene dabei zurücklegt.

Ist w einwerthig, so gehört zu jedem Punkte der z -Ebene nur ein Punkt der w -Ebene, zu jeder Curve der z -Ebene nur eine Curve der w -Ebene. Entsprechen den Punkten a und b der z -Ebene die Punkte a' und b' der w -Ebene, und führt man z auf mehreren verschiedenen Curven von a nach b , so werden die zugehörigen Curven der w -Ebene alle in a' beginnen und b' endigen.

Ein wesentlich anderes Verhalten zeigen die mehrwerthigen Functionen. Sind a und b keine Verzweigungspunkte für die n werthige Function w , so gehören zu a und zu b je n verschiedene Punkte $a_1', a_2', \dots a_n'$ bez. $b_1', b_2', \dots b_n'$ der w -Ebene. Wird nun z von a entlang der Curve l nach b geführt, so rücken die zugehörigen n -Werthe der Function w von den Lagen $a_1', a_2', \dots a_n'$ in die Lagen $b_1', b_2', \dots b_n'$, es entstehen also n Curven, die in $a_1', \dots a_n'$ beginnen und in $b_1', \dots b_n'$ endigen; geht z auf einem andern Wege L von a nach b , so beschreibt das System der n Functionswerthe ein anderes System von n Curven, die dieselben Anfänge und dieselben Endpunkte haben, es ist aber sehr wohl möglich, dass die in einem bestimmten Punkte a_i' anfangende Curve bei der zweiten Ueberführung nach einem andern Punkte der Gruppe der b' geht, als

bei der ersten. Achtet man nur auf $s = a$ mit a' zusammenfällt, so wird d s von a auf l nach b , als wenn s auf L einen andern Endwerth als im letzteren

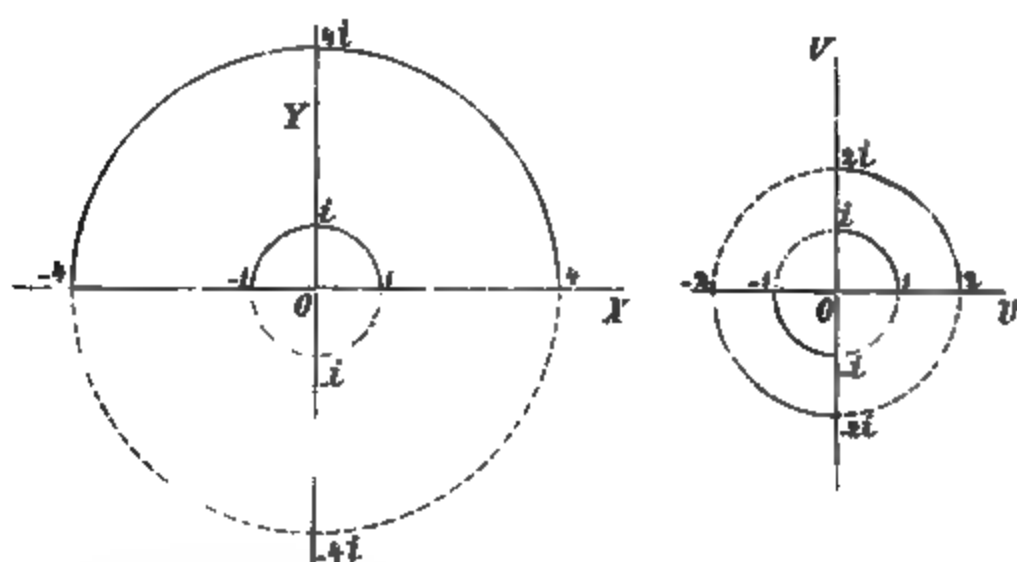
Ein einfaches Beispiel wird dies erl:

22. Wir betrachten die Function

$$w = \sqrt{s}$$

Wie wir schon gesehen haben (No. 19) gehen Strahlen der s -Ebene eir

um den Nullpunkt beschriebenen Kreise der s -Ebene entspricht ein Kreis der



(M. 541.)

w -Ebene, der ebenfalls den Nullpunkt zum Centrum hat. Dem Punkte $s = 4$ entsprechen die Punkte $w_1 = 2$ und $w_2 = -2$. Wir führen nun s von 4 aus auf einem Halbkreise in positiver Drehrichtung um den Nullpunkt bis zum Punkte $s = -4$; als dann geht w_1 auf

einem Viertelkreise bis zu $2i$, und w_2 auf einem Viertelkreise bis zu $-2i$, beide in positiver Drehrichtung.

Hierauf gehe s von 4 bis -4 auf einem Halbkreise in negativer Drehrichtung. Die Amplituden von w_1 und w_2 ändern sich dann ebenfalls im Sinne der abnehmenden Winkel und es gelangt w_1 nach $-2i$, w_2 nach $2i$.

Je nachdem s also auf dem oberen oder dem unteren Halbkreise von $+4$ nach -4 geht, gelangt w_2 durch stetige Aenderungen von $+2$ nach $+2i$ oder $-2i$.

Führt man s in der Richtung der wachsenden Winkel entlang des ganzen Kreises von 4 bis zu 4 zurück, so geht w_1 in dem Halbkreise über $2i$ hinweg bis zu -2 ; einem geschlossenen Wege von s entspricht also ein nicht geschlossener von w_1 . Geht s auf einem andern geeigneten Wege von 4 aus nach 4 zurück, so kann der zugehörige Weg von w_1 ein geschlossener sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn s in positiver Drehrichtung den Halbkreis bis -4 zurücklegt, dann entlang der realen Achse bis -1 geht, hierauf in negativer Drehrichtung einen Halbkreis bis $+1$ beschreibt und dann auf der realen Achse nach $+4$ zurückkehrt. Denn dann geht w_1 in positiver Drehrichtung auf einem Viertelkreise bis $2i$, dann auf der imaginären Achse bis i , dann in negativer Drehrichtung in einem Viertelkreise bis $+1$, und endlich auf der realen Achse bis $+2$.

Gleichzeitig legt w_2 einen Viertelkreis bis $-2i$, dann die imaginäre Achse bis $-i$, dann einen Viertelkreis bis -1 , und endlich die reale Achse bis -2 zurück.

Hätte man s den Halbkreis von -1 nach $+1$ in positiver Drehrichtung beschreiben lassen, so wären w_1 und w_2 von $+i$ und $-i$ auf Viertelkreise um den Nullpunkt in positiver Drehrichtung weiter gegangen, und es wäre dabei w_1 nach -2 und w_2 nach $+2$ gelangt, also nicht zu den Ausgangswerthen zurück.

23. Wird die Variable von a nach b entlang l_1 geführt und gelangt ein Functionswerth w_1 dabei von dem Anfangswerthe a' zu dem Endwerthe b' , so kommt w_1 umgekehrt von b' nach a' , wenn z den Weg l_1 rückwärts von b nach a durchläuft. Gesetzt nun, w_1 gelangt von a' nach b' , gleichgültig ob z von a nach b die Wege l oder l_1 wählt. Lässt man dann z von a auf l bis b und dann auf l_1 zurück nach a gehen, so ändert sich w_1 von a' bis zu b' und nimmt am Schlusse wieder den Werth a' an; und umgekehrt: Gelangt w_1 vom Werthe a' aus wieder zu a' zurück, wenn z von a aus die Curven l und l_1 nach einander durchlaufend zu a zurückkehrt und hat w_1 dabei für $z = b$ den Werth b' angenommen, so gelangt w_1 rückwärts vom Werthe a' zum Werthe b' , wenn z von a aus die Curve l_1 bis b durchläuft, w_1 nimmt also bei beiden Wegen l und l_1 der Variablen denselben Endwerth an.



(M. 542.)

Um daher zu erfahren, welche Wege die Variable z von einem Anfangspunkte zu einem Zielpunkte zurücklegen muss, damit w_1 zu demselben oder zu verschiedenen Endwerthen gelange, genügt es, die geschlossenen Wege zu untersuchen.

Erhält w_1 denselben Werth wieder, wenn z auf der aus l und l_1 zusammengesetzten geschlossenen Curve von a ausgehend nach a zurückkehrt, so erhält auch w_1 denselben Werth, wenn z auf l oder auf l_1 von a nach b sich bewegt; und erhält w_1 nicht denselben Werth wieder, wenn z die geschlossene Curve durchläuft, so erhält w_1 einen andern Werth, wenn z von a nach b auf l_1 , als wenn es auf l geht.

24. Um bei der irrationalen Function

$$w = \sqrt{z}$$

die geschlossenen Wege, welche die Variable zurückzulegen hat, damit w_1 wieder zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt, von denen zu unterscheiden, für welche dies nicht der Fall ist, drückt man z durch Modulus und Amplitude aus. Der Modulus ist eine eindeutig bestimmte Zahl; die Amplitude dagegen ist unendlich vieldeutig; ist nämlich φ einer ihrer Werthe, so erhält man die anderen, wenn man φ um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert.

Ist nun $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

so ist $w = \sqrt{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$

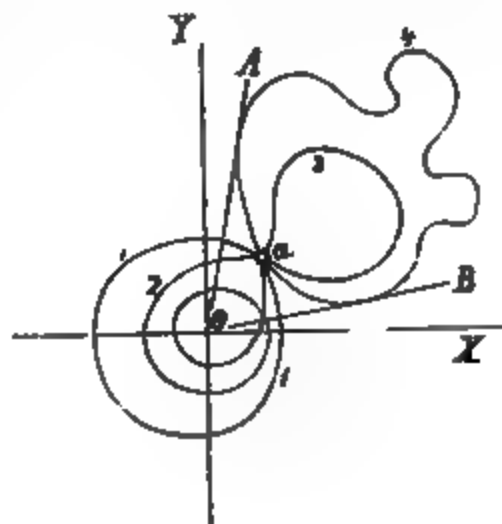
Zu jeder Amplitude gehört hiernach ein ganz bestimmter Werth von w ; zu allen Amplituden, die um gerade Vielfache von 2π verschieden sind, gehört ein und derselbe Werth w_1 , der zweideutigen Function w , zu den übrigen, die von den ersten um ungerade Vielfache von 2π abweichen, gehört der andere Werth w_2 .

Geht nun z von einem Punkte a aus und auf einer beliebigen geschlossenen Curve (1) nach a so zurück, dass dabei die Amplitude um 2π zu- oder abgenommen hat, so hat z den Nullpunkt einmal umkreist, und w ist von dem Werthe

$$w_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

zu dem Werthe

$$\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi \pm 2\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi \pm 2\pi}{2} \right) = -w_1$$



(M. 545.)

gelangt, also nicht zum A
geschlossenen Curve (2) so
zu oder abnimmt, so endigt

$$\sqrt{r}$$

d. i. mit dem Anfangswerthe. Hieraus sieht man: Durchläuft z eine geschlossene Curve, die den Nullpunkt umgiebt, so kommt ein Functionswerth w_1 der zweideutigen Function \sqrt{z} zu dem Ausgangswerthe zurück oder nicht, je nachdem der Weg der Variablen den Nullpunkt eine gerade oder ungerade Anzahl Male umkreist.

Beschreibt z eine geschlossene Bahn, die den Nullpunkt nicht einschliesst (3, 4), so wächst φ bis zu einem grössten Werthe XOA , erlangt später einen kleinsten Werth XOB , und kehrt dann zum Anfangswerthe zurück; die End-Amplitude ist also mit der Anfangs-Amplitude identisch. Hieraus schliessen wir. Wenn z eine geschlossene Bahn durchläuft, die den Nullpunkt nicht einschliesst, so kehrt w_1 wieder zum Anfangswerthe zurück.

25. Die Thatsache, dass zu jedem Punkte der Variabelnebene zwei Werthe w gehören, und die damit zusammenhängende, dass geschlossene Wege des Variabelpunkts die Function \sqrt{z} zum Theil wieder zum Ausgangswerthe zurückführen, zum Theil aber nicht, erschweren die weiteren Betrachtungen. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, hat RIEMANN*) für die mehrwerthigen Functionen statt der Variabelnebene mehrblätterige Flächen angewandt, die nach ihrem Erfinder als RIEMANN'sche Flächen bezeichnet werden.

Für die Function $w = \sqrt{z}$ wird die RIEMANN'sche Variabelnfläche folgendermassen erhalten. Man denke sich eine Schraubenfläche von sehr kleiner Ganghöhe; ihre Achse gehe durch O normal zur XY -Ebene, ihre Spur auf der XY -Ebene mag man sich mit der positiven realen Achse OX zusammenfallend denken. Auf dieser Schraubenfläche durchlaufe man in positiver Richtung von OX beginnend, den ersten und zweiten Umgang, alles andere denke man beseitigt. Der herausgeschnittene Theil hat dann zwei parallele Ränder, die sich von O aus ins Unendliche erstrecken, einer davon ist OX . Nun denke man sich die Ganghöhe verschwindend klein, und deformire die Fläche an den beiden Rändern so, dass dieselben ihrer ganzen Länge nach vereinigt werden, und somit den ersten Umgang durchdringen. Dabei soll die Beschränkung gelten, dass ein Punkt diese Verwachsungslinie nur überschreiten darf, um vom Ende des zweiten Umgangs zum Anfange des ersten zu gelangen oder umgekehrt, nicht aber so, dass er vom Ende des ersten zum Anfange des ersten, oder umgekehrt, übergehe.

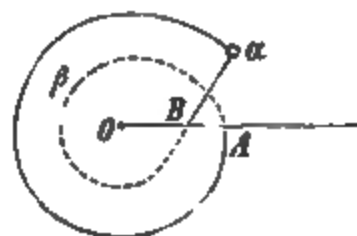
Man erhält somit eine zweiblätterige Fläche, welche die XY -Ebene doppelt bedeckt; die beiden Blätter sind längs der Geraden OX von O anfangend verwachsen; diese Linie darf ein Punkt nur so überschreiten, dass er von dem vorderen Theile des oberen Blattes den hintern Theil des unteren oder von dem hintern Theile des oberen in den vordern Theil des unteren übergeht oder umgekehrt. Jeder Punkt a der XY -Ebene ist die Projection zweier in verschiedenen Blätter

*) RIEMANN's gesammelte math. Werke, herausgeg. von H. WEBER, Leipzig 1876, Abhandlung I. und VI.; die Abhandl. VI. findet sich auch in CRELLE's Journal, Bd. 54 (185 pag. 101; vergl. auch ROCH, Ueber Functionen complexer Grössen, SCHLÖRMICH's Zeitschr. Math. u. Phys., Bd. 8. (1863), pag. 12 u. 183.

liegenden Punkte α_1 und α_2 der zweiblätterigen Variabelnfläche; diese beiden Punkte haben denselben Modulus, ihre Amplituden sind um 2π verschieden*).

Will man von einem Punkte α des obern Blattes auf der Fläche nach einem Punkte β des untern gelangen, so muss man den Windungspunkt O wenigstens einmal umkreisen. Der Weg ist sichtbar bis zum Punkte A , wo er die Verwachsung überschreitet und ins andere Blatt gelangt; von da an ist er verdeckt.

Wenn man von α ausgeht und den Nullpunkt zweimal umkreist, so kommt man ins obere Blatt zurück. Will man von α ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben, so darf dieselbe den Windungspunkt nicht einschliessen, oder muss ihn zweimal, oder viermal, oder überhaupt eine gerade Anzahl Male umkreisen.



(M. 544.)

Man setze nun fest, dass für irgend einen von O verschiedenen Punkt α der RIEMANN'schen Fläche die Function $w = \sqrt{z}$ den einen ihrer Werthe w_1 (und nicht den entgegengesetzt gleichen w_2) haben soll; da nun jede geschlossene Curve auf der Fläche den Windungspunkt gar nicht oder eine gerade Anzahl Male umkreist, so folgt, dass der Werth, den \sqrt{z} in jedem Punkte annimmt, unabhängig von dem Wege ist, auf welchem die Variable zu diesem Punkte von α ausgehend gelangt; die Function \sqrt{z} ist also eine eindeutige Function der Punkte der zweiblätterigen Fläche.

Dieselbe Fläche dient dazu, die Function

$$w = \sqrt{az + b}$$

als eindeutige Function des Ortes in der Fläche darzustellen; nur hat man den Windungspunkt in den Punkt $-b:a$ zu verlegen.

26. Wir construiren nun eine zweiblätterige RIEMANN'sche Variabelnfläche, für welche die Function

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist; wir setzen dabei voraus, dass a und b verschieden sind. Bezeichnet man in der Variabelnebene die Abstände der Punkte a und b von dem variablen Punkte z mit R und r und die Winkel dieser Geraden und der X -Achse mit Φ und φ , so ist

$$w = \sqrt{R} \left(\cos \frac{\Phi}{2} + i \sin \frac{\Phi}{2} \right) \cdot \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

*) Um ein anschauliches Modell eines Theiles dieser Fläche zu erhalten, schneide man zwei gleiche Stücke Papier b_1 und b_2 und zerschneide sie entlang OX ; hierauf lege man sie so auf einander, dass die Schnitte sich decken, und verbinde durch Ueberkleben mit einem Streifen Papier den Rand 1. des obern Blattes mit 2. des untern. An den Stellen c und d mache man entlang OX kleine Schnitte in den verbindenden Streifen, und schiebe durch dieselbe



(M. 545.)

schmale Papierstreifen, durch die man nun bei c und c' bez. d und d' durch Ankleben den vordern Rand des obern mit dem hintern Rande des untern verbindet. Die Vorschrift über das Ueberschreiten der Verwachsung findet dann ihren deutlichen Ausdruck darin, dass man auf dem langen Streifen nur von oben 1 nach unten 2, auf den schmalen Stegen nur von oben c und d nach unten c' und d' , oder umgekehrt, gelangen kann.

Geht nun z von einem Punkte z_0 aus, und auf einer Curve wieder nach z_0 zurück, so erlangt der Faktor

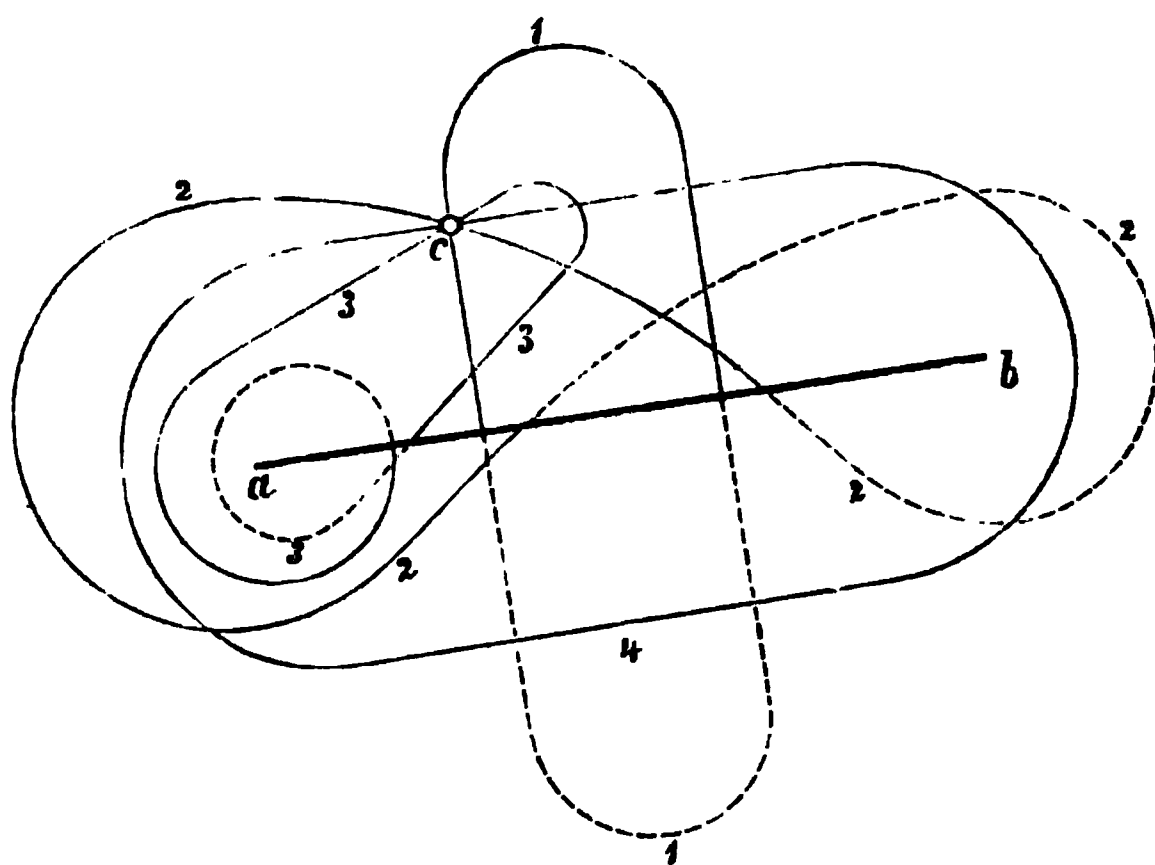
$$\sqrt{R} \cdot \left(\cos \frac{\Phi}{2} + i \sin \frac{\Phi}{2} \right)$$

seinen Ausgangswerth wieder, oder den entgegengesetzt gleichen, je nachdem der Weg des z den Punkt a eine gerade Anzahl Male (Null mit eingerechnet) umkreist, oder eine ungerade; ebenso erreicht dabei der andere Faktor

$$\sqrt{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

seinen Ausgangswerth oder nicht, je nachdem der Punkt b eine gerade oder ungerade Anzahl Male von z umkreist wird. Wenn beide Faktoren ihren Anfangswerth nicht erreichen, also beide am Ende des Weges Werthe angenommen haben, die den Anfangswerthen entgegengesetzt gleich sind, so hat sich ihr Produkt nicht geändert, w also den Ausgangswerth wieder erreicht. Daher erkennt man, dass w den Ausgangswerth wieder erreicht oder nicht, je nachdem der Weg der Variablen die beiden Punkte a und b zusammen genommen eine gerade Anzahl Male umkreist, oder eine ungerade.

Hiernach ergibt sich folgende dem Zwecke genügende RIEMANN'sche Variabelnfläche: Man decke zwei Ebenen auf einander und denke sich dieselben entlang der Geraden ab so verwachsen, dass man von einem Rande der Geraden auf den andern nicht übertreten kann, ohne dabei von dem obern Blatte ins untere zu gelangen oder umgekehrt. Auf dieser Fläche kann man von einem



(M. 546.)

Punkte c aus nur auf solchen Wegen zu c zurückgelangen, die keinen der Windungspunkte a und b umkreisen (z. B. Weg 1), oder einen nach dem andern jeden einmal umkreisen (Weg 2), oder die einen zweimal umkreisen (Weg 3) oder die beide zusammen einmal umkreisen (Weg 4), oder auf Wegen, die sich aus Wegen dieser vier Arten zusammensetzen lassen; in jedem dieser Fälle erlangt w wieder seinen Ausgangswerth.

Ist nun festgesetzt, welchen Werth w für irgend einen Punkt z_0 der zweiblättrigen Fläche haben soll, so ist der Werth in jedem Punkt z_1 eindeutig bestimmt durch die Aenderung, die w erleidet, wenn z auf irgend welchem Wege auf der Fläche von z_0 nach z_1 geht.

27. Bezeichnet man für die Function

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)}$$

mit r_1, r_2, r_3, r_4 die Abstände der Punkte a, b, c, d vom variablen Punkte z und mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ die Winkel der Geraden r_1, r_2, r_3, r_4 mit der positiven realen Achse, so ist

$$w = \sqrt{r_1} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + i \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \cdot \sqrt{r_2} \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + i \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) \\ \cdot \sqrt{r_3} \left(\cos \frac{\varphi_3}{2} + i \sin \frac{\varphi_3}{2} \right) \cdot \sqrt{r_4} \left(\cos \frac{\varphi_4}{2} + i \sin \frac{\varphi_4}{2} \right).$$

Beschreibt z auf der Variablen-Ebene von z_0 aus eine geschlossene Curve, die den Punkt a eine gerade bez. ungerade Anzahl Male umkreist, so bekommt der Faktor

$$\sqrt{r_1} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + i \sin \frac{\varphi_1}{2} \right)$$

seinen Ausgangswerth, bez. den entgegengesetzt gleichen, und umgekehrt; das Entsprechende gilt für die übrigen Faktoren von w . Wenn daher z eine Bahn beschreibt, die alle die vier Punkte zusammengekommen eine gerade Anzahl Male umkreist, so erlangt w wieder seinen Ausgangswerth; ist aber die Summe der Umkreisungen aller vier Punkte ungerade, so erlangt w nicht den Ausgangswerth wieder. Hieraus erkennt man, dass w eine eindeutige Function des Ortes der Variablenfläche wird, wenn man dieselbe folgendermaassen construirt: Man legt zwei Ebenen auf einander, und lässt diese entlang einer Geraden verwachsen, die zwei von den Punkten a, b, c, d verbindet, sowie auf der Geraden zwischen den beiden andern; diese beiden Verwachsungen sollen so gewählt sein, dass sie sich nicht schneiden. Betreffs der Ueberschreitung der Verwachsungen sollen dieselben Bestimmungen gelten, wie bei den vorigen Beispielen.

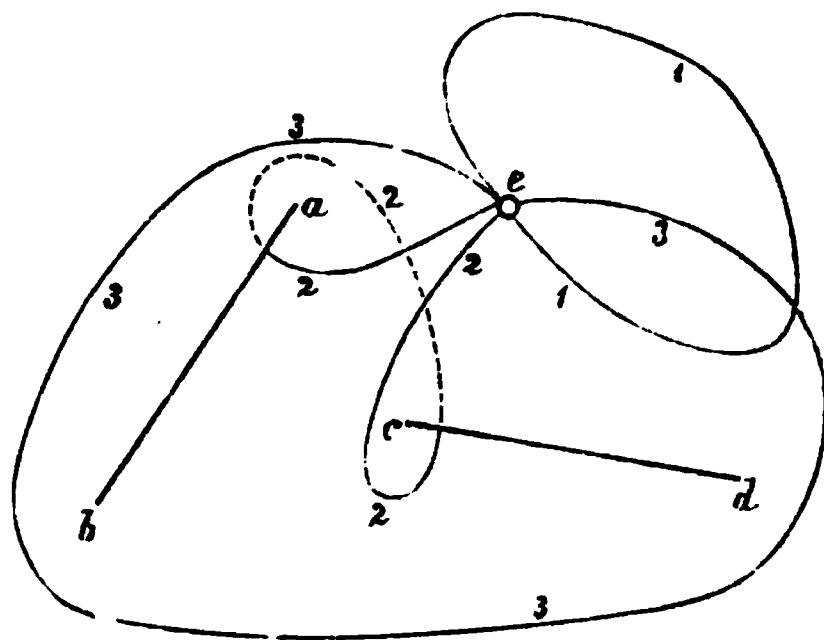
Durchläuft man auf dieser Fläche von einem Punkte e des obern Blattes aus eine Curve, deren Grundriss geschlossen ist, und die keinen der Windungspunkte a, b, c, d umkreist, so führt diese Curve zu e selbst zurück, endet nicht in dem unter e im andern Blatte liegenden Punkte (Weg 1).

Wenn man von e ausgehend einen Windungspunkt (a , Weg 2) einmal umkreist, so kommt man in das untere Blatt; um in das obere zurückzugelangen, muss man noch einen Windungspunkt (z. B. c) einmal umkreisen. Ein Weg, der zwei durch eine Verwachsung verbundene Windungspunkte oder alle vier umkreist, kann ganz im obern Blatte liegen (Weg 3)*).

Man überzeugt sich so, dass man in dieser Fläche nur solche wirklich geschlossene Linien ziehen kann, die die Windungspunkte zusammen eine gerade Anzahl Male umkreisen.

Ist daher festgesetzt, welchen der beiden möglichen Werthe w in einem Punkte dieser Fläche haben soll, so ist der Endwerth, den w erreicht, wenn z von diesem Punkte auf der Fläche zu einem andern geht, eindeutig bestimmt und vom Wege unabhängig.

Diese Beispiele genügen für die weiteren Betrachtungen, die wir hier durchführen werden.



(M. 547.)

*) Um sich diese Verhältnisse recht deutlich zu machen, zeichne man sich mehrere geschlossene Wege, die die Windungspunkte immer anders umkreisen, und achte darauf, die Wegtheile zu punktiren, soweit sie im untern Blatte liegen.

§ 13. Integrale complexer Functionen.

1. Es sei $f(z)$ eine Function der complexen Variablen z , und für z eine RIEMANN'sche Variabelnfläche construiert, so dass $f(z)$ eine eindeutige Function der Punkte dieser Fläche ist; ferner seien zwei Punkte z_0 und Z dieser Fläche durch eine in der Fläche liegende Linie l verbunden, und diese Linie durch eine Anzahl Punkte $z_1, z_2, z_3 \dots z_{n-1}$ getheilt, die in der Richtung von z_0 nach Z auf einander folgen; endlich werde mit $f(z_k)$ der Werth bezeichnet, den $f(z)$ für irgend einen Punkt innerhalb des Linienstücks $z_{k-1}z_k$ annimmt. Unter dem bestimmten Integrale

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz$$

versteht man den Grenzwert, gegen den die Summe

$$\sum_1^n f(z_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \quad z_n \equiv Z$$

convergiert, wenn sämtliche Differenzen Δz_k verschwinden.

2. Wir werden nun zunächst zeigen, dass ein solcher Grenzwert existirt. Setzen wir $z = x + iy$, so nimmt $f(z)$ nach Sonderung des Realen vom Imaginären die Form an $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ und es ist

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = x_k - x_{k-1} + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Folglich haben wir, wenn wir die Indices unterdrücken

$$\Sigma f(z) \Delta z = \Sigma [\varphi(x, y) \Delta x - \psi(x, y) \Delta y] + i \Sigma [\varphi(x, y) \Delta y + \psi(x, y) \Delta x].$$

Aus der Gleichung der Curve l wollen wir nun y durch x und x durch y ausdrücken und diesen Werth für y bez. x in die mit Δx bez. mit Δy multiplicirten Functionen substituiren. Die ersteren werden dann Functionen von x allein, die letzteren Functionen von y ; bezeichnen wir dieselben mit $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Psi(y)$, und $\Psi_1(y)$, so haben wir

$$\Sigma f(z) \Delta z = \Sigma [\Phi(x) \Delta x - \Psi(y) \Delta y] + i \Sigma [\Phi_1(x) \Delta x + \Psi_1(y) \Delta y].$$

Ist nun $Z = X + iY$, so ist

$$\lim \Sigma \Phi(x) \Delta x = \int_{x_0}^X \Phi(x) dx, \quad \lim \Sigma \Psi(y) \Delta y = \int_{y_0}^Y \Psi(y) dy \quad \text{u. s. w.};$$

hieraus folgt

$$\lim \Sigma f(z) \Delta z = \int_{x_0}^X \Phi(x) dx - \int_{y_0}^Y \Psi(y) dy + i \int_{x_0}^X \Phi_1(x) dx + i \int_{y_0}^Y \Psi_1(y) dy.$$

Hierdurch ist das Integral

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz$$

durch bestimmte Integrale realer Functionen einer realen Variablen ausgedrückt.

Wir schliessen hieran zwei Sätze, die sich aus der Definition des bestimmten Integrals ohne Weiteres ergeben.

Ist b ein Punkt, der auf dem Integrationswege, d. i. auf dem für die Variable angenommenen Wege, ac zwischen a und c liegt, so ist für die Integration auf dem angenommenen Wege

$$\int_a^b f(z) dz + \int_b^c f(z) dz = \int_a^c f(z) dz.$$

Ferner folgt

$$\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz.$$

3. Wir haben nun zu untersuchen, welchen Einfluss die Wahl des Integrationsweges auf den Werth des bestimmten Integrals hat.

Es liegt die Vermuthung nahe, dass das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral immer andere Werthe erhält, wenn man die Punkte a und b durch verschiedene Integrationswege verbindet; so dass es nöthig wäre, bei jedem Integrale den Integrationsweg genau anzugeben. Wir werden indess zeigen, dass diess nicht der Fall ist; der Werth des bestimmten Integrals wird sich nur insofern abhängig vom Integrationswege erweisen, als bei gewissen Gruppen von Wegen das Integral um eine bestimmte additive Constante von dem auf andern Wegen erhaltenen Werthe abweicht.

Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, beweisen wir folgenden Satz: Sind X und Y zwei innerhalb eines vollständig begrenzten Theiles T einer RIEMANN'schen Fläche endliche und eindeutige Functionen des Ortes in der Fläche, so ist das über die Fläche T erstreckte Integral

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT$$

entgegengesetzt gleich dem über alle Punkte der Begrenzung von T ausgedehnten Integrale

$$\int (Xdx + Ydy),$$

wobei alle Theile der Begrenzung so durchlaufen werden sollen, dass die Fläche T gegen die Fortschreitung entlang der Grenze so liegt, wie der $+i$ enthaltene Theil der Zahlenebene gegen die in der Richtung wachsender Zahlen durchlaufene reale Achse.

Wir wollen uns zunächst unter X und Y reale Functionen von x und y denken.

Wir betrachten zuerst ein Flächenstück T , das die Ebene nur einfach bedeckt und einfach zusammenhängend ist, d. i., dessen vollständige Begrenzung eine einzige geschlossene Curve bildet. Das über T ausgedehnte Integral zerlegen wir in die Differenz zweier Integrale

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = \int \frac{\partial X}{\partial y} dT - \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT,$$

und berechnen die Summanden einzeln. Nun ist

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = \iint \frac{\partial X}{\partial y} dx dy.$$

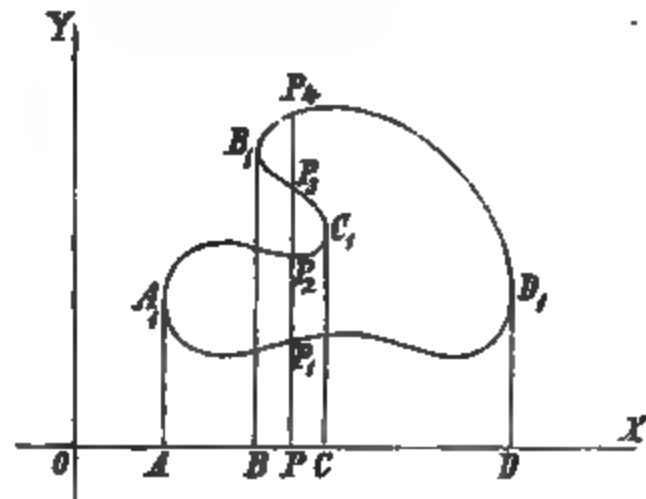
Hierbei ist die Integration nach y auf jeder Parallelen zur Y -Achse über die Strecken auszudehnen, die im Innern von

T liegen, für $x = OP$ also über P_1P_2 und P_3P_4 . Sind die Werthe, welche die Function X in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 hat, der Reihe nach X_1, X_2, X_3, X_4 , und bemerken wir, dass bei unbestimmter Integration

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dy = X + C,$$

so ergibt sich für das über die Strecken P_1P_2 und P_3P_4 ausgedehnte bestimmte Integral

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dy = X_2 - X_1 + X_4 - X_3.$$



(M. 548)

Hierbei wird von d
Punkte im Innern der Flä
innerhalb der Strecke P
gedehnte Integral im All

Daher ist nun weiter

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT = \int$$

$$= - \int$$

Die Grenzen der ein
parallelen Tangenten de
 OA, OB, OC, OD , so i

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} dT =$$

Im zweiten und viert
bei etwas veränderter An

$$1. \quad \int \frac{\partial X}{\partial y} dT = - \int$$

Durchläuft ein Punkt den Perimeter von T in positiver Richtung von A_1 anfangend, so erhält X auf dem Wege $A_1 D_1$ Werthe, die mit X_1 bezeichnet sind; die auf dem Wege $D_1 B_1$ sind mit X_4 bezeichnet, die auf $B_1 C_1$ mit X_3 , die auf $C_1 A_1$ mit X_2 . Wir können daher in 1. die Indices bei X_1, X_2, X_3, X_4 weglassen und alle Integrale vereinigen; hierdurch entsteht

$$2. \quad \int \frac{\partial X}{\partial y} dT = - \int X dx,$$

wobei das Integral rechts also über den Perimeter von T auszudehnen und dabei der Perimeter in positiver Richtung zu durchlaufen ist. Durch geeignete Vertauschungen ergibt sich aus 3.

$$3. \quad \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = - \int Y dy,$$

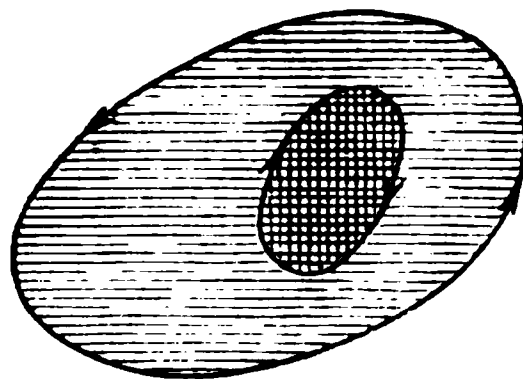
wobei rechts infolge der Vertauschung von x gegen y der Perimeter von T so zu durchlaufen ist, dass die Fläche T gegen die Richtung der Fortschreitung so liegt, wie der Winkel XOY gegen die in der Richtung der wachsenden y zurückgelegte Ordinatenachse. Diese Umlaufsrichtung ist der des Begrenzungsintegrals in 2. entgegengesetzt. Wechseln wir in 3. die Umlaufsrichtung, so wechseln alle einzelnen Bestandtheile, aus denen dasselbe zu berechnen ist, (so wie $\int X dx$ sich nach Gleichung 1. berechnet) die Grenzen, nehmen also den entgegengesetzten gleichen Werth an; durchläuft man den Perimeter von T in positiver Richtung, so hat man daher

$$4. \quad \int \frac{\partial Y}{\partial x} dT = \int Y dy.$$

Aus 2. und 4. folgt schliesslich

$$5. \quad \int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = - \int (X dx + Y dy), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wir beweisen nun den Satz für eine die Ebene allenthalben einfach bedeckende Fläche T , deren Begrenzung aus mehreren getrennten Curven besteht. Wir denken uns aus der einfach zusammenhängenden (wagerecht schraffirten) Fläche T_1 eine einfach zusammenhängende (senkrecht schraffirte) T_2 herausgeschnitten. Wird die übrig bleibende, ringförmige Fläche mit T bezeichnet, so ist



(M. 549.)

$$\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = \int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT - \int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT$$

wobei durch die Zeichen

$$\int_T, \int_{T_1}, \int_{T_2}$$

angedeutet wird, dass die Integration über die Flächen T , T_1 , T_2 erstreckt werden soll. Nun ist nach dem vorigen Beweise

$$\int_{T_1} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = - \int (X dx + Y dy),$$

ausgedehnt über den Perimeter von T_1 in positiver Umlaufrichtung; und

$$\int_{T_2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = \int (X dx + Y dy)$$

ausgedehnt über den Perimeter von T_2 in negativer Umlaufrichtung in Bezug auf T_2 , mithin in positiver in Bezug auf die Ringfläche T_1 , zu deren Begrenzung der Perimeter von T_2 gehört. Daher haben wir für T

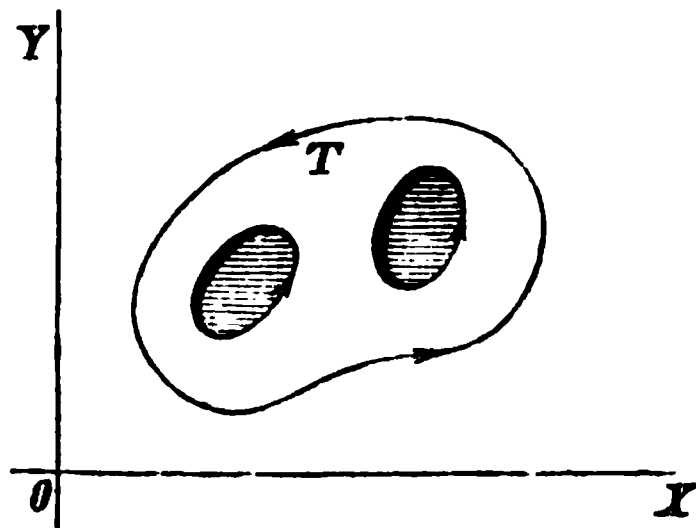
$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = - \int (X d\tilde{y} + Y dy)$$

wobei nun das Begrenzungsintegral rechts über die ganze Begrenzung von T in positiver Richtung (in Richtung der Pfeile) zu erstrecken ist.

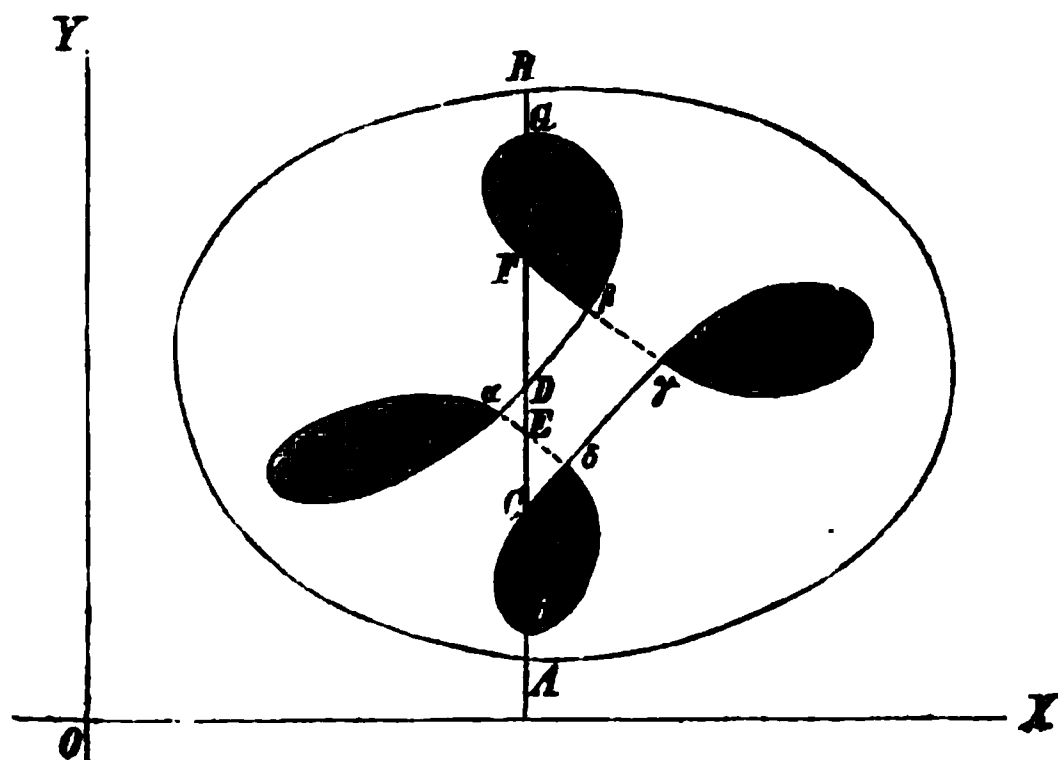
Wenn aus einer einfach zusammenhängenden, die Ebene allenthalben einfach bedeckenden Fläche mehrere Stücke herausgeschnitten werden, so findet man in gleicher Weise die Gültigkeit des Satzes.

Bei der unschraffirten Fläche T (Fig. 550) ist das Begrenzungsintegral über die drei Begrenzungscurven, bei jeder in der Pfeilrichtung, zu erstrecken.

Die Fläche T in Fig. 551 ist aus einer zweiblättrigen RIEMANN'schen Fläche mit vier Windungspunkten geschnitten (§ 12, No. 27); sie bedeckt zum Theil die Ebene doppelt, nämlich innerhalb des Grundrisses $\alpha\beta\gamma\delta$. Ist AH parallel der Y -Achse, so ist bei der Integration nach y das Integral über



(M. 550.)



(M. 551.)

die Strecken AB , CD (im oberen Blatte), EF und GH zu erstrecken; folglich ist

$$\int \frac{dX}{dy} dy = X_B - X_A + X_D - X_C + X_F - X_E + X_H - X_G;$$

es gelten daher ganz die vorigen Betrachtungen und Schlüsse.

Enthält T einen Windungspunkt einer zweiblätterigen Fläche und wird von einer einzigen Curve begrenzt, so ist für die Integration nach x entlang der Parallelen AD zur X -Achse das Integral im oberen Blatte über die Strecke CD , im untern über AB zu erstrecken, es ergibt sich mithin

$$\int \frac{dy}{dx} dx = Y_B - Y_A + Y_D - Y_C;$$

alles Uebrige folgt dann wie vorher.

Wir können nun den Satz mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, dass X und Y complexe Functionen sind.

Haben wir $X = R + iS$, $Y = U + iV$, so ist

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = \int \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) dT + i \int \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) dT.$$

Wenden wir den Satz auf die realen Functionen R, S, U, V an, so erhalten wir

$$\int \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) dT = - \int (R dx + U dy), \quad \int \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) dT = - \int (S dx + V dy).$$

Daher folgt schliesslich

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dT = - \int [(R + iS) dx + (U + iV) dy], \quad \text{w. z. b. w.}$$

4. Wir wenden den soeben bewiesenen Satz auf das Integral einer complexen Function w an. Es sei

$$\int w dz$$

über den Perimeter einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb welcher w eine endliche und eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist; alsdann ist

$$\int w dz = \int (w dx + i w dy) = - \int \left(\frac{\partial w}{\partial y} - i \frac{\partial w}{\partial x} \right) dT.$$

Da nun

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

so verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, also auch das ihm gleiche Begrenzungsintegral. Dies ergibt den Satz: Das Integral $\int w dz$, ausgedehnt in positiver Umlaufsrichtung über die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren w eindeutig und endlich ist, ist gleich Null.

Enthält die Fläche T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte, für welchen die eindeutige Function w unendlich wird, so kann man dieselben durch klein geschlossene Perimeter $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ umgeben, deren jeder nur einen Unstetigkeitspunkt enthält. Lässt man die von α_1, \dots begrenzten Flächentheile aus T treten, so ist nun innerhalb der Restfläche w endlich; mithin verschwindet $\int w dz$, wenn man es über die Begrenzung von T und über die Perimeter $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ausdehnt, in positivem Umlaufe in Bezug auf die Restfläche, also die über $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ausgedehnten Integrale in negativer Richtung bezüglich der aus geschlossenen Flächen. Hieraus folgt: Wird das Integral $\int w dz$ über der

Perimeter einer Fläche T erstreckt, welche Unstetigkeitspunkte enthält, so ist der Werth dieses Integrals gleich der Summe von Integralen $\int w dz$, die in positiver Richtung um die Perimeter kleiner, je einen Unstetigkeitspunkt enthaltender Flächentheile erstreckt sind.

Dieser Satz lehrt $\int w dz$ für den Fall zu finden, dass T Unstetigkeitspunkte enthält; wir werden nämlich jeden solchen Punkt durch einen kleinen Kreis umgeben, wenn er kein Windungspunkt ist; ist er Windungspunkt einer zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche, so umgeben wir ihn mit einer geschlossenen Linie, deren Grundriss ein Kreis ist, die also von z beschrieben wird, wenn r constant ist und φ von 0 bis 4π wächst; zur Berechnung dieser Integrale können wir r so klein nehmen wie wir wollen, und daher insbesondere einen verschwindend kleinen Werth von r voraussetzen.

5. Wir kehren nun zum Ausgangspunkte unserer Untersuchung zurück, zu der Frage, welchen Einfluss die Wahl des Integrationsweges (N. 3) auf den Werth des Integrals

$$\int_{z_0}^z w dz$$

hat. Führt man die Variable auf zwei Wegen l und l_1 von z_0 nach z , die einen Theil einer RIEMANN'schen Fläche vollständig begrenzen, innerhalb dessen keine Unstetigkeitspunkte liegen, so verschwindet das über die ganze Begrenzung genommene Integral. Dasselbe zerfällt in das in der Richtung $z_0 z$ über l und in das in der Richtung $z z_0$ über l_1 genommene. Deuten wir die Wege durch eingeklammerte Buchstaben vor dem Integralzeichen an, so ist also

$$1. \quad (l) \int_{z_0}^z w dz + (l_1) \int_z^{z_0} w dz = 0.$$

Da nun $(l_1) \int_z^{z_0} w dz = - (l_1) \int_{z_0}^z w dz$, so folgt aus 1.:

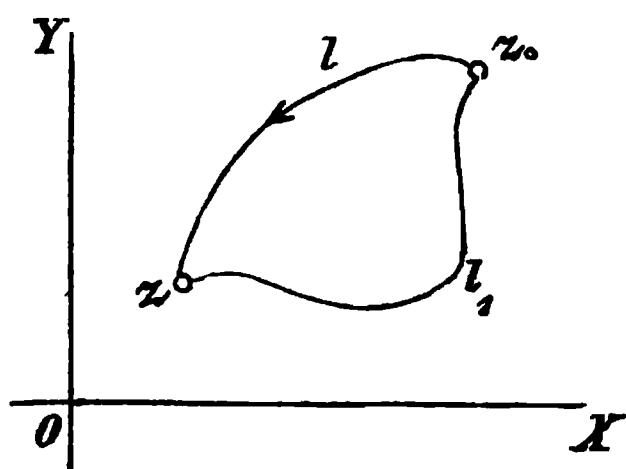
$$(l) \int_{z_0}^z w dz = (l_1) \int_{z_0}^z w dz.$$

Wenn zwei Integrationswege einen Theil T einer RIEMANN'schen Fläche vollständig begrenzen und innerhalb desselben kein Unstetigkeitspunkt liegt, so hat das Integral für beide Wege denselben Werth.

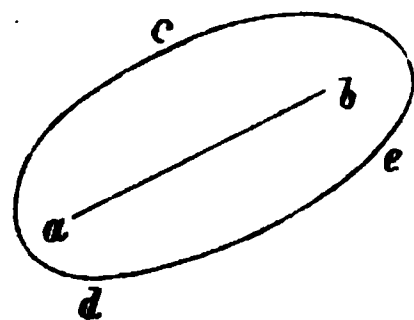
Ferner erkennen wir sofort: Wenn T einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte enthält, so sind die auf den Wegen l und l_1 gewonnenen Integrale um gewisse Constanten verschieden, nämlich um die Werthe von Integralen über die Perimeter hinlänglich kleiner Flächen, welche je einen Unstetigkeitspunkt enthalten.

In einer einblätterigen ununterbrochenen Fläche begrenzt jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig; in einer zweiblätterigen Fläche lassen sich geschlossene Linien ziehen, die für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.

Hat die zweiblätterige Fläche zwei Windungspunkte a und b und zwischen ihnen die Verwachsungslinie, so kann man im oberen (oder im unteren) Blatte eine geschlossene Curve cde ziehen, die beide Windungspunkte einschliesst.

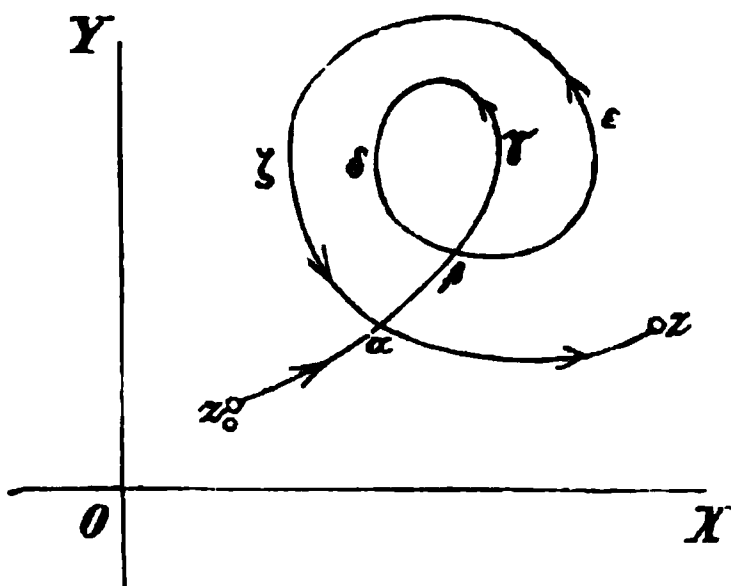


(M. 553.)



(M. 554.)

Diese Linie theilt die zweiblättrige Fläche in zwei Theile, die beide unendlich gross sind; der eine ist der ausserhalb cde liegende Theil des Blattes, der andere ist das untere Blatt vermehrt um den innerhalb cde liegenden Theil des oberen, der mit dem unteren entlang ab zusammenhängt. Bei beiden Theilen



(M. 555.)

gehört zur vollständigen Begrenzung ausser cde noch eine die unendlich fernen Punkte enthaltende geschlossene Linie.

6. Wenn der Integrationsweg $z_0 z$ sich selbst ein- oder mehrmals schneidet, so kann man geeignete Zerlegungen vornehmen, die wir an einem Beispiele (Fig. 555) zeigen. Dabei wollen wir mit $\int(A, B, C \dots N)$ das entlang einer vorgeschriebenen Curve $A, B, C \dots N$ von A bis N erstreckte Integral von $w dz$ verstehen.

Es ist

$$1. \quad \int(z_0 \gamma \delta \epsilon \zeta z) = \int(z_0 \alpha) + \int(\alpha \beta) + \int(\beta \gamma \delta \beta) + \int(\beta \epsilon \zeta \alpha) + \int(\alpha z).$$

Nun kann man das erste und letzte, sowie das zweite und dritte Integral zu einfachen Begrenzungsintegralen zusammenfassen und hat

$$2. \quad \int(z_0 \gamma \delta \epsilon \zeta z) = \int(z_0 \alpha z) + \int(\alpha \beta \epsilon \zeta \alpha) + \int(\beta \gamma \delta \beta).$$

Wenn nun der Weg $z_0 \gamma \delta \epsilon \zeta z$ keinen Unstetigkeitspunkt umkreist, innerhalb der Fläche $\alpha \beta \epsilon \zeta$ also keiner liegt, so sind die Begrenzungsintegrale

$$3. \quad \int(\alpha \beta \epsilon \zeta \alpha) = \int(\beta \gamma \delta \beta) = 0,$$

und es ist daher

$$\int(z_0 \gamma \delta \epsilon \zeta z) = \int(z_0 \alpha z).$$

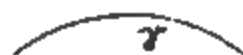
Wenn der Weg einen oder mehrere Unstetigkeitspunkte umkreist, so sind die Integrale 3. gleich Integralen, die in derselben Umlaufsrichtung über die Perimeter von beliebig kleinen je einen Unstetigkeitspunkt einschliessenden Flächen erstreckt sind.

Hieraus erkennt man: Wenn eine geschlossene Curve sich selbst schneidet, so ist das über dieselbe erstreckte Integral $\int w dz$ gleich Null, wenn die Curve keinen Unstetigkeitspunkt umkreist; werden von der Curve Unstetigkeitspunkte theils in positiver, theils in negativer Richtung umkreist, so ist das Integral gleich der Summe von Integralen, jedes über den Perimeter einer je einen Unstetigkeitspunkt enthaltenen beliebig kleinen Fläche in demselben Sinne erstreckt, in welchem die Curve den Punkt umkreist, mit der Anzahl der Umläufe multiplicirt, welche die Curve um den betreffenden Unstetigkeitspunkt macht.

7. Wir entwickeln nun einen Begriff, der für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung wird, nämlich den des einfachen oder mehrfachen Zusammenhangs einer vollständig begrenzten Fläche (wobei Begrenzungen durch einen mit unendlich grossem Radius um ein im Endlichen liegendes Centrum beschriebenen Kreis nicht ausgeschlossen werden sollen).

Unter einer einfach zusammenhängenden Fläche verstehen wir nach RIEMANN eine Fläche, die durch jeden Querschnitt, d. i. durch jede zwischen zwei Punkten der Begrenzung verlaufende sich selbst nicht schneidende Linie in zwei vollständig getrennte Theile zerlegt wird. Einfach zusammenhängend ist z. B. eine Kreisfläche, ferner der Theil einer zweiblättrigen Fläche, der durch eine geschlossene sich selbst nicht schneidende Curve vollständig begrenzt wird.

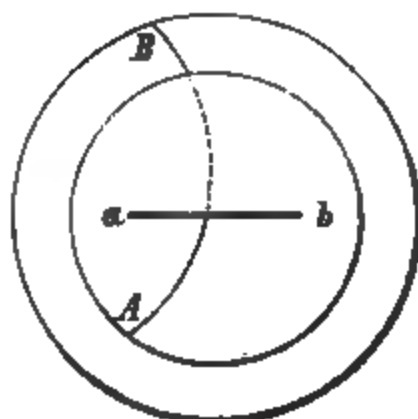
In einer einfach zusammenhängenden Fläche ist jede geschlossene Linie die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche. Denn gesetzt, die geschlossene Curve α zerlege die Fläche T in zwei Theile, T_1 und T_2 , von deren keinen sie die vollständige Begrenzung bildet, so muss der eine T_1 noch eine innere β , der andere T_2 noch eine äussere Grenzcurve γ haben, die sich nicht treffen. Zieht man nun von einem Punkte A auf β nach einem Punkte B auf γ eine Linie auf der Fläche, die sich nicht schneidet, so wird durch dieselbe die Fläche nicht zerstückt, folglich kann T nicht einfach zusammenhängend sein.



(M. 556.)

Eine Fläche heisst zweifach zusammenhängend, wenn sie durch einen einzigen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann, z. B. die Fläche T in Fig. 556; denn sie wird durch AB in eine einfach zusammenhängende verwandelt.

Zweifach zusammenhängend ist ferner der Theil einer mit zwei Windungspunkten a und b versehenen zweiblätterigen Fläche, der von zwei geschlossenen Linien begrenzt wird, die in den beiden Blättern so liegen, dass jede die Verwachsungslinie einmal umkreist (Fig. 557); der Querschnitt AB verwandelt sie in eine einfach zusammenhängende.



(M. 557.)

Eine Fläche heisst drei-, vier- u. s. w. fach zusammenhängend, wenn sie durch zwei, drei u. s. w. Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann. Hierbei soll jeder bereits hergestellte Querschnitt zur Begrenzung der Fläche gerechnet, durch weitere Querschnitte also nicht überschritten werden.

Die Fläche in Fig. 551 ist dreifach zusammenhängend; denn zieht man im oberen Blatte den Querschnitt CD , und im unteren EF , so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche.

Wenn die Function w für alle Punkte einer einfach zusammenhängenden Fläche T eindeutig und endlich ist, so ist das über irgend eine geschlossene Curve der Fläche ausgedehnte Integral $\oint w dz$ gleich Null, und das entlang irgend einer auf der Fläche liegenden Curve genommene Integral

$$\int_{s_0}^s w dz$$

ist unabhängig vom Integrationswege; ist s_0 eine absolute Constante, so ist das Integral daher eindeutig bestimmt für jeden (die obere Grenze bildenden) Punkt s der Fläche.

8. Wird der Integrationsweg I des Integrals

$$\int_{s_0}^s f(z) dz$$

über den Endpunkt s hinaus bis zu einem in irgend welcher Richtung liegenden hinlänglich nahen Punkte $s + \Delta s$ so verlängert, dass die Zunahme des Wegs und die des Integrals mit Δs verschwindet (also innerhalb der Verlängerung kein Unstetigkeitspunkt umkreist oder getroffen wird), so hat man

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z) dz = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z) dz$$

Bildet man die 1
schwindendes Δz über

in

1.

Der Differentialquotient des Integrals nach der oberen Grenze ist somit unabhängig von der Richtung, in welcher $z + dz$ gegen z liegt; wählt man diese Richtung einmal parallel der realen und dann parallel der imaginären Achse, so hat man nach 1., wenn man zur Abkürzung das Integral mit w bezeichnet,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

also

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Hieraus folgt: Das Integral einer complexen Function ist eine complexe Function der oberen Grenze.

9. Wir wenden uns nun zu einer werthvollen Anwendung der entwickelten allgemeinen Sätze.

Es sei Γ die vollständige Begrenzung einer Fläche T , und im Innern von T sei die Function $f(z)$ eindeutig und endlich; ferner sei t ein im Innern dieser Fläche gelegener Punkt, der nicht zugleich Windungspunkt ist. Alsdann hat die Function

$$\frac{f(z)}{z - t}$$

auf T nur den einen Unstetigkeitspunkt t , in welchem sie unendlich gross wird. Das Integral

$$\int \frac{f(z)}{z - t} dz,$$

ausgedehnt über die Begrenzung von T , ist dann gleich dem Integrale derselben Function, ausgedehnt über die Begrenzung einer beliebig kleinen Fläche, innerhalb deren der Unstetigkeitspunkt t liegt. Wir wählen zu dieser kleinen Fläche einen Kreis mit hinlänglich kleinem Radius ρ und dem Centrum t , setzen für Punkte dieses Kreises

$$z - t = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

und gehen auf dem Kreise von z zu einem unendlich nahen Punkte $z + dz$ über; dann ist

$$\begin{aligned} dz &= \rho (-\sin \varphi + i \cos \varphi) d\varphi, \\ &= i \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi, \\ &= i (z - t) d\varphi. \end{aligned}$$

Daher ist für die Integration entlang des Kreises

$$\int \frac{f(z)}{z-t} dz = i \int_0^{2\pi} f(z) d\varphi.$$

Nimmt ρ zur Grenze Null ab, so nähern sich alle Werthe, die $f(z)$ auf der Kreisperipherie hat, dem Werthe $f(t)$, den die Function im Centrum hat.

Daher ist

$$\lim \int \frac{f(z)}{z-t} dz = i f(t) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \cdot f(t).$$

Wir erhalten somit: Wird das Integral

$$\int \frac{f(z)}{z-t} dz$$

auf die vollständige Begrenzung einer Fläche T ausgedehnt, innerhalb welcher $f(z)$ eindeutig und endlich ist, so ist für jeden im Innern von T gelegenen Punkt t , der kein Windungspunkt ist,

$$1. \quad \int \frac{f(z)}{z-t} dz = 2\pi i f(t).$$

Hieraus folgt

$$2. \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-t} dz.$$

Der Werth, den eine Function für einen Punkt im Innern einer Fläche annimmt, auf welcher sie allenthalben endlich und eindeutig ist, lässt sich also durch ein Integral angeben, welches über die Begrenzung der Fläche erstreckt ist.

Differenzirt man beide Seiten von 2. nach t n mal, so erhält man

$$3. \quad f^{(n)}(t) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz.$$

Da nun für die Umgrenzung von T die Function

$$\frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}$$

allenthalben endlich ist, so folgt: Ist eine Function innerhalb einer Fläche T eindeutig und endlich, so gilt dasselbe auch von allen ihren Derivirten.

An die Formel 1. knüpft sich noch folgende Bemerkung. Um den Werth zu bestimmen, den das Integral

$$\int f(z) dz$$

hat, wenn man es über den Perimeter eines verschwindend kleinen Kreises erstreckt, für dessen Centrum a die Function $f(z)$ unendlich wird, während das Produkt $(z-a)f(z)$ endlich ist, setzen wir

$$\int f(z) dz = \int \frac{(z-a)f(z)}{z-a} dz$$

und erhalten daher nach 1., wenn a kein Windungspunkt ist,

$$4. \quad \int f(z) dz = 2\pi i \lim_{(z=a)} (z-a)f(z).$$

10. Die Formeln 1. und 2. führen zur Darstellung einer complexen Function in einer unendlichen Reihe nach steigenden oder fallenden Potenzen der Variabeln; wir schicken dieser Entwicklung einige allgemeine Bemerkungen über die Convergenz unendlicher Reihen mit complexen Gliedern voraus.

ichst, so wachsen alle Moduln $a_0, a_1 r, a_2 r^2, \dots$

alle möglich: Entweder es bleiben für alle endlichen Werthe von r alle diese Moduln endlich, oder sie bleiben bis zu einem endlichen Werthe $r = R$ endlich, werden aber zum Theil für $r = R$, und somit auch für $r > R$, unendlich gross.

Im ersten Falle convergirt die Reihe

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$$

für jedes endliche z ; im letzteren convergirt sie für jedes z , dessen Modulus kleiner als R ist, also für alle Punkte der Ebene, die im Innern des mit dem Halbmesser R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen, und divergirt für alle ausserhalb des Kreises liegende Punkte, da sie in denselben Glieder mit unendlichen Moduln erhält; für Punkte auf der Peripherie des Kreises mit Radius R , den wir den Convergenzkreis der Potenzreihe nennen, bleibt die Convergenz noch unentschieden und bedarf in jedem Falle einer besonderen Untersuchung.

11. Ist $f(z)$ endlich und eindeutig innerhalb eines Kreises, der auf der Variabelnfläche um das Centrum a beschrieben ist und der keinen Windungspunkt enthält, so ist für jeden Punkt t im Innern dieses Kreises

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - t} dz,$$

bei das Integral über den Perimeter des Kreises auszudehnen ist. Für jeden Punkt z dieses Perimeters ist

$$\text{mod}(z - a) > \text{mod}(t - a),$$

er hat man die convergente Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - t} &= \frac{1}{z - a - (t - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t - a}{z - a}} \\ &= \frac{1}{z - a} \left[1 + \frac{t - a}{z - a} + \left(\frac{t - a}{z - a} \right)^2 + \left(\frac{t - a}{z - a} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Setzt man dies in 1. ein und integrirt die einzelnen Glieder, was (nach 10) erlaubt ist, weil die Reihe für alle Punkte des Integrationsweges convergirt, und $f(z)$ innerhalb desselben nicht unendlich wird, so erhält man

$$2. \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - a} dz + \frac{t - a}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz + \frac{(t - a)^2}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z - a)^3} dz + \dots$$

Die Integrale in dieser Reihenentwicklung sind in No. 9 bestimmt worden; wir haben dort gefunden

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

und erhalten daher aus 2.

$$3. \quad f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} (t - a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} (t - a)^2 + \frac{f'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (t - a)^3 + \dots$$

Dies ist die Verallgemeinerung der TAYLOR'schen Reihe: die Entwicklung ist für alle Punkte t im Innern eines um a geschlagenen Kreises gültig, wenn die Function f innerhalb dieses Kreises endlich und eindeutig ist und keinen Windungspunkt hat.

Will man diesen Gültigkeitsbereich so viel als möglich erweitern, so hat man die Windungspunkte und die Punkte zu bestimmen, in denen $f(t)$ unendlich wird. Der Kreis darf dann nicht weiter als bis zu demjenigen dieser Punkte ausgedehnt werden, der a am nächsten liegt.

Wir se
in viel einf
in Betracht

des Restes fallen hier ganz weg; es bedarf nur der Bestimmung der Punkte, in welchen die Function unendlich gross wird.

Lassen wir in 3. den Punkt a mit dem Nullpunkte zusammenfallen, so entsteht die MACLAURIN'sche Reihe

$$4. \quad f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} z + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} \cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^3 + \dots$$

12. Wir schliessen hieran noch eine Bemerkung über Reihenentwicklung von der Form

$$1. \quad f(z) = A_0 + A_1 \cdot \frac{1}{z} + A_2 \cdot \frac{1}{z^2} + A_3 \cdot \frac{1}{z^3} + \dots$$

Ersetzen wir $1 : z$ durch ζ , so entsteht

$$2. \quad f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + \dots$$

Daher ist

$$A_0 = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)_{\zeta=0} = f(\infty), \quad A_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left[\frac{d^k f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^k} \right]_{\zeta=0};$$

die Entwicklung ist für alle Werthe von ζ gültig, deren Modul kleiner ist als der kleinste Modul der ζ , für welchen $f(1:\zeta)$ unendlich wird; also gilt 2. für alle z , deren Modul grösser ist als der grösste Modul der z , welche $f(z)$ unendlich gross machen. Ist daher a der vom Nullpunkte entfernteste Punkt der Variablenebene, für welchen $f(z)$ unendlich wird, so gilt die Reihe 1. für alle Punkte der Ebene, die ausserhalb des durch a um den Nullpunkt gezogenen Kreises liegen.

13. Wenn die Function $f(z)$ innerhalb und auf den Grenzen eines Ringes, der zwischen zwei um den Punkt a mit den Radien r_0 und r_1 geschlagenen Kreisen liegt, eindeutig und endlich ist, und die Variablenebene innerhalb der äusseren Begrenzung des Ringes keinen Windungspunkt hat, so ist das über die vollständige Begrenzung des Ringes erstreckte Integral

$$\int \frac{f(z)}{z-t} dz = 2\pi i f(t),$$

also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-t} dz.$$

Das Begrenzungsintegral besteht aus den Integralen entlang der beiden Kreise; bezeichnen wir dieselben mit $\int_{(r_0)}$ und $\int_{(r_1)}$, so ist

$$1. \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r_1)} \frac{f(z)}{z-t} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{(r_0)} \frac{f(z)}{z-t} dz.$$

Für das erste haben wir, da alle Punkte des Ringes im Innern des Kreises mit Radius r_1 liegen, nach No. 11

$$2. \quad \int_{(r_1)} \frac{f(z)}{z-t} dz = \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n} (t-a)^{n-1}, \quad u_{-n} = \int \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz,$$

wobei die Integrale u_{-n} über alle Punkte des Kreises r_1 im positiven Sinne zu erstrecken sind. Für die Punkte des Kreises r_0 ist

$$\text{mod}(z-a) < \text{mod}(t-a).$$

Daher haben wir die convergente Entwicklung

$$\frac{1}{z-t} = -\frac{1}{(t-a)-(z-a)} = -\frac{1}{t-a} \left[1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^2 + \dots \right].$$

Also ist

$$3. \quad \int_{(r_0)} \frac{f(z)}{z-t} dz = - \sum_0^{\infty} u_n (t-a)^{-n-1}, \quad u_n = \int_{(r_0)} (z-a)^n f(z) dz.$$

Die Integrale u_n sind über den Kreis mit Radius r_0 im Sinne der abnehmenden Winkel (im positiven Sinne bezüglich der Ringfläche) zu erstrecken. Nimmt man sie ebenso, wie die u_{-n} , im Sinne wachsender Amplituden, so kann man 1., 2. und 3. folgendermassen vereinen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} u_n (t-a)^{-n-1}, \quad u_n = \int f(z) (z-a)^n dz,$$

wobei alle Integrale über den Kreis mit Radius r_0 erstreckt werden können, weil für keinen Punkt der Ringfläche eine der Functionen

$$f(z) (z-a)^n$$

unendlich gross ist. Dies ergibt: Eine Function einer complexen Variablen, die innerhalb einer Ringfläche mit dem Centrum a eindeutig und endlich ist, kann für jeden im Innern des Ringes gelegenen Werth der Variablen t in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von $(t-a)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

14. Wenn die Function $f(z)$ für die im Innern des Kreises r_0 gelegenen Punkte a_k, a_l, a_m, \dots unendlich gross wird, und zwar im Punkte a_r so unendlich wie

$$\frac{F_r(z)}{(z-a_r)^r},$$

d. h. so, dass

$$\lim_{(z \rightarrow a_r)} (z-a_r)^m f(z) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } m < r, \\ F_r(z), & \text{,, } m = r, \\ 0, & \text{,, } m > r, \end{cases}$$

wobei $F_r(z)$ eine im Punkte a_r endliche Function bezeichnet, so zerfallen die Integrale u_n in Integrale, die über verschwindend kleine Kreise um die Punkte a_k, a_l, a_m, \dots und a erstreckt sind. Es ist z. B.

$$u_n = k_n + l_n + m_n + \dots + a_n,$$

wobei

$$k_n = \int f(z) (z-a)^n dz,$$

und das Integral über einen um a_k geschlagenen unendlich kleinen Kreis zu erstrecken ist. Für die Punkte dieses Kreises kann man setzen

$$f(z) = \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^k}, \quad z-a = a_k-a;$$

daher hat man

$$k_n = (a_k-a)^n \int \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^k} dz.$$

Nach No. 9 ist unter der Voraussetzung, dass die a nicht Verzweigungspunkte sind,

$$\int \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^k} dz = \frac{2\pi i}{k!} F_k^{k-1}(a_k),$$

wobei $F_k^{k-1}(a_k)$ den Werth bezeichnet, den



bestimmt. Dieser Faktor bleibt willkürlich; je nach Wahl desselben erhält man verschiedene Logarithmensysteme; die Zahl μ heisst der Modul des Systems. Als das natürliche Logarithmensystem bezeichnen wir das, für welches $f'(1) = 1$ genommen wird. Führen wir statt des allgemeinen Functionszeichens $f(x)$ hierfür das besondere $L(x)$ ein, so ist also

$$1. \quad L(x) = \int_1^x \frac{dz}{z}.$$

Werden die Logarithmen, für welche $f'(1)$ einer gegebenen Zahl μ gleich ist, mit $\text{Log}_\mu z$ bezeichnet, so ist

$$2. \quad \text{Log}_\mu z = \mu Lz.$$

Hiernach genügt es, ausschliesslich die Function $L(z)$ weiter zu untersuchen.

4. Die Function $1:z$ ist eine eindeutige Function der Punkte der Variabelebene und wird nur im Punkte $z = 0$ unendlich gross. Um den Einfluss zu erfahren, den der Integrationsweg auf das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

hat, haben wir daher den Werth zu berechnen, den das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

erhält, wenn es über den Perimeter eines den Nullpunkt umgebenden Kreises erstreckt wird. Setzen wir in § 13, No. 9

$$f(z) = 1:z, \quad a = 0,$$

so ergibt sich für das gesuchte Integral der Werth

$$1. \quad 2\pi i.$$

Hieraus folgt: Der natürliche Logarithmus ist eine unendlich vieldeutige Function; die demselben Punkte zugehörigen Werthe unterscheiden sich durch ganze Vielfache von $2\pi i$. Diese Grösse $2\pi i$ wird als der Periodicitätsmodul des Logarithmus bezeichnet.

Um den von z abhängigen Theil des Logarithmus zu bestimmen, wählen wir für das Integral

$$\int_1^z \frac{dz}{z}$$

einen Integrationsweg, durch den der reale und der imaginäre Theil der Function gesondert werden; wir integrieren, wenn $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $0 < \varphi < 2\pi$ zunächst auf der realen Achse von 1 bis r und dann auf einem Kreise um den Nullpunkt weiter von r bis zu z . Das erste Integral ist, da für diesen Theil des Integrationsweges $y = 0$ ist

$$2. \quad \int_1^r \frac{dx}{x} = l r,$$

wenn wir mit $l r$ den realen Werth von $L r$ bezeichnen.

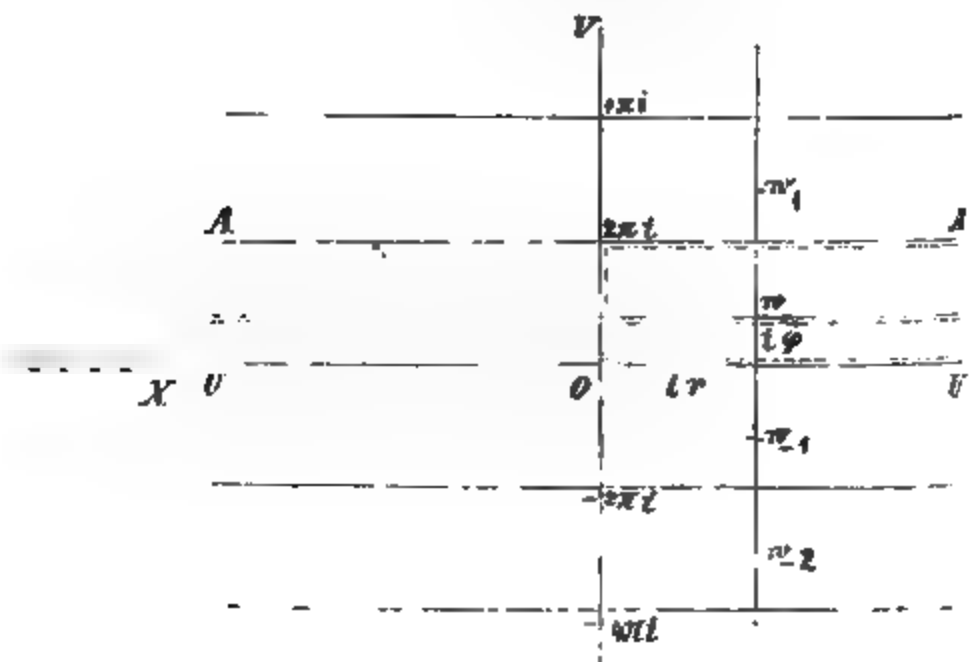
Für das zweite, das Kreisintegral, setzen wir

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

da für diesen Theil des Weges r constant ist, so ist

$$dz = r(-\sin\varphi + i\cos\varphi) d\varphi = i \cdot z d\varphi;$$

das Integral erstreckt sich von $\varphi = 0$ bis zur Amplitude von z , daher ist dasselbe

L_1
$$w = Lz$$
$$Lz = lr + i\varphi, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$
$$= lr + i\varphi + 2k\pi i, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$
 v_i 

(M. 558.)

e reale Strecke von 1 bis 0, so legt w die negative reelle Achse z von dem realen positiven Werthe r aus ein positiv ist die w -Fläche in $\frac{1}{2}$ des Maassstabes ausgeführt, wie die z -Fläche.

tiven Kreisbogen φ , so bleibt der reale Theil von Lz ungeändert gleich $\ln r$ und es tritt nur der imaginäre Bestandtheil $i\varphi$ hinzu, w beschreibt also eine Normale zur realen Achse bis zum Abstände φ von derselben. Allen Punkten eines in 0 begrenzten Strahls in der z -Fläche entsprechen also die Punkte einer Parallelen zur realen Achse, die durch den Punkt $i\varphi$ geht; der negativen realen Achse der z -Fläche entspricht insbesondere die durch πi gehende Parallele zur realen Achse der w -Ebene. Die Punkte der Geraden, in welcher die Blätter 0 und 1 zusammenhängen (ihr Grundriss ist OX) haben die Amplitude 2π ; dieser Grenzlinie entspricht daher die durch $2\pi i$ gehende Parallele zur realen Achse.

Allen Punkten des Blattes 0 der z -Fläche entsprechen daher die Punkte des Streifens $AA'UU'$ der w -Ebene; und umgekehrt, jedem Punkte w dieses Streifens entspricht eindeutig ein Punkt des Blattes 0 der z -Fläche, — der reale Theil von w ist nämlich der Logarithmus des Moduls von z , der imaginäre Theil von w ergibt sofort die Amplitude.

Der Logarithmus w_1 eines Punktes z_1 des Blattes 1 weicht vom Logarithmus des Punktes z im Blatte 0, der mit ihm gleichen Grundriss hat, nur um $2\pi i$ ab. Hieraus erkennen wir sofort, dass die Punkte des Blattes 1 sich auf dem Streifen der w -Ebene abbilden, dessen Ränder parallel zu OU durch $2\pi i$ und $4\pi i$ gehen. Theilt man die w -Ebene von der realen Achse aus in Streifen von der Breite 2π , so entsprechen den aufeinander folgenden Blättern der z -Fläche der Reihe nach die Streifen der w -Ebene. Durch diese Streifen wird die ganze w -Ebene erfüllt; wir schliessen daher: Jede complexe Zahl ist der natürliche Logarithmus einer eindeutig bestimmten Zahl.

7. Aus der Gleichung

$$L(1+z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z}$$

gewinnen wir mit Hülfe des TAYLOR'schen Satzes eine Potenzreihe für $L(1+z)$, Da die Variabelnfläche, von deren Punkten $L(1+z)$ eine eindeutige Function ist, im Punkte $1+z=0$, d. i. $z=-1$ einen Windungspunkt hat, und zugleich in diesem und in keinem andern Punkte, abgesehen von den Blättern $\pm\infty$, unendlich gross wird, so gilt die Entwicklung von $L(1+z)$ nach der TAYLOR'schen Reihe für alle Punkte im Innern des Kreises für welchen $\text{mod } z < 1$.

Wir haben nun

$$f(0) = k \cdot 2\pi i, f'(0) = +1, f''(0) = -1, f'''(0) = 1 \cdot 2, f^{(4)}(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \dots$$

$$\text{und daher } L(1+z) = k \cdot 2\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$\text{mod } z < 1.$$

Für die Punkte des Blattes 0 ist $k=0$ und daher

$$L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$\text{mod } z < 1.$$

8. Die natürliche Exponentialfunction. Als natürliche Exponentialfunction e^z der Variablen z bezeichnen wir die Grösse, deren natürlicher Logarithmus z ist.

Es giebt nur eine Zahl, deren natürlicher Logarithmus einer gegebenen Zahl gleich ist; die natürliche Exponentialfunction e^z ist daher eine eindeutige Function von z .*)

*) Man müsste eigentlich die natürliche Exponentialfunction von der vieldeutigen z ten Potenz von e durch ein besonderes Symbol unterscheiden; es ist dies aber nicht üblich. Wo das Zeichen e^z eine vieldeutige Potenz bedeuten soll, muss dies besonders mitgetheilt werden.

Potenz eines beliebigen Dignanden mit realem Exponenten. Ist
ergibt sich

$$\begin{aligned} a^z &= e^{(x+iy)(lp+ia)} \\ &= e^{(xlp-ya)} [\cos(xa + ylp) + i \sin(xa + ylp)]. \end{aligned}$$

Diese Function ist unendlich vieldeutig, weil a um gan
 2π vermehrt oder vermindert werden kann. Nur dann, wenn y
 x rational ist, tritt eine auf eine endliche Anzahl Werthe beschr
keit ein.

10. Die Function $Arctangz = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Durch Zerlegung in Partialbrüche entsteht

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \left(\int_0^z \frac{dz}{1+iz} + \int_0^z \frac{dz}{1-iz} \right).$$

Ersetzen wir im ersten Integrale $1+iz$, im zweiten $1-$
ergibt sich

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\int_1^{1+iz} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_1^{1-iz} \frac{d\zeta}{\zeta} \right)$$

Daher folgt

$$Arctangz = \frac{1}{2i} L \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Die Function $Arctangs$ ist also unendlich vieldeutig,
odul ist

$$\frac{1}{2i} 2\pi i = \pi.$$

Die Gleichung 1. ergibt nach der Fundamenteigenschaft

$$\begin{aligned} Arctangz + Arctangs_1 &= \frac{1}{2i} L \frac{1+iz}{1-iz} \cdot \frac{1+iz_1}{1-iz_1} \\ &= \frac{1}{2i} L \frac{1-zs_1 + i(z+z_1)}{1-zs_1 - i(z+z_1)} \\ &= \frac{1}{2i} L \frac{1+i \cdot \frac{z+z_1}{1-zs_1}}{1-i \cdot \frac{z+z_1}{1-zs_1}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$Arctangz + Arctangs_1 = Arctang \frac{z+z_1}{1-zs_1}$$

Ist ferner $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist

$$1+iz = 1-y+ix, \quad 1-iz = 1+y-ix$$

Folglich ist

$$L(1+iz) = l\sqrt{1+r^2-2y} + i \arctang \frac{x}{1-y} + k$$

$$L(1-iz) = l\sqrt{1+r^2+2y} + i \arctang \frac{x}{1+y} + k_1$$

Daher ist weiter

$$Arctang(x+iy) = \frac{1}{2i} l \sqrt{\frac{1+r^2-2y}{1+r^2+2y}} + \frac{1}{2} \arctang \frac{x}{1-y} + \frac{1}{2} \arctang \frac{x}{1+y}$$

us und Sinus, Arcuscosinus und Cosinus.

1 diesem Abschnitte Integrale von der Form

$$\sqrt{R} dz, \quad R = a + 2bz + cz^2$$

wenn f eine rationale Function von z und \sqrt{R} ist.

In § 4. ist gezeigt worden, wie durch eine rationale Substitution ein solches Integral in das Integral einer rationalen Function reducirt werden kann; wir wollen indess von dieser Substitution hier keinen Gebrauch machen, sondern die Untersuchung ohne Beseitigung der Irrationalität führen. Jede rationale Function von z und \sqrt{R} kann, wie leicht zu sehen ist, auf die Form gebracht werden

$$1. \quad f(z, \sqrt{R}) = \frac{\varphi_1 + \psi_1 \sqrt{R}}{\varphi + \psi \sqrt{R}},$$

wobei $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1$ rationale ganze Functionen von z sind. Aus 1. gewinnen wir durch Erweiterung mit $\varphi - \psi \sqrt{R}$

$$f(z, \sqrt{R}) = \frac{\Phi + \Psi \cdot \sqrt{R}}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R} + \frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Hiernach zerfällt das vorgelegte Integral

$$\int f(z, \sqrt{R}) dz = \int \frac{\Phi}{\varphi^2 - \psi^2 R} dz + \int \frac{\Psi \cdot R}{\varphi^2 - \psi^2 R} \cdot \frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Das erste Integral ist frei von Irrationalem und ist durch die Untersuchungen des vorigen Abschnitts erledigt. Im zweiten zerlegen wir den rationalen Factor in die Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen Function,

$$\frac{\Psi \cdot R'}{\varphi^2 - \psi^2 R} = \Lambda + \frac{M}{N},$$

wo Λ, M, N ganze Functionen sind, M von niederem Grade als N . Den Theil

$$\int \Lambda \cdot \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

reduciren wir nach § 4, No. 4; den Bruch $M:N$ zerlegen wir in Partialbrüche und wenden die in § 4, No. 5 angegebene Reduction an. Dies zusammenfassend erkennen wir: Das Integral

$$1. \quad \int f(z, \sqrt{R}) dz, \quad R = a + 2bz + cz^2,$$

wobei f rational in Bezug auf z und \sqrt{R} ist, zerfällt in eine rationale ganze Function von z , Logarithmen algebraischer Functionen von z , ein Produkt einer rationalen ganzen Function mit \sqrt{R} , und in Integrale der Form

$$2. \quad \int \frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Wir zerlegen den Radicanden in seine lineare Factoren

$$a + 2bz + cz^2 = c(\alpha - z)(\beta - z) = -c(\alpha - z)(-\beta + z),$$

ersetzen

$$z = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \zeta + \frac{\alpha + \beta}{2},$$

also

$$\alpha - z = \frac{\alpha - \beta}{2} (1 - \zeta), \quad -\beta + z = \frac{\alpha - \beta}{2} (1 + \zeta),$$

und erhalten hierdurch

2. Die Function $\text{Arcsin } z$ definiren wir durch das bestimmte Integral

$$\text{Arcsin } z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Die Function $1/\sqrt{1-z^2}$ ist eine eindeutige Function der Punkte einer zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche (§13, No. 26) welche die beiden Windungspunkte $+1$ und -1 hat und deren beide Blätter entlang der Geraden zwischen den Windungspunkten verwachsen sind; in beiden Windungspunkten wird die Function unendlich.

Um zu erfahren, welchen Einfluss der Integrationsweg auf das Integral hat, haben wir das Integral über die geschlossenen Wege zu erstrecken, welche Windungspunkte einschliessen. Diese Wege lassen sich auf folgende Arten von Wegen zurückführen: 1. Wege, die einen einzigen Windungspunkt umkreisen und daher sich in beide Blätter begeben müssen, 2. Wege, die beide Windungspunkte umkreisen und nur in einem Blatte verlaufen; zur ersten Art gehören

die Wege Fig. 559, A und B , zur andern C und D .

Um die Umkreisungsintegrale der ersten Art zu erhalten, integrieren wir über einen Weg, der einen constanten verschwindend kleinen Abstand von $+1$ hat. Bezeichnen wir mit r den Abstand des Punktes z von $+1$, und mit φ den Winkel der realen Achse mit r , so ist

$$z = 1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ = 1 + r e^{i\varphi},$$

daher ist zu untersuchen

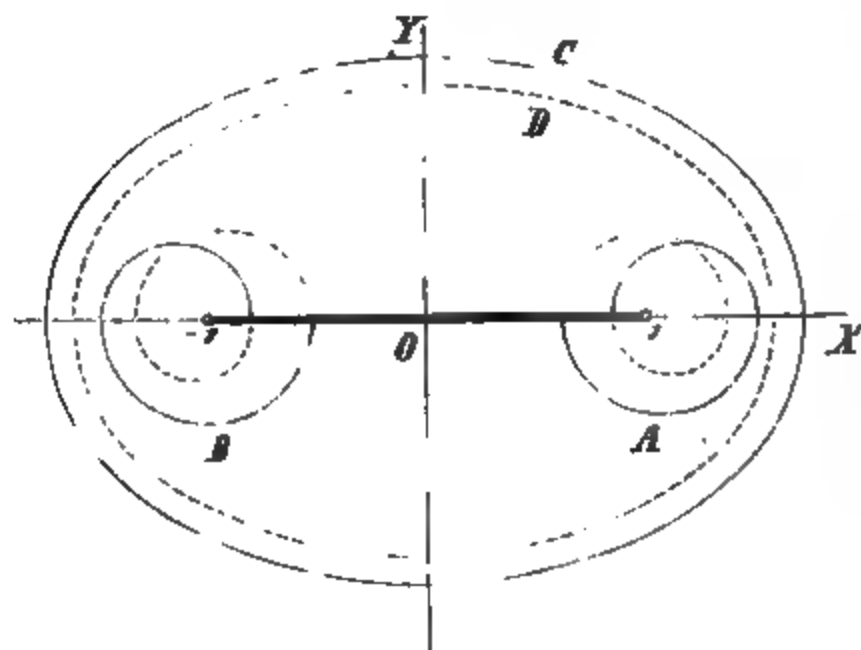
$$\lim_{r \rightarrow 0} i r \int_0^{4\pi} \frac{e^{i\varphi} d\varphi}{\sqrt{1 - 2r e^{i\varphi} - r^2 e^{2i\varphi}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \cdot \int_0^{4\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}} d\varphi}{\sqrt{2 + r e^{i\varphi}}}.$$

Nimmt r unendlich ab, so bleibt die unter dem Integralzeichen stehende Function, also auch das Integral selbst, endlich; da es mit einem verschwindenden Faktor multiplicirt wird, so ist der Grenzwert Null. Wir sehen daher.

Das Integral

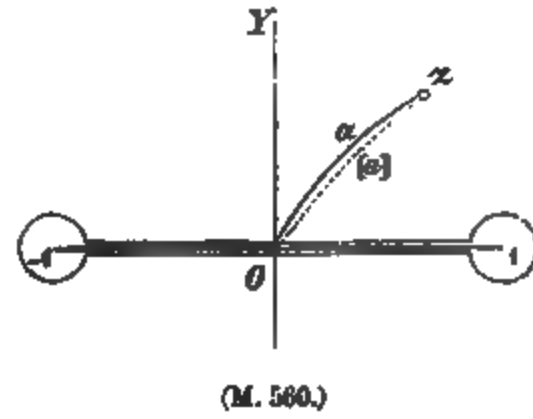
$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ausgedehnt über eine geschlossene Curve, die nur einen Windungspunkt umkreist, ist Null.



(M. 559.)

sich mit den Wegen der zweiten Art. Um über diese zu urtheilen, wollen wir C (Fig. 560) auf folgenden Weg zusammenziehen. Wir gehen vom Nullpunkte aus entlang der realen Achse bis dicht an $+1$, beschreiben dann um $+1$ einen verschwindend kleinen Kreis bis dicht an die Verwachsung (also ganz im oberen Blatte) gehen dann entlang der realen Achse bis dicht an -1 , beschreiben einen verschwindend kleinen Kreis um -1 , und en dann entlang der realen Achse zum punkte zurück. Die Kreisintegrale sind



$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}} d\varphi}{\sqrt{2 + r e^{i\varphi}}} \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{e^{i\varphi}} d\varphi}{\sqrt{-2 + r e^{i\varphi}}},$$

erschwinden beide. Für die geradlinigen Integrale von 0 bis 1, von 1 bis 0, 0 bis -1 und von -1 bis 0 haben wir auf das Vorzeichen zu achten, $\sqrt{1-x^2}$ auf diesen Wegen hat. Wir wollen annehmen, im Nullpunkte des en Blattes sei die Wurzel $= +1$; alsdann ist sie auf dem ersten Theile Weges, von 0 bis $+1$, positiv; durch einmaliges Umdrehen eines Windungs-tes wechselt die Wurzel das Vorzeichen, für den Weg von $+1$ über 0 bis gilt also der negative Wurzelwerth; durch einmaliges Umdrehen des dungspunktes -1 tritt dann nochmaliger Zeichenwechsel ein, auf dem e von -1 bis 0 zurück gilt daher wieder das positive Vorzeichen. Es daher das gesuchte Begrenzungsintegral, wenn überall die Wurzel positiv chnet wird,

$$J = \int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{+1}^0 \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{-1} \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ersetzt man im ersten und zweiten Integrale x durch $-x$, so erhält man

$$J = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi.$$

Integriert man in der gleichen Richtung über den Weg, der im zweiten Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, so hat auf allen Punkten dieses Weges die Wurzel das andere Vorzeichen, also ist dieses Integral $J_1 = -2\pi$. Beachten wir, dass die soeben verwendete Integrationsrichtung negativ war, so folgt:

Das Integral $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ im positiven Sinne über eine geschlossene Curve erstreckt, die in einem Blatte liegt und beide Windungspunkte einmal umkreist, ist -2π ; das obere Zeichen gilt für das Blatt, in dessen Nullpunkte die Wurzel den Werth $+1$ hat.

Hieraus folgt weiter: Die Function $\text{Arcsin } z$ ist unendlich vieldeutig, und hat den realen Periodicitätsmodul 2π .

3. Um das Integral $\text{Arcsin } z$ auszuführen, benutzen wir die Differentialformel

$$\frac{d(z + \sqrt{z^2 - 1})}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{i} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Aus dieser Formel folgt c

1. Arc

Durch diese Gleichung hat
des *Arctang* z direkt an den
erschien es zweckmässiger, die
Betrachtung des Integrals $\int dz$
winnen. Wir werden jetzt von
den Imaginären zu sondern.

$$iL \frac{z}{-}$$

so ist $L \frac{z}{-}$

mithin $z + \sqrt{z}$

Der reciproke Werth ist

$$z - \sqrt{z}$$

Addiren wir diese Gleichung

2. $\frac{1}{2}(e^v + e^{-v}) \sin$

Hieraus folgt weiter

$$x^2 + y^2 =$$

mithin ist $1 + x^2 + y^2 =$

und daher $(1 + x)^2 +$
 $(1 - x)^2 +$

Hieraus ergibt sich

3. $\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})$

$$\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})$$

für reale v und u ist

$$\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})$$

daher gelten bei beiden Wur.
Abkürzungen

$$\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x)^2} +$$

$$\frac{1}{2}[\sqrt{(1+x)^2} -$$

so ergibt sich aus 3.

4.

5.

Aus 5. folgt

6.

Aus 4. ergibt sich

7.

$$e$$

8.

$$v$$

Führen wir 6. und 8. in

$$\text{Arcsin } z = \text{Arc}$$

4. Wir haben noch zu ein
Vorzeichen von $\sqrt{1-z^2}$ gilt.

Aus No. 3, 2 folgt, dass

Durch Subtraction der in

1. $\sqrt{1-z^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+z^2} +$

Bezeichnet man die Abstände eines Punktes P des oberen Blattes von den Punkten $+1$ und -1 mit ρ und ρ_1 , sowie mit φ den Winkel, um den ρ in positiver Richtung (entgegengesetzt den Uhrzeigern) gedreht werden muss, um mit der von $+1$ nach -1 sich erstreckenden Geraden zusammenzufallen, und mit φ_1 den kleinsten Winkel, um den ρ_1 zu drehen ist, um mit der von -1 nach $+1$ sich erstreckenden Geraden zusammenzufallen, rechnet φ_1 positiv oder negativ, je nachdem die Drehungsrichtung negativ oder positiv ist und nimmt für den Nullpunkt des oberen Blattes $\sqrt{1-z^2} = +1$ (nicht -1) an, so ist für jeden Punkt des oberen Blattes, wie man sich leicht überzeugt

2. $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{\rho\rho_1} \cdot [\cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) + i \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)],$
 wodurch nun diese Wurzel ohne jede Zweideutigkeit bestimmt ist. Vergleicht man dies mit 1. und bemerkt, dass $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$ positiv ist, so erkennt man, dass $\cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$ und $\cos u$ gleiche Zeichen haben.

Durch die beiden Bemerkungen, dass $\sin u$ mit x und $\cos u$ mit $\cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$ dem Vorzeichen nach übereinstimmt, ist u bis auf ein ganzes Vielfaches von 2π unzweideutig bestimmt. Die Untersuchung der Werthe von $\varphi + \varphi_1$ ergibt ohne Schwierigkeit folgende Uebersicht

- Ist $x > 0, y > 0$, so ist $0 < u < \frac{1}{2}\pi$;
 „ $x > 0, y < 0$, „ „ $\frac{1}{2}\pi < u < \pi$.
 3. „ $x < 0, y < 0$, „ „ $\pi < u < \frac{3}{2}\pi$;
 „ $x < 0, y > 0$, „ „ $\frac{3}{2}\pi < u < 2\pi$;

Aus 3. folgt, dass y dasselbe Vorzeichen hat, wie $\cos u$; da nun nach No. 3, 7

$$\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1) = \sqrt{\sigma^2 - 1},$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf No. 3, dass $\sqrt{\sigma^2 - 1}$ für Punkte des oberen Blattes positiv zu nehmen ist.

Bezeichnet (τ) den absoluten Werth von τ , so erhält man daher

$$\operatorname{Arcsin} z = \begin{cases} \arcsin(\tau) \\ \pi - \arcsin(\tau) \\ \pi + \arcsin(\tau) \\ 2\pi - \arcsin(\tau) \end{cases} + i l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) + 2k\pi.$$

Die vier Zeilen gelten der Reihe nach für Punkte der Quadranten $+x, +y$; $+x, -y$; $-x, -y$; $-x, +y$; dabei ist zu beachten, dass die Verwachsung als Doppellinie aufzufassen ist, als Uebergang von der $(+Y)$ -Seite des oberen Blattes zur $(-Y)$ -Seite des unteren, so wie als Uebergang von der $(-Y)$ -Seite des oberen zur $(+Y)$ -Seite des unteren; für zwei Punkte der Verwachsung, die geometrisch identisch sind, aber als verschiedenen Uebergängen angehörig betrachtet werden, haben die zugehörigen Functionen $\operatorname{Arcsin} z$ die Differenz $\pm \pi$.

5. Um zu entscheiden, welche Werthe $\operatorname{Arcsin} z$ für einen Punkt des unteren Blattes hat, wollen wir einen solchen Punkt mit (z) bezeichnen, zum Unterschiede von dem im oberen Blatte über ihm liegenden Punkte z . Wir integrieren nun auf irgend einem Wege (Fig. 560) im oberen Blatte von 0 bis z und erhalten

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \operatorname{Arcsin} \tau + i l(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) + 2k\pi.$$

Um nun das Integral von 0 bis (z) zu erhalten, benutzen wir folgenden Integrationsweg: Wir gehen von 0 auf der realen Achse bis dicht vor $+1$, umgehen dann in einem verschwindenden Kreise den Punkt $+1$, kehren entlang der realen Achse bis zum Nullpunkte zurück, und verfolgen dann weiter bis (z)

den Weg (α), der im z
Elemente des Integrals

den Elementen des tibe

entgegengesetzt gleich, wegen der entgegengesetzt gleichen Werthe, welche $\sqrt{1-z^2}$ in zwei unter einander liegenden Punkten hat; folglich ist entlang α und (α

$$\int_{(0)}^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da nun das Kreisintegral verschwindet, und jedes der beiden entlang realen Achse erstreckten den Werth $\frac{1}{2}\pi$ hat, so folgt

$$\int_0^{(z)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi - \text{Arcsin } z.$$

Daher ist für Punkte des unteren Blattes

$$12. \quad \text{Arcsin}(z) = \pi - \text{Arcsin } z,$$

wobei z den über dem Punkte (z) des unteren Blattes liegenden Punkt oberen Blattes bezeichnet.

6. Die Function $(1+z)^m$, in welcher unter m ein realer echter oder echter Bruch verstanden werden mag, hat einen Windungspunkt in $z = -1$ in dem sie unendlich wird, wenn $m < 0$; sie kann daher für alle Werthe, deren Modul < 1 ist, nach steigenden Potenzen von z entwickelt werden. Die binomische Reihe

$$1. \quad (1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \dots$$

gilt daher für alle complexen z , deren Modul < 1 .

Die linke Seite ist m -deutig, die rechte nur eindeutig. Die rechte reducirt sich für $z = 0$ auf 1, und ändert sich mit z stetig. Construiren wir m -blättrige RIEMANN'sche Fläche, für welche $(1+z)^m$ eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche ist, so stellt die unendliche Reihe den Werth der Function für die Punkte im Innern des Kreises auf der Fläche dar, für deren Centrum $(1+z)^m = 1$ ist; die Functionswerthe für die andern Blätter ergeben sich durch Multiplication der Reihe mit den m ten Wurzeln der Einheit.

Ersetzen wir in 1. z durch $-z^2$ und nehmen $m = -\frac{1}{2}$, so entsteht

$$2. \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^6 + \dots$$

$\text{mod } z < 1.$

Die Integration dieser Reihe liefert

$$3. \quad \text{Arcsin } z = \frac{z}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^7}{7} + \dots + 2k\pi$$

$\text{mod } z < 1.$

Diese unendliche Reihe giebt die Werthe von $\text{Arc sin } z$ für die Punkte z desselben Kreises, für welche die Reihe 2. die Werthe von $1 : \sqrt{1 - z^2}$ liefert. Wenn wir in der Gleichung

$$\text{Arc sin } z = iL \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{i},$$

z durch iz ersetzen, so entsteht

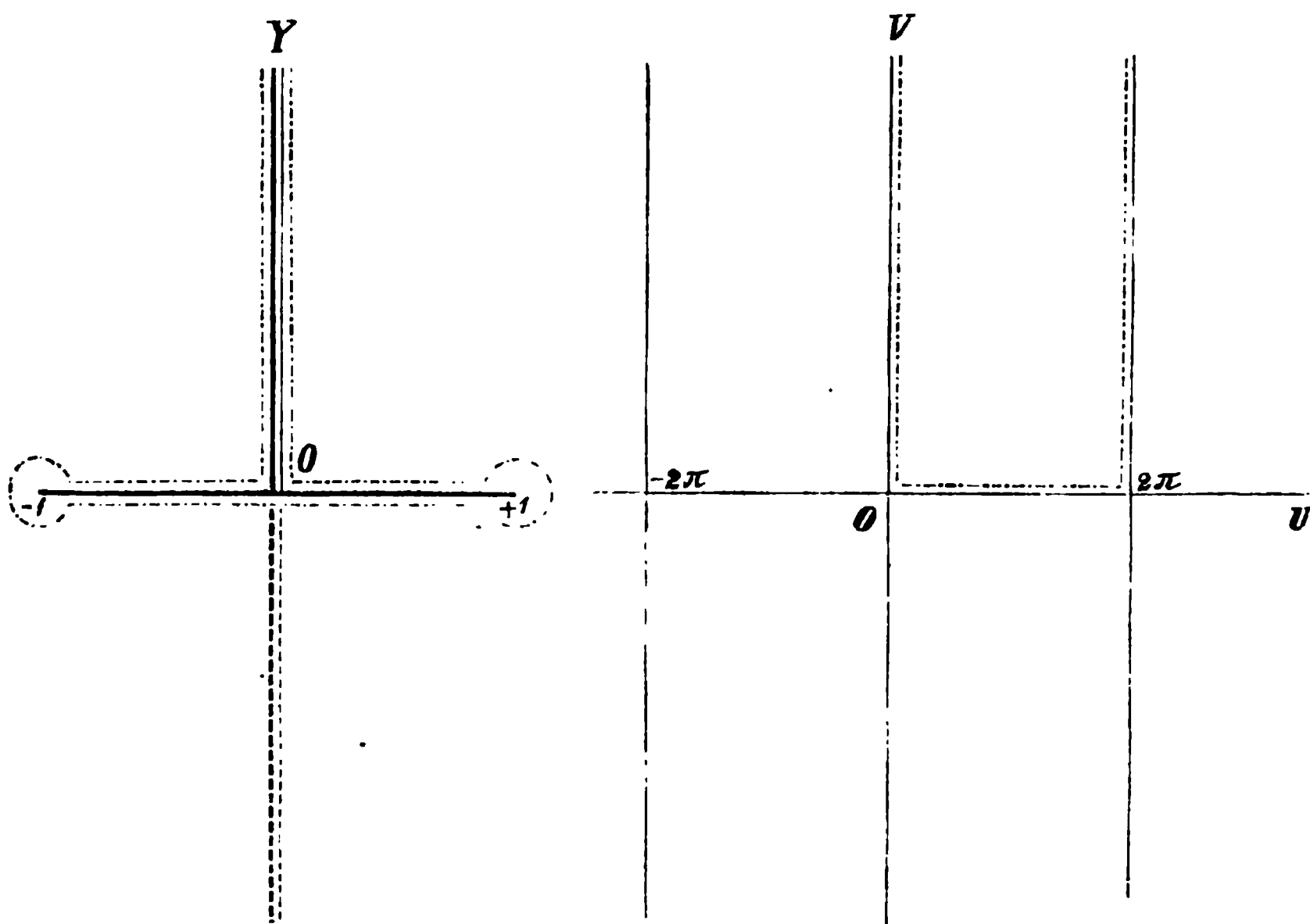
$$\text{Arc sin } iz = iL(z + \sqrt{z^2 + 1});$$

wird dieselbe Substitution in 3. ausgeführt, so ergibt sich

$$4. \quad L(z + \sqrt{z^2 + 1}) = \frac{z}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^7}{7} + i \cdot 2k\pi$$

$$\text{mod } z < 1.$$

7. Wollen wir $\text{Arc sin } z$ als eindeutige Function des Ortes der für $1 : \sqrt{1 - z^2}$ construirten RIEMANN'schen Fläche darstellen, so muss die Fläche, die zweifach zusammenhängend ist, durch einen geeigneten Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden. Zu diesem Zwecke zerschneiden wir die z -Fläche im oberen Blatte entlang der positiven imaginären Achse, und setzen diesen Schnitt über die Verwachsung hinweg ins untere Blatt fort. (In Fig. 561 ist der Schnitt durch eine Doppellinie angedeutet, durch welche die beiden Ränder



(M. 561.)

des Schnittes dargestellt werden sollen). Den Nullpunkt, von welchem die Integration ausgeht, nehmen wir, wie immer, im oberen Blatte, oberhalb der Verwachsung und rechts vom Querschnitte an.

Wird ferner angenommen, dass $\text{Arc sin } z$ für den Nullpunkt den Werth $2k\pi$ hat, wo nun k eine bestimmte reale ganze Zahl bedeutet, so ist für jeden Punkt der z -Fläche die Function $\text{Arc sin } z$ eindeutig bestimmt, wenn wir festsetzen, dass die z -Fläche durch die Ränder des Querschnitts begrenzt ist, dass also die Integrationscurve den Querschnitt nirgends überschreiten darf. Um von einem Punkte des Querschnitts zu dem auf dem andern Rande gegenüberliegenden Punkte zu gelangen, haben wir eine Curve zu beschreiben, die beide Windungs-

Hieraus folgt, dass die Abscissen u_0 und u_0' der Parallelen zur V -Achse, die zwei sich deckenden Hyperbeln entsprechen, die Summe π oder 3π haben.

Hieraus erkennen wir: Jedem Punkte des Streifens der w -Ebene entspricht ein und nur ein Punkt der z -Fläche.

Wenn wir nun die Function $\text{Arc sin } z$ im Nullpunkte statt mit dem Werthe Null mit den Werthen

$$\dots - 6\pi, - 4\pi, - 2\pi, + 2\pi, + 4\pi, + 6\pi \dots$$

beginnen lassen, so ist ersichtlich, dass den Punkten der z -Fläche immer andere Streifen der w -Ebene entsprechen, alle normal zur U -Achse und von der Breite 2π , so dass nun die ganze W -Ebene von solchen Streifen bedeckt wird.

9. Das Additionstheorem für den Arcussinus. Neben den Additionstheoremen für den Logarithmus und Arcustangens

$$Lz + L\zeta = L(z\zeta),$$

$$\text{Arc tang } z + \text{Arc tang } \zeta = \text{Arc tang } \frac{z + \zeta}{1 - z\zeta},$$

existirt ein verwandtes Theorem für den Arcussinus, das für reale Werthe der Variablen bereits aus den Elementen bekannt ist. Die Aufgabe, die Summe

$$\text{Arc sin } z + \text{Arc sin } \zeta$$

einen Arcussinus einer Function von z und ζ darzustellen, kann geometrisch gelöst werden: Sei

$$\text{Arc sin } z = u + iv, \quad \text{Arc sin } \zeta = u + iv,$$

so

$$\text{Arc sin } z + \text{Arc sin } \zeta = u + u + i(v + v).$$

Der Geraden der w -Ebene, die im Abstände $u + u$ zur V -Achse parallel ist, entspricht ein Hyperbelast der z -Fläche; der Geraden, die im Abstände $v + v$ zur U -Achse parallel ist, entspricht eine Ellipse der z -Fläche; der Hyperbelast mit der Ellipse auf der z -Fläche nur einen wirklichen Schnittpunkt; wird er mit Z bezeichnet, so ist

$$\text{Arc sin } z + \text{Arc sin } \zeta = \text{Arc sin } Z,$$

ist Z die Lösung der Aufgabe.

Frei von geometrischen Betrachtungen erreichen wir das Ziel folgendermassen: Wir bestimmen zunächst den Functionszusammenhang zwischen z und ζ , für welchen die Gleichung erfüllt ist

$$1. \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = c.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass unendlich kleine von z und ζ herrührende Zunahmen beider Integrale die Summe Null haben müssen, dass also

$$2. \quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.$$

Werden die Nenner beseitigt, so entsteht

$$\sqrt{1-\zeta^2} dz + \sqrt{1-z^2} d\zeta = 0.$$

Hier integrieren wir theilweis und erhalten

$$z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} + \int z\zeta \left(\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right) = \text{Const.}$$

Das letzte Integral verschwindet gemäss der Gleichung 1., daher ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zu

$$3. \quad z\sqrt{1-\zeta^2} + \zeta\sqrt{1-z^2} = \gamma.$$

Um den Zusammenhang der Constanten γ und c zu erkennen, vergleichen

$$\cos z = \operatorname{Arc} \sin 1 - \operatorname{Arc} \sin z,$$

und benutzt 2. indem man z_1 durch 1 ersetzt, so folgt

$$3. \quad \operatorname{Arc} \cos z = \operatorname{Arc} \sin \sqrt{1 - z^2}.$$

Welchen Werth der Quadratwurzel man hierin zu nehmen hat, ist ebenso wenig unbestimmt, wie bei den Quadratwurzeln im Additionstheorem.

Ist $\operatorname{Arc} \cos z = w$, so gehört zu jedem w ein eindeutig bestimmtes z . Wir definiren die Function $z = \cos w$ als die Zahl, welche der Gleichung genügt

$$\operatorname{Arc} \cos z = w;$$

es ist mithin $\cos w$ eine eindeutige Function von w . Aus der Vieldeutigkeit von $\operatorname{Arc} \cos z$ folgt: Die Function $\cos w$ ist periodisch und hat die reale Periode 2π . Aus 3. folgt

$$4. \quad \cos w = \sqrt{1 - \sin^2 w}.$$

Schreibt man für 1.

$$\operatorname{Arc} \sin z = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc} \cos z,$$

und setzt $\operatorname{Arc} \cos z = w$, so folgt $z = \sin(\frac{1}{2}\pi - w)$, oder

$$5. \quad \cos w = \sin(\frac{1}{2}\pi - w).$$

Durch 5. ist vollständig bestimmt, welcher Werth der Quadratwurzel in 4. zu nehmen ist. Ferner folgt aus 5. und No. 7

$$6. \quad \cos(u + iv) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \cos v - i \frac{e^u - e^{-u}}{2} \sin v.$$

Setzt man im

$$\operatorname{Arc} \sin z + \operatorname{Arc} \sin \zeta = \operatorname{Arc} \sin(z\sqrt{1 - \zeta^2} + \zeta\sqrt{1 - z^2}),$$

$$\operatorname{Arc} \sin z = w, \quad \operatorname{Arc} \sin \zeta = w,$$

so folgt

$$7. \quad \sin(w + w) = \sin w \cos w + \cos w \sin w,$$

und hieraus, wenn man w durch $\frac{1}{2}\pi - w$ ersetzt,

$$8. \quad \cos(w - w) = \cos w \cos w + \sin w \sin w.$$

12. Ist $w = \operatorname{Arc} \sin z$, so ist

$$dw = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

mithin

$$dz = \sqrt{1 - z^2} dw,$$

u. i.

$$d \sin w = \cos w dw.$$

Hieraus folgt, dass die für reale w bewiesenen Differentialquotienten des Sinus und Cosinus auch für complexe w unverändert gelten. Da nun $\sin w$ und $\cos w$ für alle endlichen $w = u + iv$ endlich bleiben, so folgt, dass die TAYLORschen Reihen

$$\sin w = w - \frac{w^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{w^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots,$$

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{1 \cdot 2} + \frac{w^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{w^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

für alle endlichen Werthe von w gültig sind.

§ 16. Definition des elliptischen Integrals, Reduction auf die Normalformen; Vieldeutigkeit elliptischer Integrale.

1. Unter einem elliptischen Integrale versteht man jedes Integral von der Form

$$\int f(z, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dz,$$

wobei f eine rationale Function von z und der Quadratwurzel bezeichnet, unter

der Voraussetzung,
Coefficienten $a \dots$
oder cyclometrisch

2. Wir beschä

durch eine rationale Substitution zu transformiren. Zu diesem Zwecke zerlegen wir den Radicanden in seine linearen Faktoren; es sei

$$az^4 + \dots + e = a(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta).$$

Hierauf setzen wir

$$z = \frac{U}{V},$$

worin U und V Polynome einer neuen Variablen ζ bezeichnen mögen, und zwar beide vom Grade p , oder U vom Grade p , V vom Grade $p - 1$. Hierdurch erhalten wir

$$\sqrt{az^4 + \dots + e} = \frac{1}{V^2} \sqrt{(U - \alpha V)(U - \beta V)(U - \gamma V)(U - \delta V)}.$$

Soll nun der transformirte Ausdruck nicht wesentlich complicirter erscheinen als der ursprüngliche, so muss die rechts stehende Wurzel in das Produkt einer rationalen Function mit einer Wurzel aus einem Polynom vierten Grades zerfallen; es müssen daher in der Function

$$(U - \alpha V)(U - \beta V)(U - \gamma V)(U - \delta V)$$

alle linearen Faktoren doppelt vorkommen, ausgenommen vier, welche dann den Radicanden zusammensetzen.

Zwei der vier Functionen

$$U - \alpha V, \quad U - \beta V, \quad U - \gamma V, \quad U - \delta V$$

können nicht einen gemeinsamen linearen Faktor haben; denn derselbe würde dann auch gemeinsamer Faktor von U und V sein, während doch als selbstverständlich vorauszusetzen ist, dass U und V keinen gemeinsamen Faktor haben. Die noch unbestimmten Functionen U und V sind daher so zu wählen, dass ausser vier einfachen linearen Faktoren jede der Functionen $U - \alpha V, U - \beta V, U - \gamma V, U - \delta V$ nur lineare Faktoren doppelt enthält.

3. Es ist bemerkenswerth, dass durch jede solche Substitution das einfachste elliptische Differential, als welches

$$\frac{dz}{\sqrt{a(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)}}$$

zu bezeichnen ist in

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{a_1 \zeta^4 + b_1 \zeta^3 + c_1 \zeta^2 + d_1 \zeta + e_1}},$$

also in ein Differential von derselben Form, transformirt wird.

Ist nämlich in Folge der Substitution

$$\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)} = \frac{M}{V^2} \sqrt{a_1 \zeta^4 + \dots + e_1},$$

so ist

$$\frac{dz}{\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)}} = \frac{1}{M\sqrt{a_1 \zeta^4 + \dots}} \left(V \frac{dU}{d\zeta} - U \frac{dV}{d\zeta} \right) d\zeta.$$

Jeden linearen Faktor, der in $U - \alpha V$ doppelt vorkommt, enthält M einfach; es lässt sich nun leicht nachweisen, dass jeder solche Faktor auch in $VU' - UV'$ aufgeht. Hierzu bemerken wir zunächst, dass, wenn die ganze Function $\varphi(\zeta)$ den linearen Faktor $m\zeta + n$ doppelt enthält, wenn also

$$\varphi(\zeta) = (m\zeta + n)^2 \cdot \psi(\zeta),$$

für den Differentialquotienten nach ζ sich ergibt

$$\begin{aligned} \varphi' &= (m\zeta + n)^2 \cdot \psi' + 2m(m\zeta + n) \cdot \psi \\ &= (m\zeta + n) [(m\zeta + n) \psi' + 2m\psi]. \end{aligned}$$

Wir sehen daher: Jeder lineare Faktor, der in φ doppelt vorkommt, theilt auch φ' .

Da nun

$$VU' - UV' = V \cdot \frac{d(U - \alpha V)}{d\zeta} - (U - \alpha V) \frac{dV}{d\zeta},$$

und da nach dem soeben bewiesenen Satze jeder Doppelfaktor von $U - \alpha V$ auch ein Faktor von $d(U - \alpha V) : d\zeta$ ist, so folgt, dass jeder Doppelfaktor von $U - \alpha V$ auch Faktor der Function $VU' - UV'$ ist.

Die Function M ist vom Grade $2p - 2$. Sind U und V beide vom Grade p , etwa

$$\begin{aligned} U &= m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + m_2\zeta^{p-2} + \dots \\ V &= n\zeta^p + n_1\zeta^{p-1} + n_2\zeta^{p-2} + \dots \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} VU' - UV' &= (n\zeta^p + n_1\zeta^{p-1} + \dots) \cdot [pm\zeta^{p-1} + (p-1)m_1\zeta^{p-2} + \dots] \\ &\quad - (m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + \dots) \cdot [pn\zeta^{p-1} + (p-1)n_1\zeta^{p-2} + \dots] \\ &= (mn_1 - nm_1)\zeta^{2p-2} + \dots \end{aligned}$$

Ist V vom Grade $p - 1$, etwa

$$V = n\zeta^{p-1} + n_1\zeta^{p-2} + \dots$$

so ist

$$\begin{aligned} VU' - UV' &= (n\zeta^{p-1} + n_1\zeta^{p-2} + \dots) [pm\zeta^{p-1} + (p-1)m_1\zeta^{p-2} + \dots] \\ &\quad - (m\zeta^p + m_1\zeta^{p-1} + \dots) [(p-1)n\zeta^{p-2} + (p-2)n_1\zeta^{p-3} + \dots] \\ &= mn\zeta^{2p-2} + \dots \end{aligned}$$

In beiden Fällen hat also $VU' - UV'$ den Grad $2p - 2$. Da nun M und $VU' - UV'$ gleichen Grades sind, und jeder Faktor von M auch in $VU' - UV'$ enthalten ist, so folgt, dass der Quotient

$$\frac{VU' - UV'}{M}$$

eine reine Zahl ist^{*)}.

4. Jede lineare Substitution

$$s = \frac{\lambda + \mu\zeta}{1 + \nu\zeta}$$

nügt den angegebenen Bedingungen in einfachster Weise; denn in diesem Falle ist

$$U = \lambda + \mu\zeta, \quad V = 1 + \nu\zeta,$$

so sind $U - \alpha V \dots$ sämmtlich linear. Man kann daher über die unbestimmten Zahlen λ, μ, ν so verfügen, dass der Radicand des transformirten Differential

$$a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + c_1\zeta^2 + d_1\zeta + e_1$$

die möglichst einfache Gestalt erhält, nämlich so, dass

$$a_1\zeta^4 + b_1\zeta^3 + \dots + e_1 = A(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2),$$

woin k noch unbestimmt ist.

Alsdann hat $a_1\zeta^4 + \dots$ die linearen Faktoren

$$\zeta - 1, \quad \zeta + 1, \quad \zeta - \frac{1}{k}, \quad \zeta + \frac{1}{k}.$$

Den Werthen von s_1 , für welche

$$(s - \alpha)(s - \beta)(s - \gamma)(s - \delta)$$

^{*)} JACOBI, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiomonti 1829. § 3. 4.

$$12. \quad \begin{aligned} z - \alpha &= (\lambda - \alpha) \cdot \frac{1 - \zeta}{1 + v\zeta}, & z - \gamma &= (\lambda - \gamma) \cdot \frac{1 - k\zeta}{1 + v\zeta} \\ z - \beta &= (\lambda - \beta) \cdot \frac{1 + \zeta}{1 + v\zeta}, & z - \delta &= (\lambda - \delta) \cdot \frac{1 + k\zeta}{1 + v\zeta}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter die Transformation

$$13. \quad \frac{(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)}{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)(\lambda - \delta)} = \frac{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}{(1 + v\zeta)^4}.$$

Aus 10. folgt

$$14. \quad \lambda - \alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(v - 1), \quad \lambda - \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(v + 1).$$

Aus 4. und 5. erhalten wir

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[(\gamma + \delta) + \frac{v}{k}(\gamma - \delta) \right],$$

und hieraus weiter

$$15. \quad \lambda - \gamma = \frac{1}{2}(\gamma - \delta) \left(\frac{v}{k} - 1 \right), \quad \lambda - \delta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta) \left(\frac{v}{k} + 1 \right).$$

Somit ist

$$16. \quad (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)(\lambda - \delta) = \frac{1}{16}(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(1 - v^2) \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right).$$

Daher ergibt sich schliesslich

$$17. \quad \frac{\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)}}{\sqrt{a(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}} = \frac{1}{\sqrt{a(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}} \sqrt{(1 - v^2) \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right)} \cdot \frac{1}{(1 + v\zeta)^2} \cdot \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}.$$

Durch Differentiation der Formeln 12. erhalten wir zunächst

$$18. \quad \begin{aligned} dz &= -(\lambda - \alpha) \cdot \frac{1 + v}{(1 + v\zeta)^2} d\zeta, & dz &= -(\lambda - \gamma) \cdot \frac{k + v}{(1 + v\zeta)^2} d\zeta, \\ dz &= (\lambda - \beta) \cdot \frac{1 - v}{(1 + v\zeta)^2} d\zeta, & dz &= (\lambda - \delta) \cdot \frac{k - v}{(1 + v\zeta)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Durch Multiplication dieser Formeln ergibt sich in Rücksicht auf 16.

$$19. \quad dz = \frac{1}{2} \sqrt{k(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)(1 - v^2) \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right)} \cdot \frac{d\zeta}{(1 + v\zeta)^2}.$$

Für das einfachste elliptische Differential haben wir somit die Transformation

$$20. \quad \frac{dz}{\sqrt{a(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{a(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}.$$

5. Ist δ unendlich gross, so verschwindet in

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

der Coefficient a und das Polynom reducirt sich somit auf ein Polynom dritten Grades

$$bx^3 + cx^2 + dx + e = b(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Aus No. 4, 9 folgt für $\delta = \infty$

$$1. \quad \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}.$$

Ferner folgt aus No. 4, 5

$$2. \quad v = k.$$

In Rücksicht auf 2. haben wir an Stelle von No. 4, 13

$$3. \quad (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \cdot \frac{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}{(1 + k\zeta)^4},$$

und anstatt No. 4, 18

$$\begin{aligned}
 -\gamma &= \frac{(\lambda - \mu)(q + p)}{(1 - p)(1 + q)}, \\
 -\delta &= \frac{-(\lambda - \mu)(q + p)}{(1 + p)(1 - q)}, \\
 6. \quad \beta - \delta &= \frac{-(\lambda - \mu)(q - p)}{(1 - p)(1 - q)}.
 \end{aligned}$$

Aus 4., 5., 6. folgt weiter

$$7. \quad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = - \frac{(1 - p)(1 - q)}{(1 + p)(1 + q)}, \quad \frac{\alpha - \delta}{\beta - \gamma} = - \frac{(1 - p)(1 + q)}{(1 + p)(1 - q)}.$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplication und Division

$$\begin{aligned}
 8. \quad \left(\frac{1 - p}{1 + p} \right)^2 &= \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}, \\
 9. \quad \left(\frac{1 - q}{1 + q} \right)^2 &= \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}.
 \end{aligned}$$

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ real und $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, so folgen aus 8. und 9. reale Werthe für p und q . Sind α und β real, γ und δ conjugirt complex, so sind auch $\alpha - \gamma$ und $\alpha - \delta$, sowie $\beta - \gamma$ und $\beta - \delta$ conjugirt complex, mithin die rechte Seite in Gleichung 8. real und positiv, folglich p real. Ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 i$, $\delta = \gamma_1 - \gamma_2 i$, so ergibt sich für die rechte Seite von 9.

$$\frac{\alpha - \gamma_1 - \gamma_2 i}{\alpha - \gamma_1 + \gamma_2 i} \cdot \frac{\beta - \gamma_1 - \gamma_2 i}{\beta - \gamma_1 + \gamma_2 i}.$$

Hierin sind Zähler und Nenner conjugirt complex; der Quotient der Quadratwurzeln ist mithin ebenfalls der Quotient zweier conjugirt Complexen, also erhält man aus 9. ein Resultat von der Form

$$\frac{1 - q}{1 + q} = \pm \frac{\rho - \sigma i}{\rho + \sigma i} = \frac{\rho - \sigma i}{\rho + \sigma i} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma + \rho i}{\sigma - \rho i},$$

woraus sofort hervorgeht

$$10. \quad q = \frac{\sigma}{\rho} i \quad \text{oder} \quad - \frac{\rho}{\sigma} i,$$

also ist q rein imaginär.

Sind α und β , sowie γ und δ conjugirt complex,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i, \quad \beta = \alpha_1 - \alpha_2 i,$$

so ist

$$\begin{aligned}
 11. \quad \left(\frac{1 - p}{1 + p} \right)^2 &= \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 + \gamma_2) i} \cdot \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \gamma_2) i}, \\
 \left(\frac{1 - q}{1 + q} \right)^2 &= \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 - \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) i} \cdot \frac{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 + \gamma_2) i}{(\alpha_1 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \gamma_2) i}.
 \end{aligned}$$

Zähler und Nenner der rechten Seiten sind bei beiden Gleichungen conjugirt complex, daher folgen aus beiden rein imaginäre Werthe für p und q .

$$\text{Setzen wir} \quad p^2 = b_1, \quad q^2 = b_2,$$

so haben wir

$$\text{wenn} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ real sind} \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0,$$

$$12. \quad \text{„ nur } \alpha \text{ und } \beta \text{ „ „} \quad b_1 > 0, \quad b_2 < 0,$$

$$\text{„ } \alpha \text{ und } \beta, \text{ sowie } \gamma \text{ und } \delta \text{ conjugirt complex} \quad b_1 < 0, \quad b_2 < 0.$$

Ist δ unendlich gross, reducirt sich also \sqrt{R} auf

$$\sqrt{b(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)},$$

so folgt aus 8. und 9.

$$13. \quad \left(\frac{1 - p}{1 + p} \right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}, \quad q = 1.$$

Daher ist

§ 16. Definition des elliptischen Integrals, Reduction auf die

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{1-\delta^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{-b_2}{b_1-b_2}},$$

und haben

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{a_1 b_1 (b_1 - b_2)} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}^3} \cdot \sqrt{(1-\delta^2)}$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_1(b_1-b_2)}} \cdot \frac{d\delta}{\sqrt{(1-\delta^2)}}.$$

C. Ist $a_1 > 0$, $b_1 < b_2 < 0$, so kann ζ alle real
Die Substitution

$$\zeta = \sqrt{-b_2} \cdot \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1-b_2}{-b_2}},$$

liefert

$$\sqrt{R_1} = \frac{b_2 \sqrt{a_1}}{\delta^2 \sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sqrt{(1-\delta^2)(1-k^2)}$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1 b_2}} \cdot \frac{d\delta}{\sqrt{(1-\delta^2)(1-k^2)}}$$

D. Ist $a_1 < 0$, $b_1 > b_2 > 0$, so muss ζ^2 zwischen b_1

$$\zeta = \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{1-k^2\delta^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1-b_2}{b_1}}$$

ergibt sich

$$\sqrt{R_1} = k^2 \sqrt{-a_1 b_1 b_2} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{1-k^2\delta^2}^3} \cdot \sqrt{(1-\delta^2)}$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{-a_1 b_1}} \cdot \frac{d\delta}{\sqrt{(1-\delta^2)}}$$

E. Ist $a_1 < 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, so muss $\zeta^2 < b_1$ so

$$\zeta = \sqrt{1-\delta^2}, \quad k = \sqrt{\frac{b_1}{b_1-b_2}},$$

und erhalten

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{-a_1 b_1 (b_1 - b_2)} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sqrt{(1-\delta^2)}$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{R_1}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1(b_1-b_2)}} \cdot \frac{d\delta}{\sqrt{(1-\delta^2)}}$$

Im Falle $a_1 < 0$, $b_1 < b_2 < 0$ ist die Wurzel für j
Führt man die Substitution A aus, so gelangt man zu d
bei A, und erhält für k ebenfalls einen realen, echten Br

8. Wir wenden uns nun zu dem Integrale No. 6, 15
in Ψ_1 und L die Glieder geraden Grades in Bezug auf ζ
geraden Grades, so erhalten wir

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1 + \zeta M_2}{L_1 + \zeta L_2}$$

worin M_1, M_2, L_1, L_2 nur Glieder mit geraden Exponen

Durch Erweiterung mit $L_1 - \zeta L_2$ beseitigen wir di
des Nenners; es entsteht

$$\frac{\Psi_1}{L} = \frac{M_1 L_1 - \zeta^2 M_2 L_2}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2} + \frac{\zeta(M_2 L_1 - M_1 L_2)}{L_1^2 - \zeta^2 L_2^2}$$

Daher haben wir

Vergleicht man beiderseits die gleich hohen Potenzen von z , so erhält man zur Bestimmung von $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, C, D$ die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 &= (2n-1)k^2 \cdot B_1, \\ A_2 &= (2n-3)k^2 \cdot B_2 - (2n-2)(k^2+1)B_1, \\ A_3 &= (2n-5)k^2 \cdot B_3 - (2n-4)(k^2+1)B_2 + (2n-3)B_1, \\ A_4 &= (2n-7)k^2 \cdot B_4 - (2n-6)(k^2+1)B_3 + (2n-5)B_2, \\ A_5 &= (2n-9)k^2 \cdot B_5 - (2n-8)(k^2+1)B_4 + (2n-7)B_3, \\ &\dots \dots \dots \\ A_{n-1} &= 3k^2 \cdot B_{n-1} - 4 \cdot (k^2+1)B_{n-2} + 5 \cdot B_{n-3}, \\ A_n &= 2 \cdot (k^2+1)B_{n-1} + 3 \cdot B_{n-2} + C, \\ 0 &= B_{n-1} + D. \end{aligned}$$

Aus den ersten n Gleichungen ergeben sich die n Unbekannten $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, C$; aus der letzten folgt $D = -B_{n-1}$.

Statt des Integrales

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

betrachten wir das folgende

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} - k^2 \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}.$$

10. Das Integral

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

lässt sich ebenfalls reduciren; man kann die Coefficienten $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, C$ immer so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{R}} &= \frac{\sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^{n-1}} (A_1 z + A_2 z^3 + \dots + A_{n-1} z^{2n-3}) \\ &+ \int \frac{(B_1 + B_2 z^2) dz}{\sqrt{R}} + C \int \frac{dz}{(1+\lambda z^2) \sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Durch Differentiation erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{R}} &= \left[\frac{2k^2 z^3 - (k^2+1)z}{(1+\lambda z^2)^{n-1} \cdot \sqrt{R}} - \frac{2(n-1)\lambda z \cdot \sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^n} \right] (A_1 z + A_2 z^3 + \dots) \\ &+ \frac{\sqrt{R}}{(1+\lambda z^2)^{n-1}} (A_1 + 3A_2 z^2 + \dots) + \frac{B_1 + B_2 z^2}{\sqrt{R}} + \frac{C}{(1+\lambda z^2) \sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Beseitigt man die Nenner, so entsteht

$$\begin{aligned} 1 &= (-2k^2 \lambda (n-2) z^5 + [2k^2 + \lambda(k^2+1)(2n-3)] z^3 - [k^2+1-2\lambda(n-1)] z) \\ &\quad \cdot (A_1 z + A_2 z^3 + \dots + A_{n-1} z^{2n-3}) \\ &+ [k^2 \lambda z^6 + (k^2 - \lambda k^2 - \lambda) z^4 + (\lambda - k^2 - 1) z^2 + 1] [A_1 + 3A_2 z^2 + \dots + (2n-3)A_{n-1} z^{2n-4}] \\ &\quad + (B_1 + B_2 z^2)(1+\lambda z^2)^n + C(1+\lambda z^2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist vom Grade $2n+2$; sie enthält nur Glieder gerader Potenz, die Zahl derselben ist also $n+2$; ebenso gross ist die Zahl der Coefficienten $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, B_1, B_2, C$. Man kann dieselben so wählen, dass die letzte Gleichung identisch erfüllt ist und hat zu ihrer Bestimmung $n+2$ lineare Gleichungen, deren Auflösung bei gegebenen Werthen von k, λ, n ohne Schwierigkeit erfolgt.

11. Hiernach sind alle elliptischen Integrale auf drei Normalintegrale zurückgeführt, nämlich auf

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Sie nehmen
Variable φ ersetzt
denn dann ist

und die drei Inte

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

Die Grösse
Unterscheidung w
Werden die
bezeichnet man
zweiter und dri
plitude, λ der Pa

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = F(\varphi, k)$$

12. Wir tran
zweiten Grades
anderer Amplitud
wir später brauch
grale finden. Da

wo U und V qua
formation erzielt

ist nach den Entv
quadratischen Fal

zwei die zweiten
beiden die vier F

Man überzeu
verschieden sind:

$$1. \begin{cases} V - U = \\ V + U = \\ V - kU = \\ V + kU = \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} V - U = \\ V + U = \\ V - kU = \\ V + kU = \end{cases}$$

*) LEGENDRE, 1

Aus den Beziehungen zwischen den linken Seiten dieser Gleichungen folgen Beziehungen zwischen den Grössen k, λ, a, b, c . Wir beschränken uns hier darauf, die aus 1. hervorgehenden Transformationsformeln aufzustellen.

13. Den Werthen

$$\zeta = 1, -1, \frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda},$$

entsprechen

$$V = U, -U, U, -U,$$

wie die ersten beiden Gleichungen lehren. Wir bilden

$$\frac{V - kU}{V + U} = \frac{b(1 + m\zeta)^2}{(1 + \zeta)(1 + \lambda\zeta)}$$

und ersetzen rechts ζ der Reihe nach durch 1 und $1:\lambda$, links V durch U ; dadurch entsteht

$$\frac{1 - k}{2} = b \cdot \frac{(1 + m)^2}{2(1 + \lambda)}, \quad \frac{1 - k}{2} = b \cdot \frac{\lambda \left(1 + \frac{m}{\lambda}\right)^2}{2(1 + \lambda)}.$$

Hieraus ergibt sich für m und λ die Gleichung

$$\lambda \left(1 + \frac{m}{\lambda}\right)^2 = (1 + m)^2,$$

aus welcher folgt

$$m = \sqrt{\lambda}.$$

Ersetzen wir in gleicher Weise in dem Quotienten

$$\frac{V + kU}{V + U} = \frac{c(1 + n\zeta)^2}{(1 + \zeta)(1 + \lambda\zeta)},$$

rechts ζ durch 1 und $1:\lambda$, links V durch U , so erhalten wir

$$n = \sqrt{\lambda}.$$

Da m und n nicht gleich sein können, so wählen wir

$$m = -\sqrt{\lambda}, \quad n = \sqrt{\lambda},$$

wobei von nun an die Wurzel positiv gerechnet wird. Aus den Gleichungen No. 12, 1 folgt weiter, wenn für m und n die gefundenen Werthe benutzt werden,

$$1. \quad \frac{V - kU}{V + kU} = \frac{b}{c} \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda} \cdot \zeta}{1 + \sqrt{\lambda} \cdot \zeta} \right)^2.$$

Ersetzen wir hier rechts ζ der Reihe nach durch 1 und -1 , links V durch U und $-U$, so entstehen die Gleichungen

$$\frac{1 - k}{1 + k} = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} \right)^2,$$

$$\frac{1 + k}{1 - k} = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right)^2.$$

Hieraus folgt durch Multiplication

$$\frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Da in den vorigen Gleichungen beiderseits positive Werthe stehen, so haben wir $b = c$ zu nehmen. Hiernach ergibt sich weiter

$$\frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}};$$

daher ist

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + k} - \sqrt{1 - k}}{\sqrt{1 + k} + \sqrt{1 - k}}.$$

Macht man den Nenner rational, so folgt

$$2. \quad \sqrt{\lambda} = \frac{1 - k'}{k}, \quad \lambda$$

Dividirt man in 1. links Zähle
Substitutionsgleichung

$$3. \quad \frac{1 - ks}{1 + kz} =$$

Hieraus ergibt sich leicht mit

$$z = \frac{(1 + \lambda)\zeta}{1 + \lambda\zeta^2}, \quad d.$$

$$4. \quad \sqrt{1 - z^2} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 + \lambda\zeta^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} =$$

Der Grenze $z = 0$ entspricht ζ :

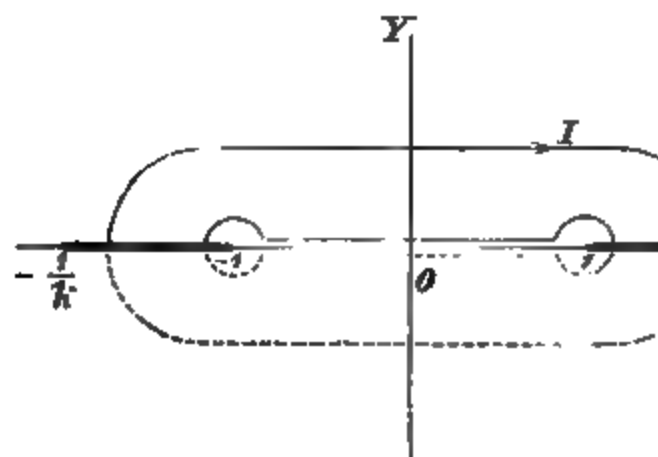
$$4. \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} =$$

Diese Transformation ist deswe
transformirten Integrale die untere G

14. Um die zweideutige irration

$$\sqrt{R} = \sqrt{}$$

als eine eindeutige Function des ϕ
eine zweiblätterige RIEMANN'sche I
punkte hat: $z = -1:k, -1, +$
bis -1 und von $+1$ bis $+1:k$
Jeder Weg, der, auf das obere Blatt p
punkten eine ungerade Anzahl Male
wird hingegen eine ungerade Anzahl
Male oder eine gerade Anzahl von V



(M. 562.)

Werthe von $+1$ bis 0 , und in den
des unteren Blattes die entgegengeset

15 Wir untersuchen nun die W
das zweiter Art sich ändern, wenn
Kreisbogens beschreibt, der einen W

Ist z auf einem Kreise gelegen, der

$$z =$$

wobei φ den Winkel bezeichnet, um
Richtung der positiven realen Achse

h

$$dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi.$$

$$\overline{z(d-z)} = i\sqrt{\rho e^{i\varphi}(b-a-\rho e^{i\varphi})(c-a-\rho e^{i\varphi})(d-a-\rho e^{i\varphi})}.$$

$$\overline{z(d-z)} = \frac{\sqrt{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} d\varphi}{\sqrt{(b-a-\rho e^{i\varphi})(c-a-\rho e^{i\varphi})(d-a-\rho e^{i\varphi})}},$$

$$\overline{z(d-z)} dz = -\rho^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\varphi}{2}} \sqrt{(b-a-\rho e^{i\varphi}) \dots} d\varphi.$$

lend klein, so ist

$$-a-\rho e^{i\varphi}) \dots = \sqrt{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

d als endliche, von einander verschiedene Zahlen voraus, so weder unendlich gross, noch verschwindend klein. Integriert

4. und 5. unter der Voraussetzung eines verschwindend n Grenzen φ_0 und φ_1 , so erhält man

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{1}{2}i\varphi} d\varphi, \text{ bez. } -\lim \sqrt{\rho^3} \cdot A \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{\frac{1}{2}i\varphi} d\varphi.$$

tegrale endlich, die Faktoren $1:A$ und A nicht unendlich, he von $\sqrt{\rho}$ und $\sqrt{\rho^3}$ verschwinden. Dies ergibt: Werden

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \text{ und } \int \Delta(\varphi) d\varphi$$

kt, die einem einzigen Windungspunkte sich un-
miegen, so haben beide den Werth Null.

ir realen Achse im oberen Blatte von 0 bis $+1$, so erhält

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

le x der geradlinige Weg angedeutet ist. Das Differential
enze für $x=1$ unendlich gross; man überzeugt sich aber
as Integral einen endlichen Werth hat.

$1:\sqrt{1-k^2x^2}$ hat innerhalb der Integralgrenzen für $x=1$
 $1:\sqrt{1-k^2}$; daher ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ d. i. } < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

t in der Theorie der elliptischen Integrale eine ähnliche
cyklometrischen Integralen die Zahl $\frac{1}{2}\pi$; es wird mit K
n also hat

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Windungspunkt $+1$ in einem verschwindend kleinen
diesen Weg entfallende Zuwachs des Integrals F gleich
nn im unteren Blatte entlang der realen Achse bis zum
ück, so haben \sqrt{R} , sowie dz dabei entgegengesetzt gleiche
über liegenden Punkten des oberen Blattes bei der Inte-

gration von 0 bis 1. Wird dahe
realen Achse von 0 bis + 1 und
so hat es den Werth $2K$. In Pu
Achse zwischen + 1 und - 1 gl
 ds und \sqrt{R} dieselben Werthe, w
der + 1 und - 1 in unendlich l

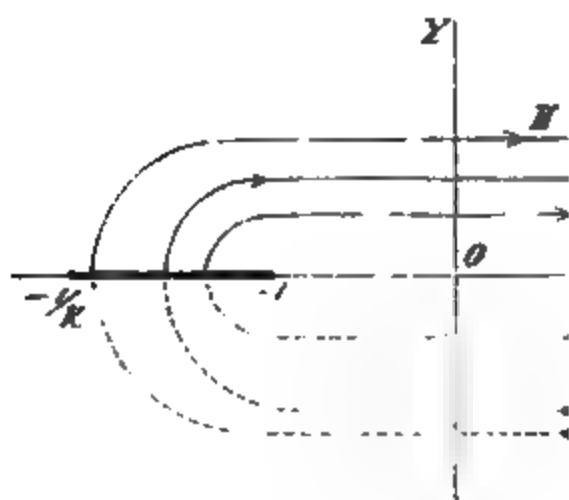
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

und das Integral über den ganze
daher: Wird das Integral

$$F = \int_{\gamma}$$

über einen Weg (I, Fig. 563) e
punkte - 1 und + 1 einfach

Ueber den geschlossenen Weg



(M. 563.)

Geht z in einem verschwinde
nehmenden Winkel um den Punk
läuft es die Werthe $1 + \rho e^{i\varphi}$ vor
 $i\sqrt{2\rho(1-k^2)}$, ist also verschw
der realen Achse weiter bis zu
 $1:k - \rho$, so ist am Ende dieses

$$\sqrt{R} =$$

Wird z weiter auf einem ver
so durchläuft es die Werthe

$$\frac{1}{k} + \rho e^{i\varphi}$$

und am Ende ist

$$\sqrt{R} =$$

Auf dem weiteren Wege in
dem dicht vor + 1 liegenden P
wieder ab und ist schliesslich

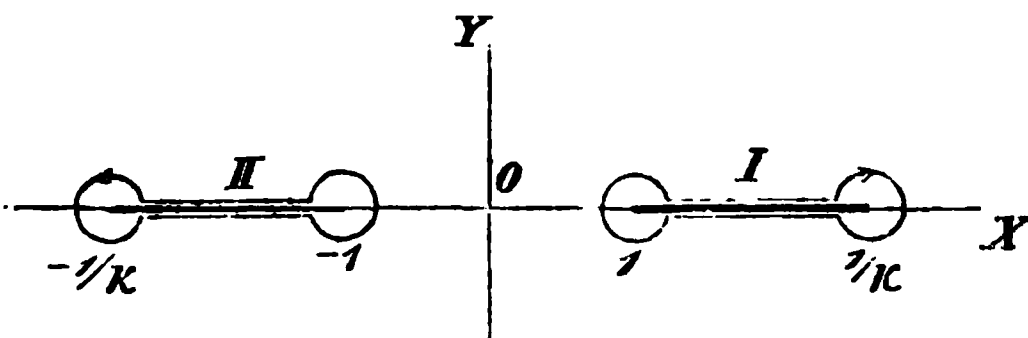
$$\sqrt{R} =$$

Durchläuft dann z in der Ric

kleinen Halbkreis um den Punkt $+1$, so erlangt \sqrt{R} wieder seinen Ausgangswerth

$$\sqrt{R} = \sqrt{2\rho(1 - k^2)}.$$

Dieser Weg ist in Fig. 564 durch I veranschaulicht. Das Integral F über diesen Weg erstreckt besteht aus den beiden Integralen über die verschwindend kleinen Kreise und aus zwei geradlinigen Integralen. Die ersten beiden sind bekanntlich Null. Der geradlinige Theil entlang des oberen Randes der realen Achse liefert



(M. 564)

$$\frac{1}{i} \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Substituiert man hier

$$k'^2 = 1 - k^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \xi^2}},$$

so erhält man leicht

$$\frac{1}{i} \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}} = -i \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k'^2 \xi^2)}}.$$

Das letztere Integral, eine zweite charakteristische Constante in der Theorie der elliptischen Integrale erster Art, wird mit K' bezeichnet, es ist also

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}}.$$

Geht z auf dem unteren Rande der realen Achse von $1:k$ bis 1, so haben dz und \sqrt{R} entgegengesetzte Zeichen, wie in den am andern Rande der realen Achse gegenüberliegenden Punkten; daher hat das Integral von $1:k$ bis 1 denselben Werth, wie entlang des oberen Randes von 1 bis $1:k$. Das ganze in der angegebenen Richtung über den Weg Fig. 564, I erstreckte Integral F hat also den Betrag

$$-2iK'.$$

Wir überzeugen uns leicht, dass das Integral entlang des Weges, der im unteren Blatte unter dem soeben beschriebenen liegt, den entgegengesetzt gleichen Weg hat.

In den Punkten der realen Achse, die unendlich nahe bei -1 in der Richtung nach $-1:k$ zu auf dem oberen bez. unteren Rande der realen Achse liegen, hat \sqrt{R} die Werthe*)

$$\sqrt{R} = i\sqrt{2\rho(1 - k^2)}, \quad \text{bez.} = -i\sqrt{2\rho(1 - k^2)}$$

für die Punkte der realen Achse, die unmittelbar vor $-1:k$, nach -1 zu, auf dem oberen bez. unteren Rande liegen, ist

$$\sqrt{R} = i\sqrt{2k\rho\left(\frac{1}{k^2} - 1\right)} \quad \text{bez.} \quad -i\sqrt{2k\rho\left(\frac{1}{k^2} - 1\right)}.$$

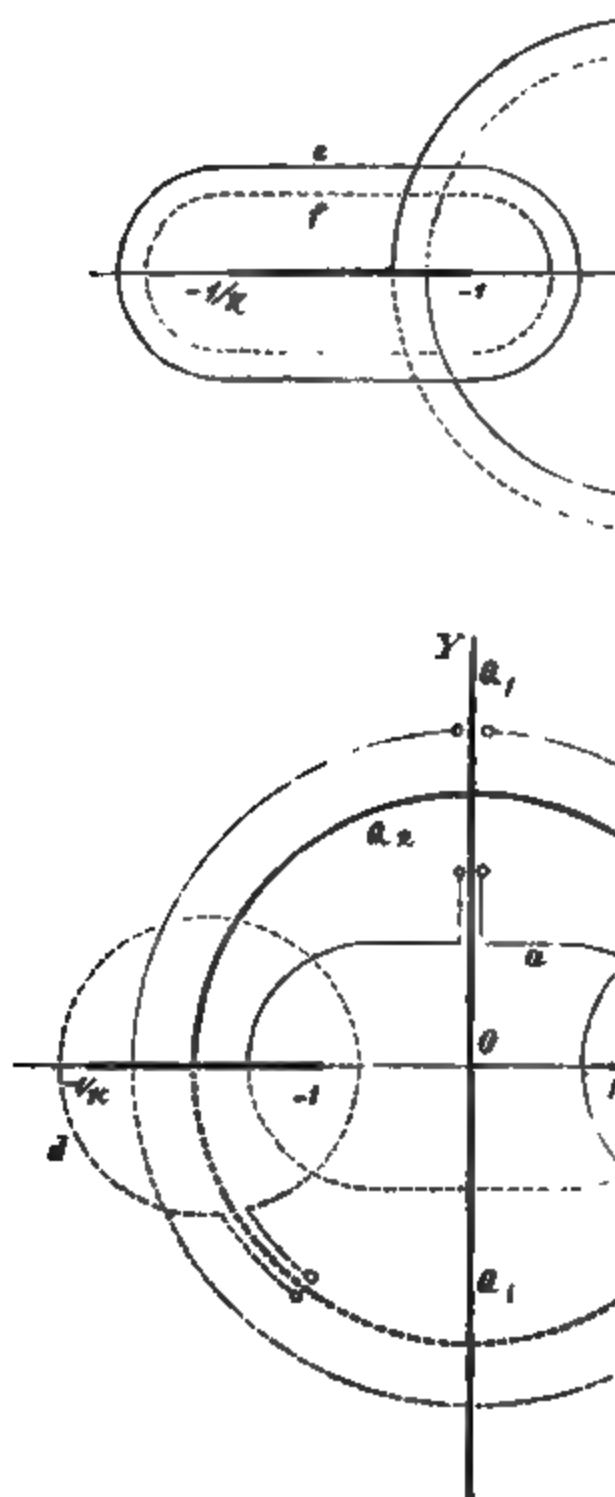
Das entlang des oberen Randes der realen Achse von -1 bis $-1:k$ erstreckte Integral F hat somit den Werth

*) wenn im Radicanden Glieder zweiten Grades in ρ vernachlässigt werden.

$$i \int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{x^2}} dx$$

Ersetzt man hier x durch $-x$, so
 Geht s auf dem untern Rande
 haben ds und \sqrt{R} entgegengesetzte
 überliegenden Punkten; also ist aus
 gleich iK' . Verbindet man diese bei
 Kreise um die Punkte -1 und $-$
 mithin ist das Integral über den W

das über den im zweiten Blatte dar
 18. Wir erkennen leicht, dass
 RIEMANN'schen Fläche bis zu einen



(M. 566.)

Integral erster Art als eindeutige Function des Ortes der Stellen, haben wir zwei Querschnitte Q_1 und Q_2 zu wie in vorstehender Figur.

am rechten Ufer von Q_1 zu dem am linken gegen- haben wir einen Weg wie a oder b zurückzulegen; s linken Ufers F um $4K$ grösser als für den gegen- Ufers. Von einem Punkte des innern Ufers von Q_2 kte des äussern Ufers auf einem Wege c oder d ; des innern Ufers um $2iK'$ kleiner, als für den am den Punkt.

iche ist das Integral eindeutig bestimmt, sobald es in en (nicht willkürlichen) Werth hat, sobald z. B. festge- tte im Nullpunkte rechts vom Querschnitte den Werth $m \cdot 4K + n \cdot 2K'i$ ebene ganze positive oder negative Zahlen sind.

No. 15, 16 und 17 ergeben sich die Periodicitäts- Integrals zweiter Art.

dz , $R = \frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}$ im obern Blatte entlang der erstreckt, so hat es den Werth

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx,$$

stische Constante für die Integrale zweiter Art; sie ass also

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx.$$

ich kleinen Kreise dann um den Punkt $+1$ bis ins n Theil des Weges das Integral $\int \sqrt{R} dz = 0$.

len Achse des untern Blattes haben \sqrt{R} und dz ent- wie in den darüber liegenden Punkten des obern, intern Blatte

$$\int_1^0 \sqrt{R} dz = E.$$

Achse, die in demselben Blatte und gleichweit vom t \sqrt{R} denselben Werth. Integriert man daher im gen Richtung weiter bis zum Punkte -1 , umgeht ndenden Kreise, der ins obere Blatt führt, und kehrt e zum Nullpunkte zurück, so hat für den ganzen tung beschriebenen Weg das Integral zweiter

er Art über den Weg I in Fig. 564 erstreckt, so ist im obern Blatte genommene Integral

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{R} dx.$$

$$x = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k'^2 \xi^2};$$

den Grenzen $x = 1$ und $x = 1:k$ entspricht $\xi = 0$. Ferner findet man

$$1 - x^2 = \frac{1}{k^2} (k^2 - 1 + k'^2 \xi^2) = - \\ dx = - \frac{k'^2}{k^2} \cdot$$

Hieraus folgt

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx = i \int_0^1 \frac{-k}{\sqrt{(1 - \xi^2)}} \\ = i \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2}{1 - \xi^2}}$$

Das erste Integral rechts bezeichnen

$$E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2}{1 - \xi^2}}$$

Daher ist

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx$$

Das Integral zweiter Art, erstreckt hat somit den Betrag $i \cdot 2(E' - K')$.

Integral zweiter Art ist unendlich Periodicitätsmodul $4E$ und den im

Führen wir die RIEMANN'sche Flächen Integralen erster Art, auf eine einfach z das Integral zweiter Art eine eindeutig einen Punkt auf dem rechten Ufer von für den gegenüberliegenden Punkt des innern Ufers von Q , ist es um $i \cdot 2(E$ liegenden Punkt des äussern Ufers.

Wir werden später sehen, dass sich Multiplum eines Integrals erster Art mit eine periodische transcendente Function Integral dritter Art wird in ähnlicher Weise

Aus diesen Darstellungen — bis Integralen erster Art beschäftigen werden Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter

§ 17. Das Additionstheorem für Berechnung von Integralen

1. EULER hat zuerst nachgewiesen, dass Gleichung zwischen s und ζ bestehen muss

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{As^4 + Bs^2 + Cs^2 + Ds + E}} = u$$

eine gegebene Summe G haben sollen. Insofern man die Zahl G als ein elliptisches Integral

$$G = \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{A\delta^4 + B\delta^3 + C\delta^2 + D\delta + E}}$$

ansehen kann, lehrt die Entdeckung EULER's, die Summe zweier elliptischen Integrale erster Art mit gleichem Modul in eins zu verwandeln. Angewendet auf Normalintegrale erster Art lautet dieser Additionssatz: Es ist

$$1. \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{(1-\delta^2)(1-k^2\delta^2)}},$$

wenn

$$\delta = \frac{z\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2}.$$

Beweis. Wir setzen zunächst δ als constant voraus; zwischen unendlich kleinen Aenderungen der Veränderlichen z und ζ besteht dann die Differentialgleichung

$$2. \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = 0,$$

aus welcher wir die folgende ableiten

$$3. \frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} dz + \frac{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} d\zeta = 0.$$

Beide Glieder links integrieren wir theilweis; das erste Glied ergibt

$$4. z \frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} - \int \frac{Pd\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - \int Q\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} dz,$$

wobei abkürzungsweise gesetzt worden ist

$$P = \frac{z\zeta[2k^2(z^2 + \zeta^2) - (1+k^2)(1+k^2z^2\zeta^2)]}{(1-k^2z^2\zeta^2)^2}, \quad Q = \frac{2k^2z^2\zeta^2}{(1-k^2z^2\zeta^2)^2}.$$

Vertauscht man in 4. z mit ζ , so erhält man das Ergebniss der theilweisen Integration des zweiten Theils der linken Seite in 3.; dabei ändern P und Q ihre Werthe nicht; daher folgt aus 3. schliesslich

$$5. \frac{z\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} - \int P \left[\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \right] - \int Q [\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} dz + \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} d\zeta] = c,$$

wobei c eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Zufolge der Differentialgleichung 2. verschwinden die Integrale in 5. und es ergibt sich daher die Gleichung

$$6. \frac{z\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} + \zeta\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{1-k^2z^2\zeta^2} = c.$$

Setzt man in 1. $\zeta = 0$, so ergibt sich $z = \delta$; führt man dieselbe Substitution in 6. aus, so folgt $z = c$; daher ist $c = \delta$, w. z. b. w.

Substituirt man $z = \sin \varphi$, $\zeta = \sin \psi$, $\delta = \sin \sigma$, so nimmt das Additionstheorem die Gestalt an: Es ist

$$7. \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma)},$$

wenn

$$\sin \sigma =$$

Für $z = x$ ergibt sich

$$8. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

wenn

$$\beta =$$

Hat in der durch die
Zusammenhang reducirten Formel
Nullpunkt des oberen Blattes

Ersetzt man in 7. ψ durch

9.

$$\beta$$

wenn

$$\sin \sigma =$$

2. Von der Gleichung

$$\sin \sigma =$$

kann man $\cos \sigma$ und $\Delta(\sigma)$ aus
 $\cos \psi$, $\Delta(\psi)$ erhalten. Wir verwenden
Gleichung

$$1. \quad \sin \sigma =$$

folgt bekanntlich

$$2. \quad \cos \sigma =$$

Das Vorzeichen in 2. v
 $\beta = 0$, für welchen $\sin \sigma = 0$,
entsprechen soll; entscheiden
Vorzeichen. Ferner bemerkt

$$3. \quad \cos \sigma =$$

$$4. \quad \cos \sigma =$$

Hieraus können wir $\sin \sigma$
durch ganz willkürlich gewählte
dann Werthe zu nehmen, welche

$$\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma = 1$$

Wir ersetzen

$$\sin \sigma \text{ durch}$$

wobei $\sin \sigma$

und haben somit zu ersetzen

$$\cos \sigma \text{ durch}$$

*) Vergl. SCHELLBACH, Die
Berlin 1864, pag. 109.

$$\cos \beta \text{ durch } \pm \frac{\sin \psi \Delta(\varphi)}{n}.$$

ten beiden Substitutionen die oberen Vorzeichen und

$$\frac{\cos \varphi \sin \psi \Delta(\varphi) + \cos \psi \sin \varphi \Delta(\psi)}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi},$$

$$\pm \frac{\sin \varphi \sin \psi \Delta(\varphi) \Delta(\psi) - \cos \varphi \cos \psi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}.$$

folgen also 6., sowie die durch die gleichen Subvorgehenden Gleichungen.

Additionstheorem auftretenden Grössen sein, so entspricht dem Werthe $\psi = 0$ der Werth $\sigma = \varphi$; daher haben wir in 6. das untere Zeichen zu wählen und erhalten somit

$$7. \quad \cos \sigma = \frac{\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \Delta(\varphi) \Delta(\psi)}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}.$$

Aus den Gleichungen 3. und 4. erhalten wir

$$8. \quad \cos \psi = \sin \varphi \sin \sigma \Delta(\psi) + \cos \varphi \cos \sigma,$$

$$9. \quad \cos \varphi = \sin \psi \sin \sigma \Delta(\varphi) + \cos \psi \cos \sigma.$$

Aus allen diesen Gleichungen gehen neue Gleichungen hervor, wenn σ, φ, ψ der Reihe nach durch $\varphi, \sigma, -\psi$ ersetzt werden. Hierdurch entsteht aus 9.

$$10. \quad \cos \sigma = -\sin \psi \sin \varphi \Delta(\sigma) + \cos \psi \cos \varphi.$$

Berechnen wir hieraus $\Delta(\sigma)$ und benutzen dabei 7., so erhalten wir

$$11. \quad \Delta(\sigma) = \frac{\Delta(\varphi) \Delta(\psi) - k^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}.$$

Aus 5. und 7. folgt noch die für die numerische Berechnung von σ brauchbare Gleichung

$$12. \quad \tan \sigma = \frac{\tan \psi \Delta(\varphi) - \tan \varphi \Delta(\psi)}{1 - \tan \psi \tan \varphi \Delta(\varphi) \Delta(\psi)}.$$

Hiernach ist $\tan \sigma = \tan(\mu + \nu)$, wenn

$$\tan \mu = \Delta(\varphi) \tan \psi, \quad \tan \nu = \Delta(\psi) \tan \varphi.$$

3. Es liegt nahe zu fragen, ob unter der Voraussetzung, dass φ, ψ und σ durch die in No. 1. und 2. entwickelten Gleichungen verbunden sind, das Normalintegral zweiter Art

$$E(\sigma) = \int_0^\sigma \Delta(\varphi) d\varphi$$

mit der Summe

$$E(\varphi) + E(\psi) = \int_0^\varphi \Delta(\varphi) d\varphi + \int_0^\psi \Delta(\psi) d\psi$$

in einfacher Weise zusammenhängt. Wir setzen*)

$$1. \quad E(\varphi) + E(\psi) = S,$$

und nehmen σ als gegeben, φ und ψ dagegen als veränderlich an. Durch Differentiation folgt aus 1.

$$2. \quad \Delta(\varphi) d\varphi + \Delta(\psi) d\psi = dS.$$

Fügt man hierzu die unter der für σ gemachten Annahme geltende von No. 1, 2 nicht verschiedene Gleichung

$$3. \quad \Delta(\psi) d\varphi + \Delta(\varphi) d\psi = 0,$$

so erhält man

$$4. \quad [\Delta(\varphi) + \Delta(\psi)] (d\varphi + d\psi) = dS.$$

*) SCHLÖMILCH, Compendium d. höh. Analysis, 2. Band, 2. Aufl. pag. 333. Braunschweig 1874.

Setzt man den Werth für
man leicht

$$\Delta(\varphi) =$$

5.

$$\Delta(\psi) =$$

Hieraus folgt

$$6. \quad \Delta(\varphi) \pm \Delta$$

wobei entweder die oberen od

Setzt man diesen Werth für

$$-\frac{\Delta(\sigma)}{s}$$

und hieraus durch Integration

$$E(\varphi) + E(\psi)$$

Für $\psi = 0$ wird $\varphi = \sigma$; w

$$E(\sigma)$$

Durch Subtraction von de

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma)$$

Nach No. 2, 10. ist

$$\cos \sigma = a$$

und daher

$$E(\varphi) + E(\psi)$$

Ersetzt man hier $\Delta^2(\sigma)$ du

$$7. \quad E(\varphi) + E$$

Dieser Satz wird als das
zweiter Art bezeichnet.

Es ist selbstverständlich, c
genügt wird

$$E$$

dann würde aber $\sin \tau$ sich r
 $\sin \psi$, $\cos \psi$, $\Delta(\psi)$ ausdrücken la

4. Aehnlich wie bei Integ
dritter Art.

$$\Pi_0(h, k, \dots)$$

Wir setzen

1.

und nehmen wieder σ als gege

Durch Differentiation folgt

$$\frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \Delta}$$

Da nun

2.

so folgt

$$= \left(\frac{1}{1 + h \sin^2 \varphi} - \frac{1}{1 + h \sin^2 \psi} \right) \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$= \frac{h(\sin^2 \psi - \sin^2 \varphi)}{(1 + h \sin^2 \varphi)(1 + h \sin^2 \psi)} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

durch Differentiation

$$d\varphi + \Delta(\psi) d\psi = k^2 \sin \sigma d(\sin \varphi \sin \psi).$$

) aus 2. ein, so entsteht

$$\psi - \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \sin \sigma d(\sin \varphi \sin \psi).$$

t, ergibt

$$\frac{h \sin \sigma}{(1 + h \sin^2 \varphi)(1 + h \sin^2 \psi)} d(\sin \varphi \sin \psi).$$

$$\sin \varphi \sin \psi = q, \quad \sin^2 \varphi + \sin^2 \psi = p,$$

$$dS = \frac{h \sin \sigma}{1 + hp + h^2 q^2} dq.$$

udrücken, gehen wir von der Gleichung aus

$$\cos \sigma = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \Delta(\sigma)$$

$$)]^2 = \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = (1 - \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 \psi)$$

$$= 1 - p + q^2.$$

$$= 1 + q^2 - [\cos \sigma + q \Delta(\sigma)]^2$$

$$= \sin^2 \sigma - 2 \cos \sigma \Delta(\sigma) \cdot q + k^2 \sin^2 \sigma \cdot q^2.$$

ürzung

$$A = 1, \quad B = h \cos \sigma \Delta(\sigma), \quad C = h k^2 \sin^2 \sigma + h^2,$$

$$dS = \frac{h \sin \sigma dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

h

$$= h \sin \sigma \int \frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + \text{Const.}$$

stante wird bestimmt, indem wir $\psi = 0$ setzen; alsdann

$$= \Pi_0(h, k, \sigma), \text{ und es ist daher}$$

$$= h \sin \sigma \int_{(q=0)} \frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2} + \text{Const.},$$

$$= \Pi_0(\sigma) + h \sin \sigma \int_0^q \frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

geführt, so entsteht schliesslich

$$I_0(\psi) = \Pi_0(\sigma) + h \sin \sigma \int_0^q \frac{dq}{A - 2Bq + Cq^2},$$

inkel φ, ψ, σ durch die vom Parameter unabhängige

n

$$\cos \sigma = \frac{\sin \varphi \cos \psi \Delta \psi + \sin \psi \cos \varphi \Delta(\varphi)}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi},$$

tegral $\Pi_0(h, k, \sigma)$ die Summe $\Pi_0(h, k, \varphi) + \Pi_0(h, k, \psi)$

in
rat
ist
rt.
tze

ateg
ch

. fo

ist

is f

'osq

mar

nan

'osq

. ur

s

Gle

φ_1

em

die

. 2.

ie r

en

und vertauschen in 1., 2., 7. und 10. die Bezeichnungen φ , φ_1 , nach mit φ_1 , φ , λ , k . Dadurch erhalten wir

$$11. \quad F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(\lambda, \varphi_1),$$

wenn
$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin \varphi.$$

Beide Transformationen, 9. und 11., sind für die numerische Integrationen erster Art sehr gut zu gebrauchen^{*)}.

6. Bezüglich der letzten Transformation bemerken wir $(1+k):2 < 1$, also $\lambda > \sqrt{k}$ und um so mehr also, da k echt g
 $\lambda > k$;

ferner sieht man sofort, dass

$$\varphi_1 < \varphi.$$

Durch diese Transformation wird also der Modul vergrößert, die Amplitude verkleinert. Wenden wir diese Transformation wiederholt an, so erhält man also eine Reihe $\lambda, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ von Moduln

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad \lambda_3 = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{1+\lambda_2}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1+\lambda_{n-1}}$$

und die zugehörigen Amplituden aus

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin \varphi, \quad \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \lambda \sin \varphi_1, \quad \sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = \lambda_2 \sin \varphi_2, \quad \dots, \quad \sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1},$$

so fragt es sich, gegen welche Grenze diese zunehmenden Moduln und die zugehörigen Amplituden convergiren, wenn n unendlich wächst.

$$\lambda_n = \frac{2\sqrt{\lambda_{n-1}}}{1+\lambda_{n-1}}$$

folgt
$$1 - \lambda_n = \frac{(1 - \sqrt{\lambda_{n-1}})^2}{1 + \lambda_{n-1}}.$$

Da nun $\sqrt{\lambda_{n-1}} > \lambda_{n-1} > k$, so folgt

$$1 - \lambda_n < \frac{(1 - \lambda_{n-1})^2}{1 + k}.$$

Wendet man dies wiederholt an, so erhält man

$$1 - \lambda < \frac{(1 - k)^2}{1 + k}, \quad 1 - \lambda_1 < \frac{(1 - \lambda)^2}{1 + k} < \frac{(1 - k)^4}{(1 + k)^3},$$

$$1 - \lambda_2 < \frac{(1 - \lambda_1)^2}{1 + k} < \frac{(1 - k)^8}{(1 + k)^7}, \quad 1 - \lambda_3 < \frac{(1 - \lambda_2)^2}{1 + k} < \frac{(1 - k)^{16}}{(1 + k)^{15}},$$

$$\dots, \quad 1 - \lambda_n < \frac{(1 - k)^{2^n}}{(1 + k)^{2^n - 1}}.$$

Hieraus folgt, dass sich $1 - \lambda_n$ der Grenze Null nähert, rasch, wenn k nicht zu klein ist; also ist

$$\lim \lambda_n = 1.$$

Der Grenzwert von φ_n ergibt sich durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$\sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1}$$

im Verlaufe der Rechnung von selbst; wird derselbe mit Φ bezeichnet, so kommt man schliesslich auf das Integral

^{*)} Die erstere heisst nach ihrem Erfinder LANDEN'sche Substitution. P. MAGNAN 1775.

Wächst n unendlich, so ist daher

$$\lim (a_n - b_n) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Zahlen a_n und b_n sich einer gemeinsamen Grenze c nähern; diese wird nach GAUSS*) als das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b bezeichnet.

Wenn a_r von b_r innerhalb der angenommenen Genauigkeitsgrenzen nicht mehr von einander (und von c) zu unterscheiden sind, so hat φ_r eine bestimmte, durch die Rechnung sich ergebende Grenze Φ erreicht, und es ist

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2^r} \cdot \Phi.$$

8. Auch durch das Additionstheorem allein, ohne Combination mit einer quadratischen Transformation, kann man ein Normalintegral erster Art, und auf demselben Wege eins zweiter Art berechnen. Ist

$$1. \quad \sin \varphi = \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \Delta(\varphi_1)}{1 - k^2 \sin^4 \varphi_1},$$

so ist bekanntlich

$$2. \quad F(k, \varphi) = 2 F(k, \varphi_1)$$

und nach dem Additionstheorem für Integrale zweiter Art

$$3. \quad E(k, \varphi) = 2 E(k, \varphi_1) - k^2 \sin \varphi \sin^2 \varphi_1.$$

Statt der Gleichung 1. kann zur Bestimmung des Winkels φ_1 durch den Winkel φ passender die Gleichung benutzt werden, die aus No. 2, 10 folgt, wenn darin φ_1 für φ , und ψ und φ für σ gesetzt wird:

$$\cos \varphi = \cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1 \Delta(\varphi),$$

woraus sofort folgt

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \Delta(\varphi)}}.$$

Berechnet man einen Hülfswinkel γ durch die Gleichung

$$\sin \gamma = k \sin \varphi,$$

so ist $\Delta(\varphi) = \cos \gamma$, und

$$\sin \varphi_1 = \sin \frac{1}{2} \varphi : \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

Berechnet man nun eine Reihe von Winkeln nach den Formeln

$$\sin \varphi_1 = \sin \frac{1}{2} \varphi : \cos \frac{1}{2} \gamma, \quad \sin \gamma_1 = k \sin \varphi_1;$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \frac{1}{2} \varphi_1 : \cos \frac{1}{2} \gamma_1, \quad \sin \gamma_2 = k \sin \varphi_2;$$

$$\sin \varphi_3 = \sin \frac{1}{2} \varphi_2 : \cos \frac{1}{2} \gamma_2, \quad \sin \gamma_3 = k \sin \varphi_3;$$

$$\sin \varphi_4 = \sin \frac{1}{2} \varphi_3 : \cos \frac{1}{2} \gamma_3, \quad \sin \gamma_4 = k \sin \varphi_4;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sin \varphi_r = \sin \frac{1}{2} \varphi_{r-1} : \cos \frac{1}{2} \gamma_{r-1},$$

so ist

$$F(k, \varphi) = 2^r F(k, \varphi_r)$$

$$E(k, \varphi) = 2^r E(k, \varphi_r)$$

$$- (\sin \varphi \sin^2 \gamma_1 + 2 \sin \varphi_1 \sin^2 \gamma_2 + 2^2 \sin \varphi_2 \sin^2 \gamma_3 + \dots + 2^{r-1} \sin \varphi_{r-1} \sin^2 \gamma_r).$$

Setzt man die Berechnung so weit fort, bis höhere, als die fünfte Potenz von φ vernachlässigt werden können, so hat man zu setzen, wenn vorübergehend φ_r durch φ ersetzt wird:

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)} = (1 + k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k^2}{2} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)^2 + \frac{3k^4}{8} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)^4,$$

$$\Delta(\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)^2 - \frac{k^4}{8} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right)^4;$$

*) GAUSS, Sämmtliche Werke, herausgeg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 3, pag. 361. 1866.

rem für elliptische Integrale. Numeri

ie obere Grenze z rein imaginä
lex. Ersetzt man z durch iy ,

$$\frac{dz}{(1 - k^2 z^2)} = i \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^2)(1 - k^2 y^2)}}$$

$\text{ng } \varphi$ ein, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{\varphi + k^2 \sin^2 \varphi} = i \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{dz}{-z^2(1 - k^2 z^2)} = iF(k', \varphi)$$

$$\text{tang } \varphi = y.$$

rechnung eines rein imaginärer
len Integrals mit complementä
itionstheorems lässt sich jedes
re Grenze complex ist, i
naginären Integrals zerlege

$$\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^2)(1 - k^2 y^2)}} = \frac{y \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2 y^2)}}{1 + k^2 x^2 y^2}$$

es Realen und Imaginären erg

$$\frac{k^2 y^2}{1 + k^2 x^2 y^2} = a, \quad y \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2 y^2)} =$$

$$+ 1) y^2 + k^2 y^4] = a^2 (1 + k^2$$

$$+ 1) x^2 + k^2 x^4] = b^2 (1 + k^2$$

Wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gesetzt wir

$$c^2 x^2 y^2 (y^2 + x^2) = c^2 (1 + k^2$$

durch $1 + k^2 x^2 y^2$

$$1 + y^2 = c^2 (1 + k^2 x^2 y^2).$$

ehmen wir

$$y^2 = \frac{c^2 - x^2}{1 - k^2 c^2 x^2}.$$

Addition von x^2

$$c^2 + y^2 = \frac{c^2(1 - k^2 x^4)}{1 - c^2 k^2 x^2}.$$

$$+ 1) x^2 + k^2 x^4) = \frac{b^2}{c^4} (x^2 +$$

5. und 6. berechneten Werthe

$$(1 - k^2 x^2)(1 - c^2 k^2 x^2) = b^2$$

liesslich

$$) x^2 + (1 + 2k^2 c^2 + c^4 k^4 + k$$

$$- c^2)(1 + k^2 c^2) x^6 + a^2 k^4 x^6 =$$

n. Entwicklung der

$\sin w = z$,
 och eine Reihe z
 w , $\operatorname{cosec} w$; es z
 Theorie sowol,
 anendlich vieler
 dem dort befolgt
 , elliptischen Inte

$$\frac{dz}{z^2(1-k^2z^2)} =$$

ischen Form

$$\frac{d\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi} = w$$

ie Gleichung $z =$
 φ betrachtet, das
 (= Amplitude vo
 ie Umkehrung vo
 w (Sinus amplitu

$$\overline{z^2} = \cos am w.$$

ien ist noch $\sqrt{1}$

Delta amplitudini
 bezeichnet; $\sin am w$, $\cos am w$, $\Delta am w$ nennt man e
 Gegensatze zu den elliptischen Integralen.

Aus 2. folgt $d\varphi = \Delta(\varphi) dw$; daher ist

$$\frac{d am w}{dw} = \Delta am w.$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \frac{d \sin am w}{dw} &= \frac{d \sin am w}{d am w} \cdot \frac{d am w}{dw} = \\ 3. \quad \frac{d \cos am w}{dw} &= \frac{d \cos am w}{d am w} \cdot \frac{d am w}{dw} = - , \\ \frac{d \Delta am w}{dw} &= \frac{d \Delta am w}{d am w} \cdot \frac{d am w}{dw} = - , \end{aligned}$$

Ueber die Vorzeichen verfügen wir so, dass d
 die Werthe $\cos am w = \Delta am w = +1$ (nicht -1)

2. Bezeichnet w den Werth, den das elliptisc
 Punkte der mit den nöthigen Querschnitten versel
 welcher w mit z zugleich verschwindet, so ist

$$z = \sin am w.$$

Der allgemeine Werth des Integrals ist $w +$
 daher auch

$$z = \sin am (w + m \cdot 4K + n$$

Daher haben wir

$$\sin am (w + m \cdot 4K + n \cdot 2K' i) .$$

Hieraus ergibt sich die Haupteigenscha

^{*)} JACOBI, Fundamenta nova etc., pag. 30.

ctionen. Entwicklung derselben in Potenzen
der in No. 3 gegebenen Werthe

$$\cos(w \pm K) = \pm \frac{\cos am w}{\Delta am w},$$

$$\sin(w \pm K) = \mp k' \frac{\sin am w}{\Delta am w},$$

$$\Delta(w \pm K) = \frac{k'}{\Delta am w};$$

$$\cos(w \pm 2K) = -\sin am w,$$

$$\sin(w \pm 2K) = -\cos am w,$$

$$\Delta(w \pm 2K) = \Delta am w.$$

aus diesen Gleichungen folgt, dass die Functionen

sich

$$\cos(w \pm 4K) = \cos am w;$$

daher die reale Periode $4K$.

$$\sin(w \pm iK'), \Delta am(w \pm iK')$$

$$\frac{\sin am w}{\Delta am w} = 1 : \sqrt{\frac{1}{\sin^2 a}}$$

$$= iK', \text{ so wird } \sin am w = \infty \text{ und}$$

$$= -i, \quad \frac{\sin am iK'}{\Delta am iK'} = -i \cdot \frac{1}{k}$$

in den Additionsgleichungen Zähler und

$$= iK', \text{ so erhält man}$$

$$\cos(w + iK') = \frac{1}{k \sin am w},$$

$$\sin(w + iK') = -i \cdot \frac{\Delta am w}{k \sin am w},$$

$$\Delta(w + iK') = -i \cdot \frac{\cos am w}{\sin am w}.$$

aus dieser Gleichung entsteht

$$\cos(w + i \cdot 2K') = \sin am w,$$

$$\sin(w + i \cdot 2K') = -\cos am w,$$

$$\Delta(w + i \cdot 2K') = -\Delta am w.$$

und 7. folgt

$$\cos(w + 2K + i \cdot 2K') = \cos am w.$$

$$\sin(w + i \cdot 4K') = \Delta am w.$$

Im Anschluss an die Gleichungen

hat die reale Periode $4K$ und

in $\Delta am w$ hat die reale Periode

um diese anschaulich zu machen, zeichnen

n, für welche eine elliptische Function

nkte der realen und der imaginären

tion verschwindet, unendlich groß

heit wird, sind der Reihe nach durch

pelte verticale Striche ausgezeichnet.

ionen. Entwicklung derselben in Potenzreihen

infolge der realen Periode $4K$ dieselben Parallelen, sind auf Parallelen zu OA r realen Achse um Vielfache von $4K$ eser Parallelen, die einem bestimmten gehenden Parallelen zur realen Achse. durch Parallele zu OA , welche die P

$-4K, 0, 4K, 8K, \dots$,
en Achse, welche die Punkte enthalten
 $i \cdot 2K', 0, i \cdot 2K', i \cdot 4K', \dots$,
Parallelelogramme; eins derselben hat
 $2K'$.

lelogramm, so nimmt $\cos am w$ alle
an. Denken wir uns wieder jeden Pu
rörigen Werthe von $\cos am w$ behaftet, :
in einem andern Parallelelogramme e
wir das erstere mit dem letzteren durc
gen.

hat die reale Periode $2K$ und die

$i \cdot 4K'$; daher ziehen wir in der w -Ebene
Parallele zur realen Achse durch die Punkte
 $\dots -i \cdot 8K', -i \cdot 4K', 0, i \cdot 4K', i \cdot 8K', \dots$
sowie Parallele zur imaginären Achse durch
die Punkte

$\dots -4K, -2K, 0, 2K, 4K, \dots$

Durchläuft w das Rechteck, das die
Ecken hat $0, 2K, 2K + i \cdot 4K', i \cdot 4K'$, so
nimmt $\Delta am w$ alle möglichen Werthe an.
Denken wir uns auch diesmal die Punkte
dieses Rechtecks mit den zugehörigen Func
tionswerthen behaftet, so erhalten wir die
Functionswerthe für die Punkte eines andern
der Rechtecke, indem wir das erstere parallel
verschieben, bis es mit dem letzteren zu
sammenfällt.

8. Setzt man im Additionstheoreme
 $w_1 = w$, so folgen die Formeln

$$\sin am 2w = \frac{2 \sin am w \cos am w \Delta am w}{1 - k^2 \sin^4 am w},$$

$$\cos am 2w = \frac{\cos^2 am w - \sin^2 am w \Delta^2 am u}{1 - k^2 \sin^4 am u} = \frac{1 - 2 \sin^2 am w + \varphi^2 s}{1 - k^2 \sin^4 am}$$

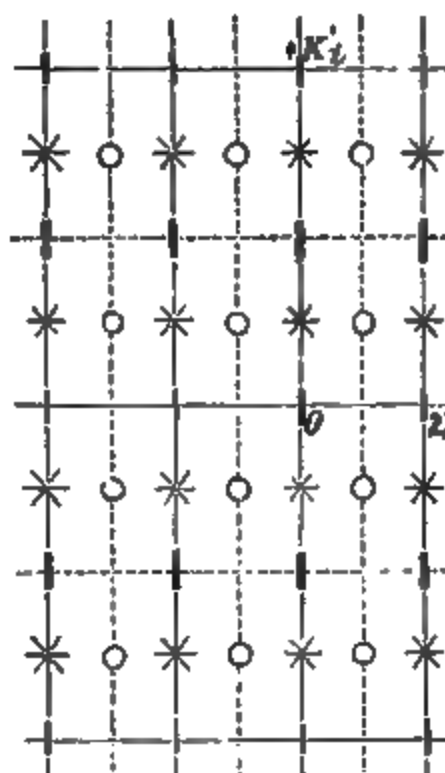
$$\Delta am 2w = \frac{\Delta^2 am w - k^2 \sin^2 am w \cos^2 am w}{1 - k^2 \sin^4 am w} = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 am w + k^2}{1 - k^2 \sin^4 am}$$

Setzt man in der zweiten Gleichung $w = \frac{1}{2}K$, so erhält man

$$1 - 2 \sin^2 am \frac{1}{2}K + k^2 \sin^4 am \frac{1}{2}K = 0.$$

In Rücksicht darauf, dass $\sin am \frac{1}{2}K$ positiv und kleiner als 1
hierauf die Werthe

$$\sin am \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k}}, \quad \cos am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k}}, \quad \Delta am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k}}$$



(M. 569.)

lich

$$\frac{\xi'}{2} =$$

fe c

$$\left(\frac{K}{2}\right)$$

$$\left(K\right)$$

$$\frac{K \pm}{}$$

$$\frac{\operatorname{dri}}{\sqrt{1+\frac{}{\lambda}}}$$

adra

etzte

e Vc

Fu

. w.

i wi

ents

quer

che

la e

$$\left.\begin{matrix} x_0 \\ c \end{matrix}\right)_a$$

—

den

ränd

en i

ndli

s Pu

ktes

nd ζ

i in

ass,

l, d

tionen. Entwicklung dersel

$$= \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}$$

tt nur ein, wenn $z = e^{iK' + 2mK + 2niK}$
einen geschlossenen γ
einem Anfangswerthe
n uns dabei darauf besc
ssen, der einen dieser
 $i2nK' + p e^{i\varphi} = \pm$
 $= \pm$

eschreibt $w = p e^{i\varphi}$ ein
iesst keinen Punkt ein,
le desselben Wegs der
e auch für $\sin am w$,
t. Hieraus folgt, dass
 w einen geschlossenen
deutige Function von z
utige Function von w ist
deutige Functionen von

RIEMANN'schen Variabelnfläche sind, so folgt, dass au
deutige Functionen von w sind.

10. Die elliptischen Functionen $\sin am w$, $\cos am w$
endlich innerhalb des mit dem Halbmesser K' bes
lassen sie sich in Potenzreihen entwickeln, die f

Da $\sin am w$ mit w das Zeichen wechselt, $\cos am w$
so folgt, dass die Reihe für $\sin am w$ nur ungerade,
nur gerade Potenzen von w enthalten; wir haben d

$$\begin{aligned}\sin am w &= a_1 w + a_3 w^3 + a_5 w^5 \\ \cos am w &= 1 + b_2 w^2 + b_4 w^4 \\ \Delta am w &= 1 + c_2 w^2 + c_4 w^4\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der a , b , c bedienen wir uns der
Coefficienten. Nach No. 1, 3 ist

$$\frac{d \sin am w}{dw} = \cos am w \Delta am w$$

Differenziren wir nochmals, und benutzen die F
quotienten von $\cos am w$ und $\Delta am w$, so erhalten wir

$$\frac{d^2 \sin am w}{dw^2} = -(1+k^2) \sin am w +$$

Setzen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung
ein und vergleichen die gleich hohen Potenzen von
Coefficienten a_1, a_3, a_5, \dots die Gleichungen

$$\begin{aligned}3 \cdot 2 \cdot a_3 &= -(1+k^2) a_1, \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 &= -(1+k^2) a_3 + 2k^2 a_1^3, \\ 7 \cdot 6 \cdot a_7 &= -(1+k^2) a_5 + 6k^2 a_1^2 a_3, \\ 9 \cdot 8 \cdot a_9 &= -(1+k^2) a_7 + 6k^2 (a_1^3 a_5 + a_1 a_3^2), \\ 11 \cdot 10 \cdot a_{11} &= -(1+k^2) a_9 + 2k^2 (3a_1^3 a_7 + a_3^3 + \\ 13 \cdot 12 \cdot a_{13} &= -(1+k^2) a_{11} + 2k^2 (3a_1^3 a_9 + 3a_1 a_3^2 a_7 + \\ &\dots\end{aligned}$$

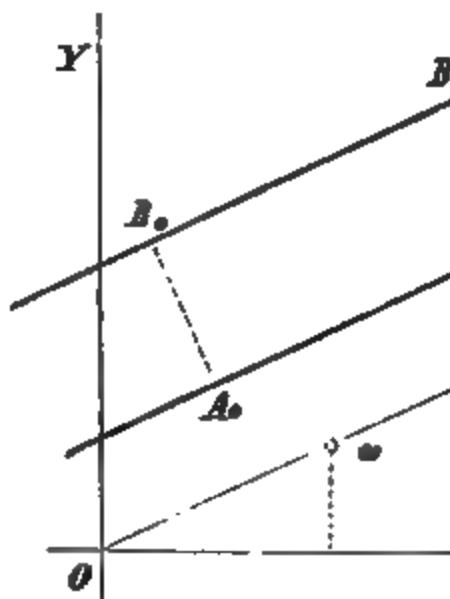
unctionen. Entwicklung derselben in Potenzre

dukte je zweier der Functionen $\sin aw$
wir die soeben entwickelten Reihen na

$$\begin{aligned} & \cos amw \cdot \Delta amw \\ & - w^2 + \frac{1 + 14k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} w^4 - \dots \\ & \sin amw \cdot \Delta amw \\ & \frac{k^2}{3} w^3 + \frac{1 + 44k^2 + 16k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} w^5 - \dots \\ & \sin amw \cdot \cos amw \\ & \frac{2}{3} w^3 + \frac{16 + 44k^2 + k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} w^5 - \dots \\ & modw < K'. \end{aligned}$$

die elliptischen Functionen in
er wollen wir die FOURIER'schen Reiher

Die Function $f(z)$ sei periodisch und habe die reale oder compl
sie sei ferner endlich und eindeutig inner-
halb eines unendlichen Streifens $A_0 A_1$
 $B_0 B_1$, dessen Ränder mit der vom Null-
punkte nach dem Punkte ω gezogenen
Geraden parallel sind. Nach der Voraus-
setzung zerfällt dieser Streifen in con-
gruente Rechtecke, deren in der Richtung
des Streifens gemessene Länge $A_0 A_1$
einer Aenderung des z um den Periodi-
citätsmodul ω zugehört, so dass für homo-
loge Punkte dieser Rechtecke $f(z)$ den-
selben Werth hat.



(M. 571.)

Wir führen eine neue Variable t
durch die Gleichung ein

$$1. \quad \frac{2\pi z}{\omega} = t$$

und setzen $t = re^{i\theta}$; dann ist

$$2. \quad z = -\frac{i\omega}{2\pi} \log r + \frac{\omega}{2\pi} \theta.$$

Bewegt sich z auf einer Parallelen zu $A_0 A_1$, so durchläuft
 $z + m\omega$, wobei m real ist. Gehören r_1 und θ_1 zu $z + m\omega$, so i

$$3. \quad z + m\omega = -\frac{i\omega}{2\pi} \log r_1 + \frac{\omega}{2\pi} \theta_1.$$

Durch Subtraction von 2. und Division durch ω ergibt sich

$$m = -\frac{i}{2\pi} \log \frac{r_1}{r} + \frac{1}{2\pi} (\theta_1 - \theta).$$

Da m real ist, so folgt hieraus $r_1 = r$; ferner folgt für $m =$
 $\theta_1 = \theta + 2\pi$; beschreibt also z eine Parallele zur Streifenrichtu
sich t auf einem Kreise, schreitet z um ω fort, so durchläuft t eine

Hieraus folgt, dass den Normalen zur Streifenrichtung in
Strahlen durch den Nullpunkt in der t -Ebene entsprechen.

*) BRIOT et BOUQUET, Théorie des fonctions élliptiques, 2. éd. Paris
KÖNIGSBERGER, Vorlesungen über die Theorie der Ellipt. Funct., Leipzig 1874.

Gehören nun zu $A_0 A_1$ und B_0 spricht dem Rechtecke $A_0 A_1 B_1 B_0$, beschrieben Kreisen enthalte innerhalb dieses Rechtecks eindeutig

$$f\left(-\right.$$

die aus $f(z)$ durch Ersetzung von z für den zwischen $r = r_0$ und $r = r_1$ Function (§ 13, No. 13) in eine Rei

Wenn man t wieder durch z er

4.
$$f(z) =$$

gültig zunächst für das Rechteck $A_0 A_1$ $z + \omega$ sowohl $f(z)$ als $e^{\frac{2\pi n z}{\omega}}$ denselb entwicklung für den ganzen zwische Streifen gültig ist.

Für die Coefficienten hat man

$$a_n = \frac{1}{2\pi}$$

erstreckt über einen Kreis, dessen man z ein, so entsteht

5.
$$a_n = \frac{1}{\omega} \int$$

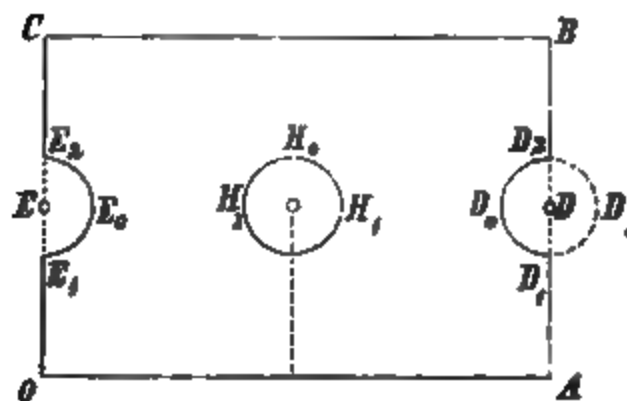
erstreckt über $A_0 A_1$, oder eine im gleiche Strecke.

Ersetzt man in 4. und 5. di Functionen, so erhält man die FOUR

$$f(z) = a_0 + i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{\omega} e^{\frac{2\pi n z}{\omega}} + \frac{b_n}{\omega} e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}} \right)$$

die mit der § 11, No. 12 mitgetheilt

14. Ist $f(z) = \sin am z^*)$, so scl



(M. 572.)

*) Den bisher aus leicht erkennbaren elliptischen Functionen mit w zu bezeichne

unendlich gross wird, durch verschwindend kleine Halbkreise, und schliessen den Punkt $2K + 2K'i$, in welchem $\sin am z$ ebenfalls unendlich ist, durch einen verschwindend kleinen Kreis $H_0 H_1 H_2$ aus, so ist für die Function $f(z) e^{-\frac{n\pi z}{2K}i} dz$

$$\int OA + \int AD_1 + \int D_1 D_0 D_2 + \int D_2 B + \int BC + \int CE_2 + \int E_2 E_0 E_1 + \int E_1 O + \int H_0 H_1 H_2 = 0.$$

In correspondirenden Punkten von OC und AB haben $\sin am z$ und $e^{-\frac{n\pi z}{2K}i}$ denselben Werth, dz aber entgegengesetzt gleiche Werthe, mithin verschwindet die Summe der auf diese Strecken bezüglichen Integrale. In correspondirenden Punkten der Seiten OA und BC hat $\sin am z$ gleiche Werthe, zur Exponentialgrösse tritt aber der Faktor $e^{-\frac{n\pi K'}{K}}$.

Wir setzen

$$e^{-\frac{n\pi K'}{K}} = q,$$

und haben daher

$$\int OA + \int BC = (1 - q^{-n}) \int OA.$$

Statt des Integrals $\int E_2 E_0 E_1$ können wir $\int D_2 D_3 D_1$ setzen, da in correspondirenden Punkten beider Halbkreise die zu integrierende Function gleiche Werthe hat. Für die Kreisintegrale über $D_1 D_0 D_3$ und $H_0 H_1 H_2$ setzen wir, der Reihe nach, indem wir den Radius mit r bezeichnen,

$$z = 2K + K'i + r e^{i\varphi}, \quad \text{bez.} = 4K + K'i + r e^{i\varphi},$$

bezeichnen die verschwindende Grösse $r e^{i\varphi}$ mit ρ und beachten, dass

$$\sin am(2K + K'i + \rho) = -\frac{1}{k \sin am \rho},$$

$$\sin am(4K + K'i + \rho) = \frac{1}{k \sin am \rho}.$$

Somit erhalten wir

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = i \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sin am \rho} e^{-\frac{n\pi \rho}{2K}i} d\varphi.$$

Wir gehen nun zur Grenze für ein verschwindendes ρ über; da

$$\lim \frac{\rho}{\sin am \rho} = 1, \quad \lim e^{-\frac{n\pi \rho}{2K}i} = 1,$$

so folgt

$$\int D_1 D_0 D_3 + \int H_0 H_1 H_2 = 2\pi \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot i.$$

Hieraus erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{4K} \cdot \int OA = i \frac{\pi}{2K} \cdot \frac{e^{-n\pi i} - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n} = i \frac{\pi}{2K} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{k} \cdot \frac{\sqrt{q^n}}{1 - q^n}$$

Daher ist

$$a_n + a_{-n} = 0,$$

$$a_{2n} - a_{-2n} = 0, \quad a_{2n+1} - a_{-2n-1} = -i \cdot \frac{2\pi}{kK} \cdot \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1 - q^{2n+1}}.$$

Dies ergibt nun die gesuchte Entwicklung

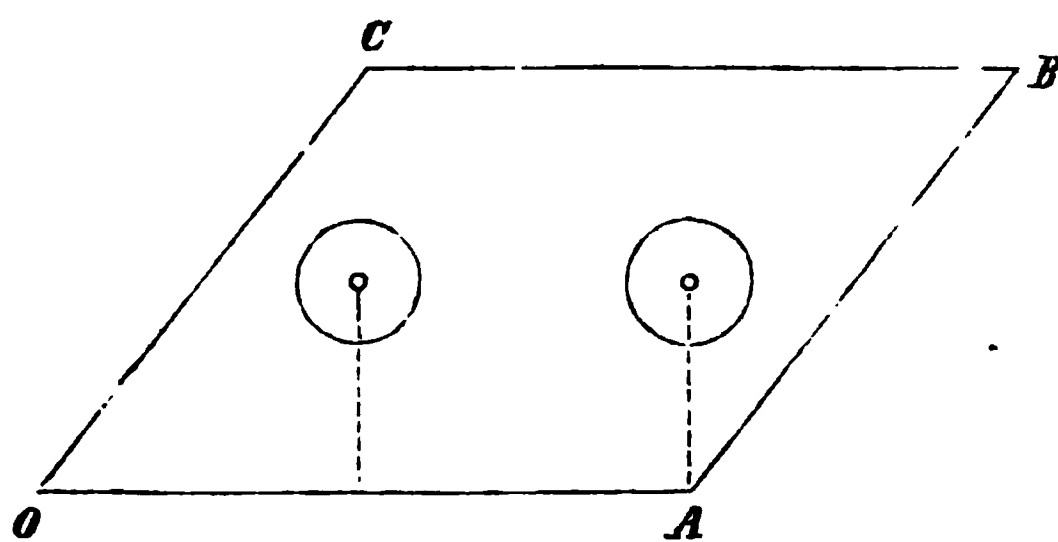
$$\sin am z =$$

$$\frac{2\pi}{kK} \left(\frac{\sqrt{q}}{1 - q} \cdot \sin \frac{\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1 - q^3} \cdot \sin \frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1 - q^5} \sin \frac{5\pi z}{2K} + \dots \right).$$

15. Zur Ermittlung des geradlinigen Integrales

$$\int_0^{4K} \cos am z \cdot e^{-\frac{\pi n z}{2K} i} dz$$

bilden wir ein Parallelogramm $OABC$, für dessen Ecken $z = 0, 4K, 6K + 2K'i, 2K + 2K'i$ und schliessen die



(M. 573.)

beiden Punkte $2K + K'i$ und $4K + K'i$ im Inneren dieses Parallelogramms, für welche $\cos am z$ unendlich wird, durch gleiche verschwindende Kreise aus. Das Integral erstreckt über den Perimeter des Parallelogramms ist gleich der Summe der beiden Kreisintegrale. In

correspondirenden Punkten der Seiten AB und OC haben $\cos am z$ und die Exponentialgrösse gleiche, dz entgegengesetzt gleiche Werthe; also verschwindet die Summe der über AB und CO erstreckten Integrale.

In correspondirenden Punkten von OA und BC hat $\cos am z$ gleiche Werthe und zur Exponentialgrösse tritt der Faktor

$$e^{-\frac{\pi n}{2K} (2K + 2K'i)i} = (-q)^{-n}.$$

Die beiden Integrale geben daher vereint

$$[1 - (-q)^{-n}] \cdot \int OA.$$

In den Kreisintegralen setzen wir

$$z = 2K + K'i + \rho, \quad \text{bez.} = 4K + K'i + \rho, \\ \rho = r e^{i\varphi},$$

und beachten, dass

$$\cos am(2K + K'i + \rho) \cdot e^{-\frac{\pi n i}{2K} (2K + K'i + \rho)} = i \cdot e^{-\pi n i} \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Delta am \rho}{k \sin am \rho} \cdot e^{-\frac{\pi n \rho}{2K} i}, \\ \cos am(4K + K'i + \rho) \cdot e^{-\frac{\pi n i}{2K} (4K + K'i + \rho)} = -i \cdot q^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Delta am \rho}{k \sin am \rho} \cdot e^{-\frac{\pi n \rho}{2K} i}.$$

Die Summe der beiden Kreisintegrale ist daher

$$\frac{1}{k} (1 - e^{-\pi n i}) q^{-\frac{n}{2}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho \Delta am \rho}{\sin am \rho} \cdot e^{-\frac{\pi n \rho}{2K} i} d\varphi;$$

der Grenzwert derselben für ein verschwindendes ρ ist

$$\frac{2\pi}{k} (1 - e^{-\pi n i}) q^{-\frac{n}{2}}.$$

Daher ergibt sich

$$a_n = \frac{\pi}{2kK} (1 - e^{-\pi n i}) \frac{q^{-\frac{n}{2}}}{1 - (-q)^{-n}}.$$

Ist n gerade, so ist $a_n = 0$; für ungerade n hat man

$$a_{2n+1} = \frac{\pi}{kK} \cdot \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1} + 1};$$

mithin ist

$$a_{2n+1} - a_{-2n-1} = 0, \quad a_{2n+1} + a_{-2n-1} = \frac{2\pi}{kK} \cdot \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{q^{2n+1} + 1}.$$

Dies ergibt schliesslich die Entwicklung

$$\cos am z =$$

$$\frac{2\pi}{kK} \left[\frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos \frac{\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3} \cos \frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5} \cos \frac{5\pi z}{2K} + \dots \right].$$

16. Um $\Delta am z$ in eine FOURIER'sche Reihe zu entwickeln, haben wir das geradlinige Integral auszuwerthen

$$\int_0^{2K} \Delta am z e^{-\frac{n\pi z}{K}i} dz.$$

Wir integrieren die unter dem Integralzeichen stehende Function auf dem Perimeter $OABC$, in dessen Ecken $z = 0, 2K, 2K + 4K'i, 4K'i$, und schliessen die Punkte $K'i, 3K'i, 2K + K'i, 2K + 3K'i$, in welche $\Delta am w$ unendlich gross wird, durch kleine Halbkreise aus. Die Integrale über AB und CO haben wieder die Summe Null. In correspondirenden Punkten von OA und CD hat $\Delta am z$ gleiche Werthe, die Exponentialgrösse nimmt den Faktor an

$$e^{\frac{4n\pi K'}{K}} = q^{-4n},$$

die beiden Integrale geben daher zusammen

$$(1 - q^{-4n}) \cdot \int OA.$$

Die vier Halbkreisintegrale kann man durch zwei Kreisintegrale um iK' und $3iK'$ ersetzen; wir substituiren in denselben

$$z = iK' + \rho, \quad \text{bez.} = 3iK' + \rho, \quad \rho = re^{i\varphi},$$

und bemerken, dass

$$\Delta am (iK' + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(iK' + \rho)} = -i \frac{\cos am \rho}{\sin am \rho} \cdot q^{-n} \cdot e^{-\frac{n\pi \rho}{K}i},$$

$$\Delta am (3iK' + \rho) \cdot e^{-\frac{n\pi i}{K}(3iK' + \rho)} = i \frac{\cos am \rho}{\sin am \rho} \cdot q^{-3n} \cdot e^{-\frac{n\pi \rho}{K}i}.$$

Für die beiden Kreisintegrale ergibt sich, wenn man ρ unendlich klein nimmt,

$$2\pi (q^{-n} - q^{-3n}).$$

Daher ist

$$a_n = \frac{\pi}{K} \cdot \frac{q^{-n} - q^{-3n}}{1 - q^{-4n}} = \frac{\pi}{K} \cdot \frac{q^n}{1 + q^{2n}};$$

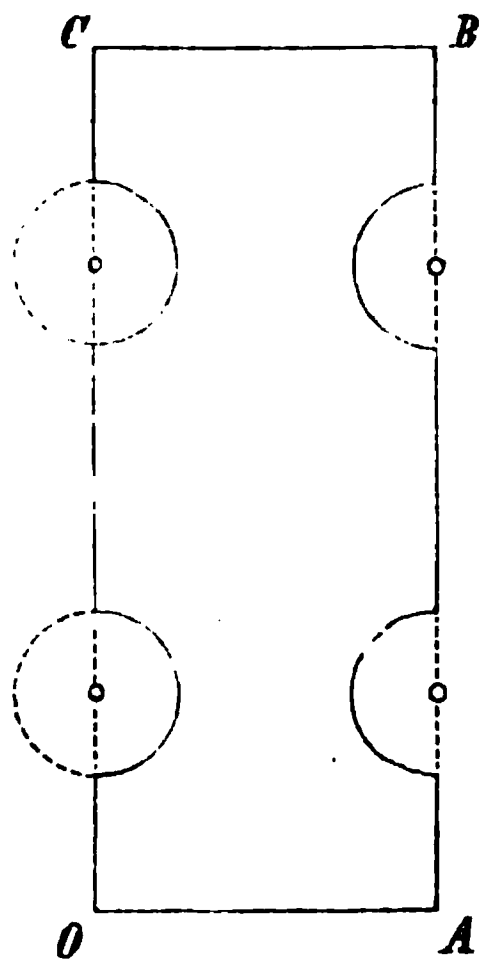
da $a_{-n} = a_n$, so ist

$$a_n - a_{-n} = 0, \\ a_n + a_{-n} = \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{q^n}{1 + q^{2n}}, \quad a_0 = \frac{\pi}{K}.$$

Dies liefert schliesslich

$$\Delta am z = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1+q^2} \cos \frac{\pi z}{K} + \frac{q^3}{1+q^4} \cos \frac{2\pi z}{K} + \frac{q^5}{1+q^6} \cos \frac{3\pi z}{K} + \dots \right).$$

Diese FOURIER'schen Reihen für $\sin am z$, $\cos am z$ und $\Delta am z$ gelten für alle Werthe von z , welche innerhalb des Streifens liegen, der sich parallel der realen Achse erstreckt und dessen Ränder durch die Punkte $\pm iK'$ gehen. Jenseit dieses Streifens wiederholen sich die Werthe der elliptischen Functionen, gemäss ihrer complexen Periode, und zwar bei $\cos am z$ und $\Delta am z$ mit Vorzeichenwechsel; die FOURIER'schen Reihen sind aber nur einfach periodisch und setzen sich jenseit des Streifens mit andern Werthen fort, als die Functionen, mit denen sie für Punkte im Innern des Streifens übereinstimmen.



(M. 574.)

17. Aus den in No. 14, 15 und 16 entwickelten Reihen lassen sich durch Differentiation, Integration und geeignete Substitutionen eine grosse Anzahl brauchbarer Reihen ableiten. Wir beschränken uns hier auf wenige Beispiele.

Ersetzt man in den drei Reihen z durch $K - z$, so entsteht

$$1. \quad \frac{\cos am z}{\Delta am z} = \frac{2\pi}{kK} \left(\frac{\sqrt{q}}{1-q} \cos \frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^2} \cos \frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^4} \cos \frac{5\pi z}{2K} - \dots \right),$$

$$2. \quad \frac{\sin am z}{\Delta am z} = \frac{2\pi}{kk'K} \left(\frac{\sqrt{q}}{1+q} \sin \frac{\pi z}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^2} \sin \frac{3\pi z}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^4} \sin \frac{5\pi z}{2K} - \dots \right),$$

$$3. \quad \frac{1}{\Delta am z} = \frac{\pi}{2k'K} - \frac{2\pi}{k'K} \left(\frac{q}{1+q^2} \cos \frac{\pi z}{K} - \frac{q^2}{1+q^4} \cos \frac{2\pi z}{K} + \frac{q^3}{1+q^6} \cos \frac{3\pi z}{K} - \dots \right).$$

Aus den Transformationsformeln § 17, No. 5.

$$4. \quad F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \varphi_1\right) = (1+k') F(k, \varphi),$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{(1+k') \cos \varphi \sin \varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{1 - (1+k') \sin^2 \varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$\Delta(\varphi_1) = \frac{1 - (1-k') \sin^2 \varphi}{\Delta(\varphi)},$$

erhält man sofort, indem man $F(k, \varphi) = w$ setzt,

$$\sin am \left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'} \right] = \frac{(1+k') \cos am w \sin am w}{\Delta am w},$$

$$\cos am \left[(1+k')w, \frac{1-k'}{1+k'} \right] = \frac{1 - (1+k') \sin^2 am w}{\Delta am w}.$$

Da nun nach 4. die Werthe $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi_1 = \pi$ einander entsprechen, so ist

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \pi\right) = 2 F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K, \text{ also}$$

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k'}{2} K.$$

Das Complement zu $\frac{1-k'}{1+k'}$ ist $\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$. Aus § 17, No. 5, 11 erhält man leicht

$$F(k', \pi) = 2 F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{1+k'} F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ also}$$

$$F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+k')K'.$$

Ersetzt man also

$$k \text{ durch } \frac{1-k'}{1+k'} \text{ und } w \text{ durch } (1+k')w,$$

so verwandelt sich

$$K \text{ in } \frac{1}{2}(1+k')K, \quad K' \text{ in } (1+k')K',$$

$$q \text{ in } q^2,$$

$$\sin am w \text{ in } \frac{(1+k') \sin am w \cos am w}{\Delta am w},$$

$$\cos am w \text{ in } \frac{1 - (1+k') \sin^2 am w}{\Delta am w}.$$

Durch diese Substitution erhält man aus der Reihe für $\sin am z^*)$:

$$\frac{\sin am z \cos am z}{\Delta am z} = \frac{4\pi}{k^2 K} \left(\frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi z}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin \frac{3\pi z}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}} \sin \frac{5\pi z}{K} + \dots \right).$$

§ 19. Die Thetafunctionen.

1. Die FOURIER'schen Reihen für die elliptischen Functionen legen die Frage nahe, ob es nicht möglich sein wird, die Coefficienten a_n einer Reihe

$$1. \quad S(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}};$$

so zu bestimmen, dass durch dieselbe eine Function, welche ausser der Periode ω noch eine zweite Periode μ hat, für alle Werthe der Variablen dargestellt wird.

Ersetzt man z durch $z + \mu$, so erhält man

$$S(z + \mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{-\frac{2\pi n \mu}{\omega}} \cdot e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}}.$$

Setzt man abkürzungsweise $e^{\frac{2\pi \mu}{\omega}} = q$, so wird

$$S(z + \mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n q^{-n} e^{-\frac{2\pi n z}{\omega}}.$$

Soll nun für alle Werthe von z die Gleichung bestehen

$$2. \quad S(z + \mu) = S(z),$$

so folgt $q = 1$, mithin $\mu = m\omega$, wo m eine ganze Zahl ist. Durch die Gleichung 2. kommt man also über die Periode ω nicht hinaus, und erkennt, dass durch eine FOURIER'sche Reihe eine doppelt periodische Function nicht dargestellt werden kann.

Man kann nun versuchen, eine Reihe zu erhalten, die dem Charakter der doppelten Periodicität möglichst nahe kommt, in dem Sinne, dass beim Uebergange von z auf $z + \mu$ die Reihe einen einfachen, von der Reihensumme nicht unmittelbar abhängigen Faktor annimmt; wenn es dann gelänge, eine zweite, ähnliche Reihe zu construiren, die bei demselben Wachsthum von z auf $z + \mu$ denselben Faktor annimmt, wie die erste, so würde dann der Quotient beider Reihen sich nicht verändern, wenn z durch $z + \mu$ ersetzt wird. Wir gelangen so zu dem Gedanken, eine doppelt periodische Function durch den Quotienten zweier Reihen darzustellen.

Die Forderung, dass bei der Substitution von $z + \mu$ für z die Reihe 1. sich bis auf einen einfach angebbaren Faktor reproducirt, lässt sich erfüllen, wenn wir die Coefficienten a der Bedingung unterwerfen

$$3. \quad a_n q^{-n} = \gamma \cdot a_{n-1},$$

wobei γ eine noch unbestimmte Constante ist. Denn unter dieser Bedingung ist

$$S(z + \mu) = \gamma \cdot e^{-\frac{2\pi z}{\omega}} \cdot S(z).$$

Wir dürfen einen Coefficienten beliebig wählen; es sei $a_0 = 1$; alsdann folgt aus 3.

$$a_1 = \gamma q, \quad a_2 = \gamma^2 q^2, \quad a_3 = \gamma^3 q^3, \quad \dots \dots$$

$$a_n = \gamma^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

*) Weitere Entwicklungen dieser Art und einen Uebergang von FOURIER'schen Reihen auf unendliche Produkte siehe SCHLOEMILCH, Compendium Bd. 2. Abschn. Ellipt. Funct.

Um zunächst die einfachsten Bildungen zu erhalten, nehmen wir

$$\gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}};$$

dann wird

$$a_n = (\pm 1)^n q^{\frac{n^2}{2}},$$

und wir erhalten so zwei Formen für S , nämlich

$$4. \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2 \mu - 2nz)} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(n^2 \mu - 2nz)}.$$

Um ähnlich gebaute Reihen zu erhalten, die beim Uebergange von z auf $z + \mu$ um einfache Faktoren wachsen, betrachten wir

$$5. \quad S_1(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega}}.$$

Setzt man hier $z + \mu$ für z , so entsteht

$$S_1(z + \mu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi z}{\omega}}.$$

Bestimmt man die b durch die Bedingung

$$6. \quad b_n q^{-\frac{2n+1}{2}} = \gamma_1 \cdot b_{n-1},$$

so wird

$$S_1(z + \mu) = \gamma_1 \cdot e^{-\frac{2\pi z}{\omega}} \cdot S_1(z).$$

Aus 6. folgt

$$b_1 = b_0 \gamma_1 q^{\frac{1}{2}}, \quad b_2 = b_1 \gamma_1 q^{\frac{1}{2}}, \quad b_3 = b_2 \gamma_1 q^{\frac{1}{2}}, \quad \dots$$

woraus sich ergibt

$$b_n = b_0 \gamma_1^n \cdot q^{\frac{n^2+2n}{2}}.$$

Wir nehmen

$$\gamma_1 = \gamma = \pm q^{-\frac{1}{2}}, \quad b_0 = q^{\frac{1}{2}},$$

und erhalten

$$b_n = (\pm 1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}.$$

Für die Reihe S_1 erhalten wir somit die beiden Formen

$$7. \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2 \mu - (2n+1)z]} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}[(n+\frac{1}{2})^2 \mu - (2n+1)z]}.$$

Wir sind hierdurch auf die Untersuchung der vier Reihen 4. und 7. geführt worden. Wir ersetzen in denselben $\pi z : \omega$ durch z und $i\mu\pi : \omega$ durch $-\rho$; ferner fügen wir zur letzten Reihe den Faktor i .

Die vier Reihen, welche wir so erhalten, führen nach JACOBI den Namen Thetafunctionen und werden durch die Functionszeichen

$$\vartheta(z, \rho), \quad \vartheta_1(z, \rho), \quad \vartheta_2(z, \rho), \quad \vartheta_3(z, \rho)$$

bezeichnet, so dass

$$8. \quad \begin{aligned} \vartheta(z) &= \sum (-1)^n e^{-n^2 \rho - i \cdot 2nz}, \\ \vartheta_1(z) &= i \sum (-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \rho - i(2n+1)z}, \\ \vartheta_2(z) &= \sum e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \rho - i(2n+1)z}, \\ \vartheta_3(z) &= \sum e^{-n^2 \rho - i \cdot 2nz}. \end{aligned}$$

Wird unter $e^{-\rho}$ ein realer positiver echter Bruch verstanden, so haben diese Reihen für jedes endliche z endliche Werthe und werden nur mit z zugleich unendlich gross.

Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften der Thetafunctionen entwickeln; am Schluss dieser Untersuchung werden wir den Zusammenhang dieser Functionen mit den elliptischen Functionen erkennen.

2. Rechnet man je zwei Glieder der Thetafunctionen zusammen, die zu entgegengesetzt gleichen n gehören, so erhält man die Reihen in folgender Gestalt

$$\begin{aligned}\vartheta(z) &= 1 - 2e^{-\rho} \cos 2z + 2e^{-4\rho} \cos 4z - 2e^{-9\rho} \cos 6z + \dots, \\ \vartheta_1(z) &= 2\sqrt{e^{-\rho}} \sin z - 2\sqrt{e^{-9\rho}} \sin 3z + 2\sqrt{e^{-25\rho}} \sin 5z - \dots, \\ \vartheta_2(z) &= 2\sqrt{e^{-\rho}} \cos z + 2\sqrt{e^{-9\rho}} \cos 3z + 2\sqrt{e^{-25\rho}} \cos 5z + \dots, \\ \vartheta_3(z) &= 1 + 2e^{-\rho} \cos 2z + 2e^{-4\rho} \cos 4z - 2e^{-9\rho} \cos 6z + \dots\end{aligned}$$

Hieraus erkennt man die Beziehungen

$$\begin{aligned}2. \quad \vartheta(z) &= \vartheta_3\left(\frac{1}{2}\pi - z\right), & \vartheta_2(z) &= \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi - z\right), \\ \vartheta_1(z) &= \vartheta_2\left(\frac{1}{2}\pi - z\right), & \vartheta_3(z) &= \vartheta\left(\frac{1}{2}\pi - z\right).\end{aligned}$$

Bezeichnet m eine ganze Zahl, so ist

$$\begin{aligned}3. \quad \vartheta(z + m\pi) &= \vartheta(z), & \vartheta_2(z + m\pi) &= (-1)^m \vartheta_2(z), \\ \vartheta_1(z + m\pi) &= (-1)^m \vartheta_1(z), & \vartheta_3(z + m\pi) &= \vartheta_3(z).\end{aligned}$$

Ersetzen wir in No. 1, 8 die Variable durch $z + \frac{1}{2}i\rho$, so folgt

$$\begin{aligned}4. \quad \vartheta\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= ie^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta(z), \\ \vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_3(z), \\ \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}i\rho\right) &= e^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_2(z).\end{aligned}$$

Ersetzen wir hier wieder z durch $z + \frac{1}{2}i\rho$, so entsteht

$$\begin{aligned}5. \quad \vartheta(z + i\rho) &= -e^{\rho - 2iz} \vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + i\rho) &= -e^{\rho - 2iz} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + i\rho) &= e^{\rho - 2iz} \vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + i\rho) &= e^{\rho - 2iz} \vartheta_3(z).\end{aligned}$$

Wenn man diese Substitution mehrmals wiederholt, und dann noch $z - i \cdot m_1 \rho$ für z setzt, so erhält man für jede ganze Zahl m_1

$$\begin{aligned}6. \quad \vartheta(z + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m_1} e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m_1} e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + m_1 \cdot i\rho) &= e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + m_1 \cdot i\rho) &= e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta_3(z).\end{aligned}$$

Aus 3. und 6. folgt noch

$$\begin{aligned}7. \quad \vartheta(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m_1} e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^{m+m_1} e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= (-1)^m e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + m\pi + m_1 \cdot i\rho) &= e^{m_1^2 \rho - 2im_1 z} \vartheta_3(z).\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man sofort, dass der Quotient je zweier Thetafunctionen doppelt periodisch ist; die Perioden sind von der Form $m \cdot \pi + n \cdot i\rho$, wobei m und n gleich 0, 1 oder 2 sind.

3. Die Multiplication der beiden Functionen

$$\vartheta_3(z) = \sum e^{-n^2 \rho - i \cdot 2nz}, \quad \vartheta_3(\zeta) = \sum e^{-m^2 \rho - i \cdot 2m\zeta}$$

ergibt die Doppelsumme

$$\vartheta_3(z) \cdot \vartheta_3(\zeta) = \sum \sum e^{-(n^2 + m^2)\rho - i \cdot 2(ns + m\zeta)}.$$

Für den Exponenten von e kann man schreiben

$$-2\rho\left[\frac{1}{4}(n+m)^2 + \frac{1}{4}(n-m)^2\right] - 2i\left[\frac{1}{2}(n+m)(z+\zeta) + \frac{1}{2}(n-m)(z-\zeta)\right].$$

Die Zahlen $n+m$ und $n-m$ sind gleichzeitig gerade oder ungerade; bezeichnen a und b ganze Zahlen, so ist also

$$n+m = 2a, \quad \text{und zugleich } n-m = 2b,$$

$$\text{oder } n+m = 2a+1, \quad \text{,, } \quad \text{,, } \quad n-m = 2b+1.$$

Durchlaufen a und b alle positiven und negativen ganzen Zahlen, so erhalten $n+m$ und $n-m$ alle möglichen Werthe.

Ersetzt man m und n durch a und b , so erhält man

$$\begin{aligned}\vartheta_3(z) \cdot \vartheta_3(\zeta) &= \sum \sum e^{-2\rho(a^2+b^2) - 2i[a(z+\zeta) + b(z-\zeta)]} \\ &+ \sum \sum e^{-2\rho[(a+\frac{1}{2})^2 + (b+\frac{1}{2})^2] - 2i[(a+\frac{1}{2})(z+\zeta) + (b+\frac{1}{2})(z-\zeta)]}, \\ &= \sum e^{-2a^2\rho - 2ia(z+\zeta)} \cdot \sum e^{-2b^2\rho - 2ib(z-\zeta)} \\ &+ \sum e^{-2(a+\frac{1}{2})^2\rho - 2i(a+\frac{1}{2})(z+\zeta)} \cdot \sum e^{-2(b+\frac{1}{2})^2\rho - 2i(b+\frac{1}{2})(z-\zeta)}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$1. \quad \vartheta_3(z) \cdot \vartheta_3(\zeta) = \vartheta_3(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_3(z - \zeta, 2\rho) + \vartheta_2(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_2(z - \zeta, 2\rho).$$

Ersetzt man hier z durch $\frac{1}{2}\pi - z$, ζ durch $\frac{1}{2}\pi - \zeta$, und beachtet No. 2,

2. und 3., so erhält man

$$2. \quad \vartheta(z) \cdot \vartheta(\zeta) = \vartheta_3(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_3(z - \zeta, 2\rho) - \vartheta_2(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_2(z - \zeta, 2\rho).$$

Aus No. 2, 4 ergibt sich leicht

$$\vartheta_3(z - \frac{1}{2}i\rho) = e^{\frac{1}{2}\rho + iz} \cdot \vartheta_2(z).$$

Ersetzt man hier ρ durch 2ρ , so entsteht

$$\vartheta_3(z - i\rho, 2\rho) = e^{\frac{1}{2}\rho + iz} \cdot \vartheta_2(z, 2\rho).$$

Ebenso erhält man

$$\vartheta_2(z - i\rho, 2\rho) = e^{\frac{1}{2}i\rho + iz} \cdot \vartheta_3(z, 2\rho).$$

Wenn man nun in 1. z durch $z - \frac{1}{2}i\rho$, ζ durch $\zeta - \frac{1}{2}i\rho$ ersetzt, und No. 2, 6 beachtet, so folgt

$$3. \quad \vartheta_2(z) \cdot \vartheta_2(\zeta) = \vartheta_2(z + \zeta, 2\rho) \vartheta_3(z - \zeta, 2\rho) + \vartheta_3(z + \zeta, 2\rho) \vartheta_2(z - \zeta, 2\rho).$$

Werden hier z und ζ durch $\frac{1}{2}\pi - z$ und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ ersetzt, so ergibt sich noch

$$4. \quad \vartheta_1(z) \cdot \vartheta_1(\zeta) = -\vartheta_2(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_3(z - \zeta, 2\rho) + \vartheta_3(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_2(z - \zeta, 2\rho).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht die folgenden

$$\begin{aligned}5. \quad \vartheta(z)^2 &= \vartheta_3(0, 2\rho) \cdot \vartheta_3(2z, 2\rho) - \vartheta_2(0, 2\rho) \cdot \vartheta_2(2z, 2\rho), \\ \vartheta_1(z)^2 &= \vartheta_2(0, 2\rho) \cdot \vartheta_3(2z, 2\rho) - \vartheta_3(0, 2\rho) \cdot \vartheta_2(2z, 2\rho), \\ \vartheta_2(z)^2 &= \vartheta_3(0, 2\rho) \cdot \vartheta_2(2z, 2\rho) + \vartheta_2(0, 2\rho) \cdot \vartheta_3(2z, 2\rho), \\ \vartheta_3(z)^2 &= \vartheta_3(0, 2\rho) \cdot \vartheta_3(2z, 2\rho) + \vartheta_2(0, 2\rho) \cdot \vartheta_2(2z, 2\rho).\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}6. \quad \vartheta(z)^2 + \vartheta_3(z)^2 &= 2\vartheta_3(0, 2\rho) \vartheta_3(2z, 2\rho), \\ \vartheta(z)^2 - \vartheta_3(z)^2 &= -2\vartheta_2(0, 2\rho) \vartheta_2(2z, 2\rho), \\ \vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2 &= 2\vartheta_2(0, 2\rho) \vartheta_3(2z, 2\rho), \\ \vartheta_1(z)^2 - \vartheta_2(z)^2 &= -2\vartheta_3(0, 2\rho) \vartheta_2(2z, 2\rho).\end{aligned}$$

Wenn man aus den beiden letzten Gleichungen $\vartheta_3(2z, 2\rho)$ und $\vartheta_2(2z, 2\rho)$ entnimmt, und in die erste und letzte Gleichung 5. einsetzt, so erhält man

$$7. \quad \frac{2\vartheta_2(0, 2\rho) \cdot \vartheta_3(0, 2\rho)}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2 + \vartheta_2(0, 2\rho)^2} \cdot \vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + \frac{\vartheta_3(0, 2\rho)^2 - \vartheta_2(0, 2\rho)^2}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2 + \vartheta_2(0, 2\rho)^2} \cdot \vartheta_2(z)^2,$$

$$8. \quad \frac{2 \cdot \vartheta_2(0, 2\rho) \vartheta_3(0, 2\rho)}{\vartheta_2(0, 2\rho)^2 + \vartheta_3(0, 2\rho)^2} \cdot \vartheta_3(z)^2 = \frac{\vartheta_3(0, 2\rho)^2 - \vartheta_2(0, 2\rho)^2}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2 + \vartheta_2(0, 2\rho)^2} \cdot \vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2.$$

Setzen wir $e^{-\rho} = \sqrt{q}$, so ist

$$\vartheta_2(0, 2\rho) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \dots,$$

$$\vartheta_3(0, 2\rho) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots,$$

beide Grössen sind daher positiv. Aus der Ungleichung $(a-b)^2 > 0$ folgt $a^2 + b^2 > 2ab$, setzt man also

$$\frac{2\vartheta_2(0, 2\rho) \vartheta_3(0, 2\rho)}{\vartheta_2(0, 2\rho)^2 + \vartheta_3(0, 2\rho)^2} = k,$$

so ist k ein positiver echter Bruch; man erhält leicht

$$\frac{\vartheta_3(0, 2\rho)^2 - \vartheta_2(0, 2\rho)^2}{\vartheta_3(0, 2\rho)^2 + \vartheta_2(0, 2\rho)^2} = \sqrt{1 - k^2} = k',$$

wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist. Durch Einführung dieser Zeichen wird aus 7. und 8.

$$\begin{aligned} 9. \quad & k \cdot \vartheta(z)^2 = \vartheta_1(z)^2 + k' \vartheta_2(z)^2, \\ 10. \quad & k \cdot \vartheta_3(z)^2 = k' \vartheta_1(z)^2 + \vartheta_2(z)^2. \end{aligned}$$

Wir setzen hierin $z = 0$ und beachten, dass $\vartheta_1(0) = 0$; dadurch erhalten wir für k und k' die einfacheren Ausdrücke

$$11. \quad k = \left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \right]^2, \quad k' = \left[\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} \right]^2.$$

4. In No. 3, 4 ersetzen wir z durch $z + \frac{1}{2}t$, ζ durch $\frac{1}{2}t$, ρ durch $\frac{1}{2}\rho$; dadurch entsteht

$$\vartheta_3(z + t) \cdot \vartheta_2(z) - \vartheta_2(z + t) \cdot \vartheta_3(z) = \vartheta_1(z + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho) \cdot \vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho).$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{t} \left[\frac{\vartheta_2(z + t)}{\vartheta_3(z + t)} - \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)} \right] = - \frac{\vartheta_1(z + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{\vartheta_3(z + t) \vartheta_3(z)} \cdot \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{t}.$$

Aus dieser Gleichung gelangen wir zur Kenntniss des Differentialquotienten von $\vartheta_2(z) : \vartheta_3(z)$, indem wir zur Grenze für ein verschwindendes t übergehen. Setzen wir

$$\lim_{t=0} \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}\rho)}{t} = \alpha,$$

so ergibt sich

$$1. \quad \frac{d \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = - \alpha \cdot \frac{\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho)}{\vartheta_3(z)^2}.$$

Um rechts die Function $\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho)$ zu beseitigen, beachten wir, dass aus No. 2, 3 folgt, wenn wir z durch $\frac{1}{2}\pi - z$, ζ durch 0 und ρ durch $\frac{1}{2}\rho$ ersetzen,

$$\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho) \vartheta_2(0, \frac{1}{2}\rho) = 2 \vartheta_1(z) \vartheta(z).$$

Setzen wir

$$2. \quad \frac{2\alpha}{\vartheta_2(0, \frac{1}{2}\rho)} = \beta,$$

so erhalten wir

$$3. \quad \frac{d \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}}{dz} = - \beta \cdot \frac{\vartheta_1(z) \vartheta(z)}{\vartheta_3(z)^2}.$$

Wir substituieren hier $\frac{1}{2}\pi - z$ für z und erhalten so

$$4. \quad \frac{d \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}}{dz} = \beta \cdot \frac{\vartheta_2(z) \vartheta_3(z)}{\vartheta(z)^2}.$$

5. Die soeben gewonnenen Differentialformeln setzen uns in den Stand, die Quotienten zweier Thetafunctionen mit bestimmten Integralen in Beziehung zu bringen. Wir definiren drei neue Functionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ durch die Gleichungen

$$f(z) = \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}, \quad g(z) = \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}, \quad h(z) = \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}.$$

Zufolge No. 3, 10 bestehen zwischen diesen Functionen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(z)^2 + k' \cdot g(z)^2 = k, \\ 2. \quad & k' f(z)^2 + g(z)^2 = k \cdot h(z)^2. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$3. \quad k = \frac{g(0)^2}{h(0)^2}, \quad k' = \frac{1}{f(0)^2}.$$

Die Gleichungen 1. und 2. ergeben

$$4. \quad g(z)^2 = \frac{k}{k'} \left[1 - \frac{1}{k} \cdot f(z)^2 \right],$$

$$5. \quad h(z)^2 = \frac{1}{k'} [1 - k \cdot f(z)^2].$$

Die Gleichung No. 4, 4 ergibt nun

$$6. \quad \frac{df(z)}{dz} = \beta \cdot \frac{\sqrt{k}}{k'} \cdot \sqrt{\left[1 - \frac{1}{k}f(z)^2\right] [1 - kf(z)^2]},$$

also ist

$$z = \frac{k'}{\beta \sqrt{k}} \cdot \int \frac{df(z)}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{k}f(z)^2\right] [1 - kf(z)^2]}}.$$

Wir ersetzen hier, um mit früheren Bezeichnungen in bessere Uebereinstimmung zu kommen, $\frac{1}{\sqrt{k}}f(z)$ durch ζ und z durch w ; alsdann ist

$$w = \frac{k'}{\beta} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} + \text{Const.}$$

Da $\vartheta_1(z)$ verschwindet, wenn $z = 0$ ist, also $\zeta = 0$ und $w = 0$ zusammen gehören, so folgt

$$7. \quad \frac{\beta}{k'} w = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}.$$

Die Constante $\beta : k'$ lässt sich durch das geradlinige Integral

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} = K$$

ausdrücken; denn dem Werthe $\zeta = 1$ entspricht $f(z) = \sqrt{k}$, also bestimmt sich das zugehörige z aus

$$8. \quad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Dieser Gleichung wird durch $z = \frac{1}{2}\pi$ genügt, wie man sofort erkennt, wenn man in No. 2, 2 z durch Null ersetzt.

Der Differentialquotient $d\zeta : dz$ ist für ein hinlänglich kleines z positiv; dasselbe gilt für $\vartheta_2(z)\vartheta_3(z) : \vartheta(z)^2$ für $z < \frac{1}{2}\pi$; folglich ist $\beta > 0$ (No. 4, 4). Damit $\zeta = f(z)$ von 0 bis 1 wächst, hat man daher für z von $z = 0$ an zunehmende Werthe zu setzen, bis man an einen Werth von z kommt, der $\zeta = 1$ entspricht. Man hat daher von den unendlich vielen Wurzeln der Gleichung 8. (vergl. No. 2, 7) die Wurzel $z = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Folglich ist

$$9. \quad \frac{\beta}{k'} \cdot \frac{\pi}{2} = K.$$

Wird 7. durch 9. dividirt, so entsteht schliesslich

$$10. \quad \frac{2K}{\pi} w = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}.$$

Dem Werthe $\zeta = 1 : k$ entspricht

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen No. 2, 4 folgt für $z = 0$

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)} = \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\rho)},$$

und aus No. 2, 2 für $z = \frac{1}{2}i\rho$ folgt weiter

$$\frac{\vartheta_2(\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta_3(\frac{1}{2}i\rho)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}.$$

Daher ist z aus der Gleichung zu bestimmen

$$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho)}.$$

Dieser Gleichung genügen die Werthe

$$z = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho + 2n\pi + m \cdot i\rho;$$

folglich ist

$$11. \quad \frac{2K}{\pi} (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}i\rho + 2n\pi + m \cdot i\rho) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Nimmt man rechts das geradlinige Integral, so hat man bekanntlich

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = K + iK'.$$

Man hat daher $n = 0$, und, wenn ρ positiv vorausgesetzt wird, $m = 1$ zu nehmen. Hieraus folgt

$$\frac{2K}{\pi} (\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i\rho) = K + iK',$$

also ist

$$\rho = \pi \cdot \frac{K'}{K}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen No. 2, 7 folgt, dass

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} f(w) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)}$$

sich nicht ändert, wenn w um $2m\pi + m_1 \cdot i\rho$ zunimmt, wobei m und m_1 beliebige ganze Zahlen sind; in Rücksicht auf den soeben gefundenen Werth von ρ wächst dabei

$$\frac{2K}{\pi} \cdot w \quad \text{um} \quad m \cdot 4K + m_1 \cdot 2iK'.$$

In gleicher Weise vieldeutig ist bei gegebenem ζ bekanntlich die rechte Seite der Gleichung 10.; diese Gleichung ist daher umfassend gültig, sie enthält links und rechts Grössen, die dieselben beiden Periodicitätsmoduln haben. Aus 10. folgt nun

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot f(w) = \sin am \frac{2K}{\pi} w,$$

also ist

$$\sin am \frac{2K}{\pi} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta(w)}.$$

Ersetzt man hier w durch $\pi w : 2K$, so ergibt sich

$$12. \quad \sin am w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}.$$

Aus den Gleichungen 4. und 5. folgt

$$1 - \sin^2 am \frac{2Kw}{\pi} = \frac{k'}{k} g(w)^2,$$

$$1 - k^2 \sin^2 am \frac{2Kw}{\pi} = k' h(w)^2,$$

also, wenn man auch hier w durch $\pi w : 2K$ ersetzt

$$13. \quad \cos am w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)},$$

$$14. \quad \Delta am w = \sqrt{k'} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)}.$$

Setzt man die Reihen selbst ein und bezeichnet wieder

$$e^{-p} = e^{-\frac{K'}{K}\pi} \text{ mit } q,$$

so erhält man

$$15. \quad \sin am w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2\sqrt{q} \sin \frac{\pi w}{2K} - 2\sqrt{q^9} \sin \frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt{q^{25}} \sin \frac{5\pi w}{2K} - \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi w}{K} + \dots},$$

$$16. \quad \cos am w = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2\sqrt{q} \cos \frac{\pi w}{2K} + 2\sqrt{q^9} \cos \frac{3\pi w}{2K} + 2\sqrt{q^{25}} \cos \frac{5\pi w}{2K} + \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi w}{K} + \dots},$$

$$17. \quad \Delta am w = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1 + 2q \cos \frac{\pi w}{2K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi w}{K} + 2q^9 \cos \frac{6\pi w}{K} + \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 \cos \frac{6\pi w}{K} + \dots}.$$

6. Nach der Betrachtung von algebraischen Integralen, welche eine Irrationalität zweiten Grades enthalten und einfach periodische Functionen zu Umkehrungen haben, wendeten wir uns zu algebraischen Integralen mit Irrationalitäten dritten oder vierten Grades, erkannten zwei verschiedene Periodicitätsmoduli und wurden durch die Umkehrung zunächst der einfachsten Integrale dieser Art auf die doppelt periodischen Functionen geführt.

Man kann auch den umgekehrten Weg einschlagen. Von der Existenz einfach periodischer Functionen ausgehend, kann man fragen, ob es auch doppelt periodische Functionen giebt. Man wird versuchen, solche Functionen durch Reihen darzustellen, deren Glieder selbst einfach periodisch sind.

Hierdurch wird man auf die Betrachtungen geführt, die wir in No. 1 angestellt haben, gelangt so zur Aufstellung der Thetafunctionen, bildet die doppelt periodischen Functionen $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ und findet dann, dass diese Thetaquotienten Umkehrungen bestimmter Integrale sind. Auf diesem Wege gelangt man sehr rasch und ohne schwierige Betrachtungen zur Kenntniss einer Fülle von Beziehungen über die doppelt periodischen Functionen; die Hauptschwierigkeit, die in der Untersuchung der Integrale complexer irrationaler Functionen liegt, erscheint erst am Schlusse. Dieser Gedankengang war vorzuziehen, so lange die Theorie der Integrale complexer Functionen noch nicht den gegenwärtigen Grad von Evidenz erreicht hatte.

7. Wir wollen nun zeigen, wie das Additionstheorem elliptischer Functionen mit Hülfe der Thetafunctionen gefunden wird^{*)}.

Aus den Gleichungen No. 3, 1. bis 4. erhalten wir, indem wir z , ζ und ρ durch $\frac{1}{2}(z + \zeta)$, $\frac{1}{2}(z - \zeta)$ und $\frac{1}{2}\rho$ ersetzen,

^{*)} SCHELLBACH, Die Lehre von den ell. Integralen und Thetafunctionen, § 24, u. f.

1. $\vartheta\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta_3(z) \vartheta_3(\zeta) - \vartheta_2(z) \vartheta_2(\zeta),$
2. $\vartheta_1\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_1\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta_3(z) \vartheta_2(\zeta) - \vartheta_2(z) \vartheta_3(\zeta),$
3. $\vartheta_2\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_2\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta_3(z) \vartheta_2(\zeta) + \vartheta_2(z) \vartheta_3(\zeta),$
4. $\vartheta_3\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_3\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta_3(z) \vartheta_3(\zeta) + \vartheta_2(z) \vartheta_2(\zeta).$

Die Substitution $\frac{1}{2}\pi - z$ und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ für z und ζ liefert hieraus

5. $\vartheta_3\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta(z) \vartheta(\zeta) - \vartheta_1(z) \vartheta_1(\zeta),$
6. $\vartheta_2\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_1\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta_1(z) \vartheta(\zeta) - \vartheta(z) \vartheta_1(\zeta),$
7. $\vartheta_1\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_2\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta_1(z) \vartheta(\zeta) + \vartheta(z) \vartheta_1(\zeta),$
8. $\vartheta\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_3\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] = \vartheta(z) \vartheta(\zeta) + \vartheta_1(z) \vartheta_1(\zeta).$

Ferner erhält man leicht durch Addition und Subtraction aus den Gleichungen 5. und 8., 4. und 1., indem man nachher z , ζ und ρ durch $z + \zeta$, $z - \zeta$ und 2ρ ersetzt

9. $2\vartheta(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta(z - \zeta, 2\rho) = \vartheta(z) \vartheta_3(\zeta) + \vartheta_3(z) \vartheta(\zeta),$
10. $2\vartheta_1(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_1(z - \zeta, 2\rho) = \vartheta(z) \vartheta_3(\zeta) - \vartheta_3(z) \vartheta(\zeta),$
11. $2\vartheta_2(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_2(z - \zeta, 2\rho) = \vartheta_3(z) \vartheta_3(\zeta) - \vartheta(z) \vartheta(\zeta),$
12. $2\vartheta_3(z + \zeta, 2\rho) \cdot \vartheta_3(z - \zeta, 2\rho) = \vartheta_3(z) \vartheta_3(\zeta) + \vartheta(z) \vartheta(\zeta).$

Durch Specialisirung leiten wir hieraus einige brauchbare Formeln ab. Setzen wir in 9. $\zeta = 0$, so entsteht

$$13. \quad \vartheta(z) \vartheta_3(z) = \vartheta(0, 2\rho) \vartheta(2z, 2\rho),$$

Aus 6. erhalten wir, wenn $\zeta = 0$, $2z$ für z , 2ρ für ρ gesetzt wird,

$$14. \quad \vartheta_1(z) \vartheta_2(z) = \vartheta(0, 2\rho) \vartheta_1(2z, 2\rho).$$

Setzen wir in 6. und 3. $\zeta = z$, so folgt

15. $\vartheta(z) \vartheta_1(z) = \frac{1}{2} \vartheta_2(0, \frac{1}{2}\rho) \vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho),$
16. $\vartheta_2(z) \vartheta_3(z) = \frac{1}{2} \vartheta_2(0, \frac{1}{2}\rho) \vartheta_2(z, \frac{1}{2}\rho),$

von denen wir 15. bereits in No. 4. abgeleitet und benutzt haben. Aus den Gleichungen 5. und 8. folgt durch Multiplication

$$\begin{aligned} & \vartheta\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_3\left[\frac{1}{2}(z + \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \cdot \vartheta_3\left[\frac{1}{2}(z - \zeta), \frac{1}{2}\rho\right] \\ & = \vartheta(z)^2 \vartheta(\zeta)^2 - \vartheta_1(z)^2 \vartheta_1(\zeta)^2. \end{aligned}$$

Ersetzt man in 13. z durch $\frac{1}{2}(z + \zeta)$ und dann durch $\frac{1}{2}(z - \zeta)$, sowie ρ durch $\frac{1}{2}\rho$ und führt die Resultate in die soeben gewonnene Gleichung ein, so erhält man

$$17. \quad \vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta(z + \zeta) \cdot \vartheta(z - \zeta)}{\vartheta(z)^2 \vartheta(\zeta)^2} = 1 - f(z)^2 \cdot f(\zeta)^2.$$

In 6. und 7. setzen wir $z + \zeta$ und $z - \zeta$ für z und ζ , und erhalten

18. $\vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho) \vartheta_2(\zeta, \frac{1}{2}\rho) = \vartheta_1(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta) + \vartheta(z + \zeta) \vartheta_1(z - \zeta),$
19. $\vartheta_2(z, \frac{1}{2}\rho) \vartheta_1(\zeta, \frac{1}{2}\rho) = \vartheta_1(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta) - \vartheta(z + \zeta) \vartheta_1(z - \zeta).$

Aus 15. und 16. ziehen wir

$$\frac{1}{4} \vartheta_1(0, \frac{1}{2}\rho)^2 \cdot \vartheta_1(z, \frac{1}{2}\rho) \vartheta_2(\zeta, \frac{1}{2}\rho) = \vartheta(z) \vartheta_1(z) \vartheta_2(\zeta) \vartheta_3(\zeta).$$

Da nun aus 16. folgt, wenn man z durch 0 ersetzt

$$\frac{1}{4} \vartheta_2(0, \frac{1}{2}\rho)^2 = \vartheta_2(0) \vartheta_3(0),$$

so geht 18. über in

$$20. \quad 2\vartheta(z) \vartheta_1(z) \vartheta_2(\zeta) \vartheta_3(\zeta) = \vartheta_2(0) \vartheta_3(0) [\vartheta_1(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta) + \vartheta(z + \zeta) \vartheta_1(z - \zeta)].$$

In gleicher Weise ergibt sich aus 19.

$$21. \quad 2\vartheta_2(z) \vartheta_3(z) \vartheta(\zeta) \vartheta_1(\zeta) = \vartheta_2(0) \vartheta_3(0) [\vartheta_1(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta) - \vartheta(z + \zeta) \vartheta_1(z - \zeta)].$$

Wir erhalten aus 20. zunächst

$$\begin{aligned} & \vartheta(0)^2 g(0) h(0) \vartheta(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta) [f(z + \zeta) + f(z - \zeta)] \\ & = 2\vartheta(z)^2 \cdot \vartheta(\zeta)^2 \cdot f(z) g(\zeta) h(\zeta). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von 17. durch $2T$, so folgt

$$22. \quad g(0) h(0) \cdot T \cdot [f(z + \zeta) + f(z - \zeta)] = f(z) g(\zeta) h(\zeta).$$

Ebenso ergibt sich aus 21.

$$23. \quad g(0) h(0) T[f(z + \zeta) - f(z - \zeta)] = f(\zeta) g(z) h(z).$$

Hieraus folgt schliesslich durch Addition und Subtraction, und indem wir für T wieder seinen Werth substituieren

$$24. \quad f(z \pm \zeta) = \frac{1}{g(0) h(0)} \cdot \frac{f(z) g(\zeta) h(\zeta) \pm f(\zeta) g(z) h(z)}{1 - f(z)^2 g(z)^2}.$$

Beachten wir, dass

$$g(0) = \sqrt{\frac{k}{k'}}, \quad h(0) = \frac{1}{\sqrt{k'}},$$

und substituieren

$$f(z) = \sqrt{k} \cdot \sin am \frac{2Kz}{\pi}, \quad g(z) = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \cos am \frac{2Kz}{\pi},$$

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{k'}} \Delta am \frac{2Kz}{\pi},$$

so erkennen wir, dass 24. das Additionstheorem für den Amplitudensinus enthält.

8. Die Additionstheoreme für $\cos am w$ und $\Delta am w$ ergeben sich in ähnlicher Weise.

Ersetzen wir in No. 7., 9. und 10. z und ζ durch $z + \zeta$ und $z - \zeta$, so ergibt sich

$$2\vartheta(2z, 2\rho) \cdot \vartheta(2\zeta, 2\rho) = \vartheta(z + \zeta) \vartheta_3(z - \zeta) + \vartheta_3(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta),$$

$$2\vartheta_1(2z, 2\rho) \cdot \vartheta_1(2\zeta, 2\rho) = \vartheta(z + \zeta) \vartheta_3(z - \zeta) - \vartheta_3(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta).$$

Aus No. 7. 13. folgt

$$\vartheta(0, 2\rho)^2 \cdot \vartheta(2z, 2\rho) \vartheta(2\zeta, 2\rho) = \vartheta(z) \vartheta_3(z) \vartheta(\zeta) \vartheta_3(\zeta).$$

Ferner folgt für $z = 0$

$$\vartheta(0, 2\rho)^2 = \vartheta(0) \vartheta_3(0).$$

Dies ergibt

$$1. \quad 2\vartheta(z) \vartheta_3(z) \vartheta(\zeta) \vartheta_3(\zeta) = \vartheta(0) \vartheta_3(0) [\vartheta(z + \zeta) \vartheta_3(z - \zeta) + \vartheta_3(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta)].$$

Aus 14. ergibt sich

$$\vartheta(0, 2\rho)^2 \vartheta_1(2z, 2\rho) \vartheta_1(2\zeta, 2\rho) = \vartheta_1(z) \vartheta_2(z) \vartheta_1(\zeta) \vartheta_2(\zeta),$$

und hieraus folgt weiter

$$2. \quad 2\vartheta_1(z) \vartheta_2(z) \vartheta_1(\zeta) \vartheta_2(\zeta) = \vartheta(0) \vartheta_3(0) [\vartheta(z + \zeta) \vartheta_3(z - \zeta) - \vartheta_3(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta)].$$

Aus 1. und 2. erhalten wir

$$\begin{aligned} & 2\vartheta(z)^2 \vartheta(\zeta)^2 \cdot h(z) h(\zeta) \\ &= \vartheta^2(0) h(0) \cdot \vartheta(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta) [h(z - \zeta) + h(z + \zeta)] \\ & \quad 2\vartheta(z)^2 \vartheta(\zeta)^2 f(z) g(z) f(\zeta) h(\zeta) \\ &= \vartheta(0)^2 h(0) \cdot \vartheta(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta) [h(z - \zeta) - h(z + \zeta)]. \end{aligned}$$

In Rücksicht auf No. 7, 17. folgt hieraus

$$h(0) T[h(z - \zeta) + h(z + \zeta)] = h(z) h(\zeta),$$

$$h(0) T[h(z - \zeta) - h(z + \zeta)] = f(z) g(z) f(\zeta) g(\zeta).$$

Hieraus ergibt sich schliesslich

$$h(0) h(z \pm \zeta) = \frac{h(z) h(\zeta) \mp f(z) g(z) f(\zeta) h(\zeta)}{1 - f(z)^2 f(\zeta)^2},$$

dies ist das Additionstheorem für die Function $\Delta am w$.

Aus No. 7, 9. und 11. folgt durch Multiplication

$$\begin{aligned} & 4\vartheta(z + \zeta, 2\rho) \vartheta_2(z + \zeta, 2\rho) \vartheta(z - \zeta, 2\rho) \vartheta_2(z - \zeta, 2\rho) = \\ & \vartheta(z) \vartheta_3(z) [\vartheta_3(\zeta)^2 - \vartheta(\zeta)^2] + \vartheta(\zeta) \vartheta_3(\zeta) [\vartheta_3(z)^2 - \vartheta(z)^2]. \end{aligned}$$

Setzen wir in No. 7, 11. $z = \zeta$, so entsteht

$$2\vartheta_2(2z, 2\rho) \vartheta_2(0, 2\rho) = \vartheta_3(z)^2 - \vartheta(z)^2.$$

Benutzen wir dies und No. 7, 13., so erhalten wir, wenn wir schliesslich 2ρ , $2z$, 2ζ mit ρ , $z + \zeta$, $z - \zeta$ vertauschen,

$$2\vartheta(z) \vartheta_2(z) \vartheta(\zeta) \vartheta_2(\zeta) = \vartheta(0) \vartheta_2(0) [\vartheta(z + \zeta) \vartheta_2(z - \zeta) + \vartheta_2(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta)].$$

Auf gleiche Weise gelangen wir von No. 7, 10. und 12. zu

$$2\vartheta_1(z) \vartheta_3(z) \vartheta_1(\zeta) \vartheta_3(\zeta) = \vartheta(0) \vartheta_2(0) [\vartheta(z + \zeta) \vartheta_2(z - \zeta) - \vartheta_2(z + \zeta) \vartheta(z - \zeta)].$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir in Rücksicht auf No. 7, 17

$$g(0) T[g(z - \zeta) + g(z + \zeta)] = g(z) g(\zeta),$$

$$g(0) T[g(z - \zeta) - g(z + \zeta)] = f(z) h(z) f(\zeta) h(\zeta).$$

Hieraus folgt schliesslich das Additionstheorem für die Function $\cos am w$ in der Form

$$g(0) g(z \pm \zeta) = \frac{g(z) g(\zeta) \mp f(z) h(z) f(\zeta) h(\zeta)}{1 - f(z)^2 f(\zeta)^2}.$$

§ 20. Entwicklung der elliptischen Functionen in unendliche Produkte.

1. Eine Function $\varphi(z)$ sei eindeutig und stetig für alle Punkte im Innern einer Curve c mit Ausschluss der Punkte a_1, a_2, \dots, a_k , in welcher φ unendlich sei.

Wir schliessen die Punkte a_1, \dots, a_k durch verschwindend kleine Kreise aus; alsdann bilden c und diese Kreise zusammen die vollständige Begrenzung einer Fläche, innerhalb deren φ eindeutig und endlich ist. Daher ist für jeden Punkt z im Innern dieser Fläche

$$1 \quad 2\pi i \cdot \varphi(z) = \int_{(c)} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt - \int_{(a_1)} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt - \dots - \int_{(a_k)} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt,$$

wobei durch

$$\int_{(c)}, \int_{(a_1)}, \dots, \int_{(a_k)}$$

Integrale über c , bez über die Kreise um a_1, a_2, \dots, a_k angedeutet sind, alle in positivem Sinne rücksichtlich der von ihnen umschlossenen Flächen.

Es sei $f(z)$ eine Function, die für alle Punkte innerhalb einer Curve c eindeutig und endlich und von Null verschieden ist, mit Ausnahme der Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k,$$

in denen sie Null, und der Punkte

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_l,$$

in denen sie unendlich gross sei. Alsdann wird $f'(z):f(z) = df(z):dz$ unendlich gross in den Punkten α und β ; ersetzt man daher in 1. $\varphi(z)$ durch $f'(z):f(z)$, so hat man

$$2. \quad 2\pi i \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t - z} - \sum_1^k \int_{(a_m)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t - z} - \sum_1^l \int_{(\beta_n)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t - z}.$$

Bekanntlich ist (§ 13, 13)

$$\begin{aligned} \int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t - z} &= -\frac{1}{z - \alpha} \int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} dt - \frac{1}{(z - \alpha)^2} \int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot (t - \alpha) dt \\ &\quad - \frac{1}{(z - \alpha)^3} \int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t - \alpha)^2 dt - \dots \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, dass $(z - \alpha_k):f(z)$ für $z = \alpha_k$ endlich und von Null verschieden sei; da

$$\frac{f(z)}{z - \alpha} = \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha},$$

so ist

$$\lim_{(z=\alpha)} \frac{f(z)}{z - \alpha} = f'(\alpha).$$

Nun ist

$$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_{(\alpha)} \frac{t - \alpha}{f(t)} \cdot \frac{f'(t)}{t - \alpha} \cdot dt;$$

gehen wir zur Grenze für einen verschwindend kleinen Kreis über, so wird für den Perimeter desselben $(t - \alpha) : f(t)$ constant gleich $1 : f'(\alpha)$; ferner ist bekanntlich

$$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{t - \alpha} dt = 2\pi i f'(\alpha),$$

folglich ist

$$3. \quad \int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = 2\pi i.$$

In dem Integrale

$$\int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t - \alpha)^p dt$$

substituieren wir $t = \alpha + \rho e^{i\varphi}$; hierdurch entsteht

$$\rho^p \int_{(\alpha)} e^{ip\varphi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

Das hier vorkommende Integral enthält die Elemente des Integrals 3. mit einer endlichen Grösse multiplicirt, ist also mit 3. zugleich endlich; lässt man nun ρ verschwinden, so folgt, dass

$$4. \quad \int_{(\alpha)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t - \alpha)^p dt = 0,$$

für jedes positive p .

Ferner ist

$$5. \quad \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} \frac{1}{t - z} dt = - \frac{1}{z - \beta} \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} dt - \frac{1}{(z - \beta)^2} \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t - \beta) dt \\ - \frac{1}{(z - \beta)^3} \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} (t - \beta)^2 dt - \dots$$

Wir machen nun die zweite Voraussetzung, dass $f(z) \cdot (z - \beta_k)$ für $z = \beta_k$ bei jedem Werthe von k eine endliche und von Null verschiedene Grösse sei. Substituieren wir

$$f(z) = \frac{1}{g(z)},$$

so ist also $(z - \beta_k) : g(z)$ für $z = \beta_k$ endlich und von Null verschieden; da nun

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = - \frac{g'(z)}{g(z)},$$

so ist

$$6. \quad \int_{(\beta)} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = - \int_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot dt = - 2\pi i,$$

und

$$(t - \beta)^p dt = - \int_{(\beta)} \frac{g'(t)}{g(t)} (t - \beta)^p dt = 0, \quad p > 0.$$

folgt schliesslich

$$\int_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t - z} + \frac{1}{z - \alpha_1} + \frac{1}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{z - \alpha_k} \\ - \frac{1}{z - \beta_1} - \frac{1}{z - \beta_2} - \dots - \frac{1}{z - \beta_l}.$$

tion folgt hieraus

$$f(z) = \int U dz + lC \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_k)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_l)}, \\ = C \cdot e^{\int U dz} \cdot \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_k)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_l)},$$

ing

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t - z}$$

ie Anzahl der Punkte α und β unendlich gross ist und keine le diese Punkte einschliesst, so kann man die Curve c nach , willkürlich gewählten Gesetze unendlich erweitern; von diesem n im Allgemeinen der Grenzwert abhängen, gegen den das nvergirt; gleichzeitig hängt von diesem Gesetze auch die An- ordnung ab, nach welcher neue Faktorengruppen in den Zähler und Nenner des Produktes 8. eintreten. Wir erkennen so die Möglichkeit, dass je nach der Wahl dieses Gesetzes verschiedene Entwicklungen derselben Function in Form eines unendlichen Produktes erhalten werden können, indem dabei die Art und Weise, nach welcher die Anzahl der Faktoren des Nenners zugleich mit denen des Zählers unendlich wächst, verschieden ist.

Die Constante C kann aus Formel 8. eliminirt werden mit Hülfe des Werthes, den die Function $f(z)$ für irgend einen bestimmten Werth der Variablen $z = z_0$ annimmt. Man erhält

$$9. f(z) = f(z_0) \cdot \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_k)}{(z_0 - \alpha_1)(z_0 - \alpha_2) \dots (z_0 - \alpha_k)} \cdot \frac{(z_0 - \beta_1)(z_0 - \beta_2) \dots (z_0 - \beta_l)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_l)} \cdot e^{\int_{z_0}^z U dz}.$$

2. Wir wenden diese Entwicklung zunächst auf die Function $f(z) = \sin z$ an.

Der Sinus von z wird nur für ein unendlich grosses imaginäres z unendlich, und verschwindet für

$$z = m\pi,$$

wobei m alle realen ganzen Zahlen zu durchlaufen hat.

Wir wählen zur Curve c ein Rechteck, dessen Länge der realen Achse parallel ist, und das symmetrisch zu den Achsen liegt; die beiden zur realen Achse normalen Seiten legen wir durch Punkte, in denen $\sin z$ nicht verschwindet.

Die Seiten des Rechtecks nehmen wir unendlich fern an.

Für das Integral U haben wir

$$2\pi i \cdot U = \int_{(c)} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{dt}{t - z}.$$

Für alle Punkte auf dem Perimeter des Rechtecks ist t unendlich gross; daher kann in dem Integrale

$$t - z = t \left(1 - \frac{z}{t} \right)$$

durch t ersetzt werden. In je zwei Punkten des Perimeters, die auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen, haben t , $\sin t$, dt entgegengesetzt gleiche Werthe, $\cos t$ denselben Werth, mithin

$$\frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{dt}{t}$$

entgegengesetzt gleiche Werthe; folglich zerstören sich je zwei zu Gegenpunkten gehörige Elemente des Integrales U und es ist somit

$$U = 0.$$

Wir erhalten daher, indem wir die zu entgegengesetzten m gehörigen Faktoren vereinigen

$$\frac{\sin z}{\sin z_0} = \frac{z}{z_0} \cdot \frac{(z^2 - \pi^2)(z^2 - 4\pi^2)(z^2 - 9\pi^2) \dots}{(z_0^2 - \pi^2)(z_0^2 - 4\pi^2)(z_0^2 - 9\pi^2) \dots}.$$

Setzen wir $z_0 = 0$ und machen von dem Grenzwerthe Gebrauch

$$\left(\frac{\sin z}{z} \right)_{z=0} = 1,$$

so erhalten wir

$$1. \quad \sin z = z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2} \right) \dots$$

gültig für jedes endliche z . Diese Gleichung können wir durch folgende ersetzen:

$$2. \quad \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu^2} \right),$$

wobei das Zeichen \prod_1^{∞} bedeutet, dass alle Faktoren der Form

$$1 - \frac{z^2}{\mu^2}$$

für $\mu = 1$ bis $\mu = \infty$ zu multipliciren sind.

Wird unter

$$\prod_{-m}^m f(m)$$

das Produkt aller Faktoren $f(m) f(-m)$ für alle Werthe $m = 1$ bis $m = \infty$ verstanden, so ist

$$\prod_{-m}^m \left(1 - \frac{z}{m + \alpha} \right) = \prod_{-m}^m \frac{m + \alpha - z}{m + \alpha} = \prod_{-m}^m \frac{1 + \frac{\alpha - z}{m}}{1 + \frac{\alpha}{m}}.$$

Also folgt

$$3. \quad \prod_{-m}^m \left(1 - \frac{z}{m + \alpha} \right) = \frac{\sin \pi (\alpha - z)}{\sin \alpha \pi}.$$

3. Die Function $\sin \alpha \pi z$ wird Null für

$$z = 2m \cdot K + 2n \cdot K' i,$$

und wird unendlich gross für

$$z = 2mK + (2n + 1) \cdot K' i,$$

daher ist die Function

$$\sin am \frac{2K}{\pi} z \begin{cases} = 0, & \text{wenn } z = m\pi + n\tau, \\ = \infty, & \text{,, } z = m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau, \end{cases}$$

wobei

$$\tau = i \cdot \frac{\pi K'}{K}.$$

Die Voraussetzungen, unter welchen die in No. 1 angewandte Verwandlung gilt, sind hier erfüllt; denn es ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin am \frac{2Kz}{\pi}} = \pm \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - m\pi - n\tau}{\sin am \frac{2K}{\pi} (z - m\pi - n\tau)} = \frac{\pi}{2K'},$$

da bekanntlich

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin am z}{z} = 1.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow iK'} (z - iK') \sin am z &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \sin am (\zeta + iK') \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot \frac{\zeta}{\sin am \zeta} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Da nun

$$z - \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{2K} \left(\frac{2K}{\pi} z - K'i \right),$$

so folgt zunächst, dass

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\tau}{2}} \left(z - \frac{\tau}{2} \right) \sin am \frac{2Kz}{\pi} = \frac{\pi}{2kK'}.$$

Da ferner

$$\sin am \frac{2Kz}{\pi} = \pm \sin \frac{2K}{\pi} [z - m\pi - (n + \frac{1}{2})\tau],$$

so folgt

$$\lim_{z \rightarrow \beta} (z - \beta) \cdot \sin am \frac{2Kz}{\pi} = \pm \frac{\pi}{2kK'},$$

wobei $m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau$ durch β bezeichnet worden ist.

Als Curve c wählen wir ein Rechteck mit unendlich fernen Seiten, das zu den Achsen symmetrisch liegt, und dessen Umfang keinen Punkt enthält, in welchem $\sin am \frac{2K}{\pi} z$ verschwindet oder unendlich gross ist. Alsdann ist

$$\sin am \frac{2K}{\pi} z = C z \cdot \frac{\prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} (z - m\pi - n\tau)}{\prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} (z - m\pi - [n + \frac{1}{2}]\tau)} \cdot E,$$

wobei E die als Faktor auftretende Exponentialgrösse bezeichnet. Hierbei ist noch zu bemerken, dass im Zähler m und n nicht gleichzeitig Null sein dürfen; der hiezugehörige Faktor z ist vorausgeschickt worden. Ferner soll mit

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}$$

das Produkt bezeichnet werden, das entsteht, wenn man jedem Faktor mit dem positiven Werthe n den Faktor zuordnet, in welchem n durch $-n - 1$ ersetzt ist.

Setzen wir, um C zu entfernen, $z = 0$, so erhalten wir

$$1. \quad \sin am \frac{2K}{\pi} z = \frac{2K}{\pi} z \cdot \frac{\prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau} \right)}{\prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau} \right)} \cdot E.$$

Wir haben nun über den Werth des in E vorkommenden Integrals zu entscheiden

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos am \frac{2Kt}{\pi}}{\sin am \frac{2Kt}{\pi}} \cdot \frac{dt}{t - z};$$

dasselbe erledigt sich ebenso, wie das entsprechende Integral bei der Entwicklung von $\sin z$.

Für jedes endliche z kann $1 : (t - z)$ in allen Punkten des unendlich fernen Rechtecks c durch $1 : t$ ersetzt werden. In Gegenpunkten des Rechtecks hat $\cos am \frac{2Kt}{\pi}$ denselben Werth, $\sin am \frac{2Kt}{\pi}$, t und dt haben entgegengesetzt gleiche Werthe; es zerstören sich mithin die zu je zwei Gegenpunkten gehörigen Elemente des Integrals U , und daher ist $U = 0$ und $E = 1$.

Hieraus folgt

$$2. \quad \sin am \frac{2K}{\pi} z = \frac{2K}{\pi} z \cdot \frac{\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right)},$$

wobei m und n alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ anzunehmen haben, mit der Beschränkung, dass im Zähler m und n nicht zugleich Null sein dürfen. Vorläufig ist dabei noch die aus der Herleitung fließende Bedingung zu beachten, dass man, im Zähler und Nenner immer bis zu denselben Werthen von m und n zu gehen hat.

4. Wir werden nun nachweisen, dass die unendlichen Produkte im Zähler und im Nenner einzeln convergent sind; damit wird dann die soeben hervor gehobene Beschränkung gegenstandslos, denn der Grenzwert des Quotienten der unendlichen Produkte ist dann unabhängig davon, wie man im Zähler und Nenner m und n unendlich wachsen lässt, und ist einfach gleich dem Quotienten aus dem Grenzwert des Zählers und dem Grenzwert des Nenners. Wir setzen

$$\frac{2K}{\pi} z \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \theta_1(z),$$

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + (n+\frac{1}{2})\tau}\right) = \theta(z)$$

und untersuchen diese beiden Functionen. Bilden wir in $\theta_1(z)$ das Produkt aller Faktoren, für die n einen gegebenen von Null verschiedenen Werth hat, so erhalten wir nach No. 2, 3

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \frac{\sin(n\tau - z)}{\sin n\tau};$$

die Faktoren, für welche $n = 0$ ist, geben

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) = \frac{\sin z}{z};$$

daher ist

$$\theta_1(z) = \frac{2K}{\pi} \cdot \sin z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\tau - z)}{\sin n\tau}.$$

Nach der gleichmässig für reale und complexe Bogen gültigen Gleichung

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

ist $\sin (n\tau - z) \cdot \sin (-n\tau - z) = \frac{1}{2} (\cos 2n\tau - \cos 2z).$

Benutzt man

$$\cos 2n\tau = \frac{1}{2} (e^{2in\tau} + e^{-2in\tau}),$$

$$\sin n\tau \cdot \sin (-n\tau) = \frac{1}{4} (1 - e^{2in\tau})^2 e^{-2in\tau},$$

und setzt $e^{i\tau} = q$, so erhält man

$$\begin{aligned} 1. \quad \theta_1(z) &= \frac{2K}{\pi} \sin z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}, \\ &= \frac{2K}{\pi} \sin z \cdot \frac{(1 - 2q^2 \cos 2z + q^4)(1 - 2q^4 \cos 2z + q^8)(1 - 2q^6 \cos 2z + q^{12}) \dots}{(1 - q^2)^2 (1 - q^4)^2 (1 - q^6)^2 \dots} \end{aligned}$$

Da $i\tau = -\pi K' : K$, so ist

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

ein realer echter Bruch, folglich der Nenner

$$(1 - q^2)^2 (1 - q^4)^2 (1 - q^6)^2 \dots$$

convergent.

Das unendliche Produkt im Zähler ist von der Form

$$(1 + z_1)(1 + z_2)(1 + z_3) \dots;$$

dasselbe convergirt bekanntlich, wenn die Reihe

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

convergirt, und diese convergirt mit der Reihe

$$\text{mod } z_1 + \text{mod } z_2 + \text{mod } z_3 + \dots$$

Es kommt daher in unserm Falle auf die Reihe der Moduln an

$$\text{mod}(q^{4n} - 2q^{2n} \cos 2z) = q^{2n} \text{mod}(q^{2n} - 2 \cos 2z).$$

Der Quotient zweier benachbarten Glieder der Reihe dieser Moduln ist

$$q^2 \cdot \text{mod} \frac{q^{2n+2} - 2 \cos 2z}{q^{2n} - 2 \cos 2z}.$$

Wächst n unbegrenzt, so nähert sich diese Zahl dem Grenzwerthe q^2 ; da nun $q^2 < 1$, so folgt, dass die Reihe der Moduln und mithin auch das unendliche Produkt im Zähler convergirt.

Hiermit ist bewiesen, dass $\theta_1(z)$ für jedes endliche z convergirt.

In dem unendlichen Produkte $\theta(z)$ nehmen wir ebenfalls alle Faktoren zusammen, die zu einem gegebenen n gehören; das Produkt derselben ist

$$\prod_{-m}^m \left[1 - \frac{z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau} \right] = \frac{\sin [(n + \frac{1}{2})\tau - z]}{\sin (n + \frac{1}{2})\tau}.$$

Daher ist

$$\theta(z) = \prod_{-n-1}^n \frac{\sin [(n + \frac{1}{2})\tau - z]}{\sin (n + \frac{1}{2})\tau}.$$

Das Produkt zweier zusammengehörigen Faktoren ist

$$\frac{\sin [(n + \frac{1}{2})\tau - z] \sin [(-n - \frac{1}{2})\tau - z]}{\sin (n + \frac{1}{2})\tau \sin (-n - \frac{1}{2})\tau}.$$

Dieselben goniometrischen Formeln, die bei der Reduction von $\theta_1(z)$ angewandt worden sind, liefern jetzt

$$\frac{1 - 2q^{2n+1} \cos 2z + q^{4n+2}}{(1 - q^{2n+1})^2}.$$

Folglich ist

$$\theta(z) = \frac{(1 - 2q \cos 2z + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2z + q^6)(1 - 2q^5 \cos 2z + q^{10}) \dots}{(1 - q)^2 (1 - q^3)^2 (1 - q^5)^2 \dots}$$

Die Convergenz des Nenners erhellt ohne Weiteres; die des Zählers hängt von der Convergenz der Modul-Reihe ab, deren allgemeines Glied ist

$$q^{2n+1} \bmod (q^{2n+1} - 2 \cos 2z).$$

Der Quotient zweier benachbarter Glieder

$$q^2 \bmod \frac{q^{2n+3} - 2 \cos 2z}{q^{2n+1} - 2 \cos 2z}$$

hat den Grenzwert q^2 , folglich convergirt $\theta_1(z)$.

Wir haben somit schliesslich die für jedes endliche z gültige Entwicklung

$$\begin{aligned} 2. \quad & \sin am \frac{2K}{\pi} z \\ &= \frac{2K}{\pi} \sin z \cdot \frac{(1 - 2q^2 \cos 2z + q^4)(1 - 2q^4 \cos 2z + q^8)(1 - 2q^6 \cos 2z + q^{12}) \dots}{(1 - 2q \cos 2z + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2z + q^6)(1 - 2q^5 \cos 2z + q^{10}) \dots} \\ & \quad \cdot \frac{(1 - q)^2 (1 - q^3)^2 (1 - q^5)^2 \dots}{(1 - q^2)^2 (1 - q^4)^2 (1 - q^6)^2 \dots} \end{aligned}$$

5. Zwischen den beiden Functionen $\theta(z)$ und $\theta_1(z)$ findet ein einfacher Zusammenhang statt, den wir zunächst aufdecken wollen. Es ist

$$\theta\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = \prod_{-m}^m \prod_{-n-1}^n \left[1 - \frac{z + \frac{1}{2}\tau}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right].$$

Wir wollen die Combination $m = 0, n = 0$ ausschliessen; dem zugehörigen Faktor $2z : \tau$ müssen wir dann voranstellen und haben alsdann

$$1. \quad \theta\left(z + \frac{1}{2}\tau\right) = -\frac{2z}{\tau} \prod_{-m}^m \prod_{-n-1}^n \left[1 - \frac{z + \frac{1}{2}\tau}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau}\right].$$

Da nun

$$1 - \frac{z + \frac{1}{2}\tau}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau} = \frac{m\pi + n\tau - z}{m\pi + (n + \frac{1}{2})\tau} = \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right),$$

so ist

$$2. \quad \theta\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = -\frac{2z}{\tau} \prod_{-m}^m \prod_{-n-1}^n \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \prod_{-m}^m \prod_{-n-1}^n \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right).$$

In dem für ein gegebenes von Null verschiedenes m gebildeten Produkte

$$\prod_{-n-1}^n \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)$$

hat n die Werthe anzunehmen

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{array} ; \dots \right.$$

während für das Produkt

$$\prod_{-n}^n \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)$$

die Werthe für n sind

$$\left\{ 0 ; \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{array} ; \dots \right.$$

Hieraus folgt

$$3. \quad \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right),$$

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi - n\tau}\right).$$

Ist $m = 0$, so ändern sich die Werthsysteme für n nur insofern, als die Werthe 0 in beiden wegfallen; die Gleichungen 3. gelten also auch für diesen Fall. Aus 3. folgt weiter

$$4. \quad \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right),$$

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) = \prod_{m=-\infty}^{\infty} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi + n\tau}\right) \cdot \lim_{n=\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi - n\tau}\right).$$

Nach No. 2, 3 ist

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right) = \frac{\sin(z + n\tau)}{\sin n\tau} = \frac{e^{i(z+n\tau)} - e^{-i(z+n\tau)}}{e^{in\tau} - e^{-in\tau}},$$

$$= \frac{e^{iz} \cdot e^{2in\tau} - e^{-iz}}{e^{2in\tau} - 1}.$$

Da $i\tau$ eine negative Zahl, nämlich $-\pi K' : K$, ist, so folgt

$$\lim_{n=\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi - n\tau}\right) = e^{-iz};$$

ebenso ist

$$\lim_{n=\infty} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\tau}{m\pi - n\tau}\right) = e^{\frac{1}{2}i\tau}.$$

Hieraus ergibt sich schliesslich

$$5. \quad \theta\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\theta_1(z)}{\theta_1(-\frac{1}{2}\tau)} \cdot e^{-i(z + \frac{\tau}{2})}.$$

Ersetzt man hier z durch $(z - \frac{1}{2}\tau)$, so erhält man

$$6. \quad \theta(z) = \frac{e^{-iz}}{\theta_1(-\frac{1}{2}\tau)} \cdot \theta_1\left(z - \frac{1}{2}\tau\right).$$

Die Function $\theta_1(z)$ geht also bis auf einen bestimmten Faktor in $\theta(z)$ über, wenn man z durch $(z - \frac{1}{2}\tau)$ ersetzt.

Ersetzt man z durch $-z$ und beachtet, dass

$$\theta(-z) = \theta(z), \quad \theta_1(-z) = -\theta_1(z),$$

so entsteht aus 5. und 6.

$$7. \quad \theta\left(z - \frac{1}{2}\tau\right) = \frac{e^{i(z - \frac{\tau}{2})}}{\theta_1(\frac{1}{2}\tau)} \cdot \theta_1(z).$$

$$8. \quad \theta(z) = \frac{e^{iz}}{\theta_1(\frac{1}{2}\tau)} \cdot \theta_1\left(z + \frac{1}{2}\tau\right).$$

Ersetzt man in 6. z durch $z + \tau$ und benutzt 8., so entsteht

$$9. \quad \theta(z + \tau) = -e^{-i(z+\tau)} \theta(z).$$

6. Die Function $\theta(z)$ ist periodisch und hat die Periode π , sie ist ferner

endlich für jedes endliche z ; hieraus
Reihe entwickeln lässt, die für jedes z

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{n\pi i z}$$

Ebenso, wie die Entwicklung in
Potenzen der Variablen nur in eine
engstens zusammenhängende Entwicklung
einer Weise existiren. Wenn daher
vorliegen

$$f(z) = \sum A_n e^{n\pi i z}$$

so folgt

$$A_n$$

für jeden Werth von n .

Mit Hülfe dieser Bemerkung und
im Stande, die Coefficienten A_n zu
gemeinsamen Faktor. Ersetzen wir in

$$\theta(z) =$$

die Variable z durch $z + \tau$, so entsteht

$$\theta(z + \tau) =$$

aus No. 5, 9 folgt ferner

$$\theta(z + \tau) = \sum (-$$

Vergleichen wir in diesen beiden F

$$A_n e^{n\pi i 2\tau} = -$$

oder

$$A_n e^{-n^2 \pi i \tau} = -$$

dies ergibt

$$A_n e^{-n^2 \pi i \tau} = ($$

wobei A eine noch zu bestimmende

Wir haben somit den Satz: Jede
Periode π hat, der Functionalgl

$$f(z + \tau) =$$

und für jedes endliche z endlich

$$A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-$$

wo alles bis auf A völlig bestimmt ist
 $\theta(z)$ nur durch einen constanten

7. Setzen wir $-i\tau = \rho$, also
so erhalten wir sofort die Beziehung

$$1. \quad \theta(z) =$$

diese Gleichung lehrt, die fundame
liches Produkt zu verwandeln;
faktor A geleistet, der noch bestim
entsteht

$$\theta(0) =$$

Da nun $\theta(0) = 1$, so folgt

$$2. \quad \theta(z) =$$

Nach No. 5, 5 ist

$$\theta(z + \frac{1}{2}i\rho) =$$

da nun bekanntlich

$$\vartheta(z + \tfrac{1}{2}i\rho) = i \cdot e^{\frac{1}{4}\rho - iz} \vartheta_1(z),$$

so folgt

$$3. \quad \theta_1(z) = ie^{-\frac{1}{4}\rho} \cdot \frac{\theta_1(-\frac{1}{2}i\rho)}{\vartheta(0)} \vartheta_1(z).$$

Setzen wir in dem Quotienten

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} &= \frac{2Kz}{\pi} \cdot \frac{\prod \prod \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right)}{\vartheta_1(z)} \\ &= \frac{2K}{\pi} \cdot \prod \prod \left(1 - \frac{z}{m\pi + n\tau}\right) : \frac{\vartheta_1(z)}{z} \end{aligned}$$

$z = 0$; so erhalten wir

$$4. \quad \lim \frac{\theta_1(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)}.$$

Da nun nach 3. das Verhältniss $\theta_1(z) : \vartheta_1(z)$ constant ist, so folgt schliesslich

$$5. \quad \theta_1(z) = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \cdot \vartheta_1(z).$$

Hierdurch ist die Function $\vartheta_1(z)$ durch das unendliche Produkt $\theta_1(z)$ ausgedrückt.

Wir wollen noch zeigen, wie $\vartheta(0)$ durch ein unendliches Produkt ausgedrückt werden kann. Nach 2. ist

$$\frac{(1 - 2q \cos 2z + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2z + q^6)(1 - 2q^5 \cos 2z + q^{10}) \dots}{(1 - q^2)(1 - q^3)^2(1 - q^5)^2 \dots} = \frac{1}{\vartheta(0)} \vartheta(z).$$

Wir setzen

$$6. \quad \frac{1}{\vartheta(0)} \cdot (1 - q)^2 (1 - q^3)^2 (1 - q^5)^2 \dots = R(q),$$

und haben somit

$$\begin{aligned} &(1 - 2q \cos 2z + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2z + q^6) \dots \\ &= R(q) (1 - 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z - 2q^9 \cos 6z + \dots). \end{aligned}$$

Ersetzen wir hier z durch $\frac{1}{2}\pi$, so entsteht

$$7. \quad R(q) = \frac{1}{\vartheta_3(0)} (1 + q)^2 (1 + q^3)^2 (1 + q^5)^2 \dots$$

Aus 6. und 7. folgt durch Multiplication

$$8. \quad R(q)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\vartheta_3(0)} \cdot (1 - q^2)^2 (1 - q^6)^2 (1 - q^{10})^2 \dots$$

Setzen wir in 6. q^2 statt q , also 2ρ statt ρ , so erhalten wir

$$9. \quad R(q^2) = \frac{1}{\vartheta(0, 2\rho)} (1 - q^2)^2 (1 - q^6)^2 (1 - q^{10})^2 \dots$$

Nun ist nach § 19, No. 7, 13 für $z = 0$

$$\vartheta(0, 2\rho)^2 = \vartheta(0)\vartheta_3(0),$$

mithin

$$10. \quad R(q^2)^2 = \frac{1}{\vartheta(0)\vartheta_3(0)} (1 - q^2)^4 (1 - q^6)^4 (1 - q^{10})^4 \dots$$

Durch Division folgt aus 8. und 10.

$$\begin{aligned} \left[\frac{R(q)}{R(q^2)} \right]^2 &= \frac{1}{(1 - q^2)^2 (1 - q^6)^2 (1 - q^{10})^2 \dots}, \\ \frac{R(q)}{R(q^2)} &= \frac{1}{(1 - q^2) (1 - q^6) (1 - q^{10}) \dots}. \end{aligned}$$

Hierfür schreiben wir

$$11. \quad \frac{R(q)}{R(q^2)} = \frac{(1 - q^4)}{(1 - q^2)(1 - q^2)}$$

Ersetzen wir hier der Reihe alle Resultate und bemerken, dass

und dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{1 \cdot 2^n})(1 - q^{2 \cdot 2^n}) \dots$$

so erhalten wir aus 11.

$$12. \quad R(q) = \frac{1}{(1 - q^2)}$$

Hieraus ergibt sich nach 6

$$13. \quad \theta(0) = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^4) \dots$$

Benutzt man die Identität

$$(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^4) \dots$$

so kann man statt 13. auch schreiben

$$14. \quad \theta(0) = \frac{(1 - q)}{(1 + q)}$$

8. Vergleichen wir die beiden

$$1. \quad \sin \operatorname{am} \frac{2s}{\pi}$$

$$\text{und} \quad \sin \operatorname{am} \frac{2s}{\pi}$$

so folgt die Gleichung

$$2. \quad \frac{1}{\sqrt{q}}$$

die auch aus 1. für $s = 0$ hervorgeht

Aus No. 7, 3 und 5 folgt

$$3. \quad \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta_1}$$

Der besondere Werth θ_1 ($-$

$$\cos(-ip) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-\frac{1}{2}ip) = \frac{1}{2i}$$

folglich ist

$$(1 - 2q^{2n} \cos 2s +$$

Hieraus ergibt sich (No. 4,

$$i \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot \theta_1 \left(-\frac{ip}{2} \right) = \frac{K}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot (1 - q^{2n} \cos 2s + \dots)$$

$$= \frac{K}{\pi \sqrt{q}} \frac{(1 - q^{2n} \cos 2s + \dots)}{(1 - q^{2n} \cos 2s + \dots)}$$

Daher ist nach 3.

$$\frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\vartheta(0)}{\vartheta'(0)} = \frac{K}{\pi \sqrt{q}} \frac{(1-q)^2 (1-q^3)^2 (1-q^5)^2 \dots}{(1-q^2)^2 (1-q^4)^2 (1-q^6)^2 \dots},$$

und nach 2.

$$4. \quad \frac{K \sqrt{k}}{\pi} = \sqrt{q} \cdot \frac{(1-q^2)^2 (1-q^4)^2 (1-q^6)^2 \dots}{(1-q)^2 (1-q^3)^2 (1-q^5)^2 \dots}.$$

Dies führen wir in No. 4, 2 ein und erhalten

$$5. \quad \sin am \frac{2K}{\pi} z = \frac{2 \sqrt{q}}{\sqrt{k}} \cdot \sin z \cdot \frac{(1-2q^2 \cos 2z + q^4)(1-2q^4 \cos 2z + q^8) \dots}{(1-2q \cos 2z + q^2)(1-2q^3 \cos 2z + q^6) \dots}.$$

9. Um auch für die Functionen

$$\cos am \frac{2K}{\pi} z \quad \text{und} \quad \Delta am \frac{2K}{\pi} z$$

unendliche Produkte zu erhalten, ersetzen wir zunächst in No. 7, 5 die Variable z durch $\frac{1}{2}\pi - z$. Hierdurch erhalten wir, wenn wir No. 8, 2 berücksichtigen

$$1. \quad \theta_1\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\vartheta(0) \sqrt{k}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\vartheta(0) \sqrt{k}} \vartheta_2(z);$$

in Verbindung mit No. 7, 2

$$\theta(z) = \frac{1}{\vartheta(0)} \vartheta(z),$$

und

$$\cos am \frac{2K}{\pi} z = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert 1.

$$\begin{aligned} \cos am \frac{2K}{\pi} z &= \sqrt{k'} \cdot \frac{\theta_1(\frac{1}{2}\pi - z)}{\theta(z)} \\ &= \frac{2K \sqrt{k'}}{\pi} \cdot \cos z \cdot \frac{(1+2q^2 \cos 2z + q^4)(1+2q^4 \cos 2z + q^8) \dots (1-q)^2 (1-q^3)^2 (1-q^5)^2 \dots}{(1-2q \cos 2z + q^2)(1-2q^3 \cos 2z + q^6) \dots (1-q^2)^2 (1-q^4)^2 (1-q^6)^2 \dots} \end{aligned}$$

Benutzt man No. 8, 4, so erhält man einfacher

$$2. \quad \cos am \frac{2K}{\pi} z = 2 \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \sqrt{q} \cdot \cos z \cdot \frac{(1+2q^2 \cos 2z + q^4)(1+2q^4 \cos 2z + q^8) \dots}{(1-2q \cos 2z + q^2)(1-2q^3 \cos 2z + q^6) \dots}.$$

Wir ersetzen ferner in No. 7, 2 z durch $\frac{1}{2}\pi - z$ und erhalten

$$\theta\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)} \vartheta\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\vartheta(0)} \cdot \vartheta_3(z).$$

In Verbindung mit No. 7, 2 und

$$\Delta am \frac{2K}{\pi} z = \sqrt{k'} \cdot \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}$$

liefert dies

$$\begin{aligned} 3. \quad \Delta am \frac{2K}{\pi} z &= \sqrt{k'} \cdot \frac{\theta(\frac{1}{2}\pi - z)}{\theta(z)} \\ &= \sqrt{k'} \cdot \frac{(1+2q \cos 2z + q^2)(1+2q^3 \cos 2z + q^6)(1+2q^5 \cos 2z + q^{10}) \dots}{(1-2q \cos 2z + q^2)(1-2q^3 \cos 2z + q^6)(1-2q^5 \cos 2z + q^{10}) \dots} \end{aligned}$$

Die Gleichungen 2. und 3. ergeben für $z = 0$

$$4. \quad \sqrt{\frac{k}{k'}} = 2 \sqrt{q} \cdot \frac{(1+q^2)^2 (1+q^4)^2 (1+q^6)^2 \dots}{(1-q)^2 (1-q^3)^2 (1-q^5)^2 \dots},$$

$$5. \quad \sqrt{k'} = \frac{(1-q)^2 (1-q^3)^2 (1-q^5)^2 \dots}{(1+q)^2 (1+q^3)^2 (1+q^5)^2 \dots}.$$

Aus 4. und 5. folgt

$$6. \quad \sqrt{k} = 2 \sqrt{q} \cdot \frac{(1+q^2)^2 (1+q^4)^2 (1+q^6)^2 \dots}{(1+q)^2 (1+q^3)^2 (1+q^5)^2 \dots},$$

$$7. \quad \frac{2K \sqrt{k'}}{\pi} = \frac{(1-q^2)^2 (1-q^4)^2 (1-q^6)^2 \dots}{(1+q^2)^2 (1+q^4)^2 (1+q^6)^2 \dots},$$

$$8. \quad \frac{2K}{\pi} = \frac{(1+q)^2}{(1-q)^2}$$

Aus 7. und 5. folgt durch

$$\frac{2Kk'}{\pi} = \frac{(1-q)}{(1+q)}$$

Vergleicht man dies mit 1

9.

Die Nullwerthe von ϑ_2 und ϑ_3 können durch die Constanten des elliptischen Integrals ausgedrückt werden, indem man 9. mit den beiden Gleichungen verbindet

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Aus der letzteren folgt zunächst

$$10. \quad \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

und hieraus weiter

$$11. \quad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}.$$

10. Die Thetafunctionen geben brauchbare Mittel zur numerischen Berechnung elliptischer Functionen.

Zu einem gegebenen Modul k hat man zunächst die Zahl q zu berechnen. Dazu geht man am zweckmässigsten von der Formel aus

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} \dots}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \dots}.$$

Bezeichnet man die bekannte linke Seite mit λ und führt die Division rechts aus, so entsteht

$$1. \quad \lambda = q - 2q^5 + 5q^9 - 10q^{13} + 18q^{17} - 32q^{21} + \dots$$

Setzen wir $q = a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots$ in diese Gleichung ein, so bestimmen sich a_1, a_2, a_3, \dots durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von λ . Zunächst erkennen wir leicht, dass mehrere der a verschwinden. Da q^5 mit λ^5 beginnt, so folgt

$$a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

also ist q von der Form

$$q = a_1\lambda + a_5\lambda^5 + a_6\lambda^6 + \dots$$

Dann enthält aber q^5 nur die Potenzen $\lambda^5, \lambda^9, \dots$, und q^9 beginnt mit λ^9 , folglich ist

$$a_6 = a_7 = a_8 = 0.$$

Nun enthält q die Potenzen $\lambda, \lambda^5, \lambda^9, \dots$,

$$q^5 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \lambda^5, \lambda^9, \lambda^{13} \dots,$$

$$q^9 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \lambda^9, \lambda^{13} \dots,$$

folglich ist

$$a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass in q^5, q^9 und q^{13} hinter λ^{13} sofort λ^{17} folgt, als

$$a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0.$$

*) Weitere verwandte Formeln s. JACOBI, Fundamenta nova, pag. 84 u. f.

Dies bedingt wieder, dass in q^5, q^9, q^{13}, q^{17} nach λ^{17} sofort λ^{21} kommt, es ist daher

$$a_{18} = a_{19} = a_{20} = 0;$$

mithin ist q von der Form

$$2. \quad q = a\lambda + b\lambda^5 + c\lambda^9 + d\lambda^{13} + e\lambda^{17} + f\lambda^{21} + \dots$$

Anstatt dies in 1. einzuführen, ist es zweckmässiger, für λ aus 1. den Werth in 2. einzusetzen. Man bildet zu diesem Zwecke

$$\begin{aligned} \lambda^5 &= q^5 - 10q^9 + 65q^{13} - 330q^{17} + 1420q^{21} - \dots, \\ \lambda^9 &= \quad + \quad q^9 - 18q^{13} + 189q^{17} - 800q^{21} + \dots, \\ \lambda^{13} &= \quad \quad + \quad q^{13} - 26q^{17} + 65q^{21} - \dots, \\ \lambda^{17} &= \quad \quad \quad + \quad q^{17} - 34q^{21} + \dots, \\ \lambda^{21} &= \quad \quad \quad \quad + \quad q^{21} - \dots, \end{aligned}$$

und erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad -2 + b = 0, \quad 5 - 10b + c = 0, \\ -10 + 65b - 18c + d &= 0, \quad 18 - 330b + 189c - 26d + e = 0, \\ -32 + 1420b - 800c + 65d - 34e + f &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen ergeben

$$b = 2, \quad c = 15, \quad d = 150, \quad e = 1707, \quad f = 57470,$$

also ist

$$3. \quad q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 57470\lambda^{21} + \dots$$

Für eine Genauigkeit bis zur fünften Decimalstelle genügen die ersten beiden Glieder dieser Gleichung, sobald

$$15\lambda^9 < 0,00001, \quad \text{also} \quad \lambda \leq 0,2.$$

Hieraus ergibt sich

$$\sqrt{k'} > \frac{3}{7}, \quad k \leq 0,983.$$

Die ersten drei Glieder genügen bei einer Genauigkeit bis zur sechsten Stelle, wenn

$$150\lambda^{13} < \frac{1}{10^6}, \quad \text{also} \quad \lambda \leq 0,28,$$

$$\sqrt{k'} > \frac{11}{39}, \quad k < 0,992,$$

und bei einer Genauigkeit bis zur fünften Stelle, wenn

$$k < 0,9995.$$

Aus q findet man K (wenn man nicht vorzieht, K aus k nach den früher mitgetheilten Methoden direkt zu berechnen) aus der ausserordentlich rasch convergirenden Entwicklung No. 9, 9

$$\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \dots$$

Da q selbst für grosse k stark von 1 abweicht, so genügen in den meisten Fällen die ersten drei Glieder. Schliesslich findet man $\sin am w$, $\cos am w$, $\Delta am w$ aus den ebenfalls sehr rasch convergirenden Thetaquotienten § 19, No. 5, 15, 16 und 17.

Man kann diese Gleichungen auch dazu verwenden, w zu finden, wenn $\sin am w$, $\cos am w$ oder $\Delta am w$ gegeben sind, also dazu, ein elliptisches Integral erster Art aus dem Modul und der Amplitude zu berechnen. Wir bedienen uns dazu am zweckmässigsten der Gleichung

$$5. \quad \Delta am w = \sqrt{k'} \cdot \frac{1 + \dots}{1 - \dots}$$

Setzen wir $\pi w : K = v$, so folgt

$$\frac{1}{2q} \cdot \frac{\Delta am w - \sqrt{k'}}{\Delta am w + \sqrt{k'}} =$$

Die linke Seite ist bekannt; es ist

$$\cos 2v = \delta(1 + 2 \dots) - (q^2 \cos 6 \dots)$$

In den meisten Fällen ist q sehr klein; alsdann hat man einfach

6.

Ist dieser Werth nicht hinlänglich nähierung und berechnet einen genaueren

$$7. \quad \cos 2v' = \delta(1 + 2 \dots) - (q^2 \cos 6 \dots)$$

Wenn δ nicht sehr klein ist, so stimmt das mit dem von $2\delta q^4 \cos 4v$ überein. Ist

folgende Werth von $\cos 2v$ zu klein, der aus 7. folgende Werth grösser, aber immer noch zu klein; ist dagegen $2\delta q^4 \cos 4v$ negativ, so ergibt sich $\cos 2v$ aus 6 zu gross; die aus 7. folgende zweite Annäherung ist zwar kleiner, aber immer noch zu gross; denn $2v$ ist spitz und $4v$ ist nach der Voraussetzung stumpf. In beiden Fällen erhält man durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung 7. eine Reihe von Werthen v', v'', v''', \dots die sich dem richtigen Werthe immer mehr nähern. In sehr vielen Fällen wird v' bereits genau genug sein.

§ 21. Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Art.

1. Die Integrale zweiter und dritter Art § 17, No. 8, 9

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{dz}{(1 + \lambda z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

werden nach JACOBI*) als elliptische Functionen betrachtet, indem man eine neue Variable w durch die Gleichung einführt

$$z = \sin am w, \text{ also } w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

Durch diese Substitution ergibt sich

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz = \int_0^{\pi/2} \Delta^2 am w dw.$$

JACOBI bezeichnet das letztere Integral, zwischen den Grenzen 0 und $\pi/2$ genommen, als Integral zweiter Art; wir schreiben dafür $\mathcal{E}(w)$ und haben daher

$$\mathcal{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 am w dw.$$

Ersetzt man $\Delta am w$ durch $\sin am w$, so folgt

*) JACOBI, Fundamenta nova, § 47.

$$\mathcal{E}(w) = w - \int_0^w k^2 \sin^2 am w \, dw.$$

In dem Integrale dritter Art setzen wir

$$\lambda = -k^2 \sin^2 am \alpha$$

und machen wieder die Substitution 1.; dadurch entsteht

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \lambda \sin^2 \varphi) \Delta \varphi} = \int \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w}.$$

Wird das letztere Integral zwischen den Grenzen 0 und w genommen, so erhält man sofort

$$\int_0^w \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w} = w + \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w \, dw}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w}.$$

Wir werden nun zeigen, wie die beiden Integrale, um die es sich noch handelt, nämlich

$$\int_0^w k^2 \sin^2 am w \, dw \quad \text{und} \quad \int_0^w \frac{k^2 \sin^2 am w \, dw}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w}$$

auf Thetafunctionen reducirt werden können.

2. Vorher haben wir noch zu untersuchen, ob diese beiden Integrale vom Integrationswege abhängen.

Die Function $\sin am w$ wird unendlich in den Punkten $w = 2mK + (2n+1)K' \cdot i$, wobei m und n ganze Zahlen sind; wir haben daher nach § 13, 13, 3

$$\sin^2 am [2mK + (2n+1)K' \cdot i + w]$$

für die Umgebung des Punktes $2mK + (2n+1)K' \cdot i$ in eine Reihe nach auf- und absteigenden Potenzen von w zu entwickeln und den Coefficienten von $1:w$ zu beachten. Da nun bekanntlich

$$\sin^2 am [2mK + (2n+1)K' \cdot i + w] = \frac{1}{k^2 \sin^2 am w}$$

und diese Function für entgegengesetzt gleiche w gleiche Zeichen hat, so folgt, dass in der verlangten Entwicklung nur gerade Potenzen von w vorkommen; folglich ist der Coefficient von w^{-1} gleich Null. Hieraus ergibt sich sofort:

Das Integral $\int \sin^2 am w \, dw$ über eine kleine Curve erstreckt, die einen Ausnahmepunkt einfach umkreist, verschwindet; das Integral ist daher eine eindeutige Function der Punkte der Variabelnebene.

Die Function

$$\frac{\sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w}$$

wird nur in den Punkten unendlich gross, für welche

$$1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w = 0,$$

also

$$\sin am w = \pm \frac{1}{k \sin am \alpha}.$$

Hieraus folgen für w die Auflösungen

$$w = \pm \alpha + 2mK + (2n+1)K' \cdot i.$$

Setzen wir nun

$$w = \pm \alpha + 2mK + (2n+1)K' \cdot i + w,$$

so erhalten wir

$$\frac{\sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 am (w \pm \alpha) - \sin^2 am \alpha}.$$

Ist w so klein, dass höhere Potenzen von w gegen die erste zu vernachlässigen sind, so ist nach dem Additionstheoreme

$$\sin am(w \pm \alpha) = \pm \sin am \alpha + \cos am \alpha \Delta am \alpha \cdot w.$$

Folglich ist, über eine verschwindend kleine den Punkt

$$\pm \alpha + 2mK + (2n+1)K'i$$

einmal umkreisende Curve ausgedehnt,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w} dw &= \pm \frac{1}{2k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha \Delta am \alpha} \int \frac{dw}{w} \\ &= \pm \frac{\pi i}{k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha \Delta am \alpha}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich: Das Integral

$$\int_0^w \frac{\sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w} dw$$

ist unendlich vieldeutig und hat den Periodicitätsmodul

$$\frac{\pi i}{k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha \Delta am \alpha}.$$

3. Nach § 19, No. 17, 17 ist

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta(z+\zeta) \vartheta(z-\zeta)}{\vartheta(\zeta)^2 \vartheta(z)^2} = 1 - \left[\frac{\vartheta_1(\zeta)}{\vartheta(\zeta)} \cdot \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} \right]^2.$$

Ersetzt man hier ζ und z durch $\frac{\pi}{2K}\alpha$ und $\frac{\pi}{2K}w$, so erhält man

$$\vartheta(0)^2 \cdot \frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w+\alpha)\right] \vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(w-\alpha)\right]}{\vartheta\left(\frac{\pi\alpha}{2K}\right)^2 \vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)^2} = 1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w.$$

Wir nehmen beiderseits die Logarithmen und differenzieren dann nach α ; dadurch entsteht

$$\begin{aligned} &\frac{k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha \Delta am \alpha \sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w} \\ 1. \quad &= \frac{D_\alpha \vartheta \frac{\pi\alpha}{2K}}{\vartheta \frac{\pi\alpha}{2K}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{D_\alpha \vartheta \frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{\vartheta \frac{\pi(w+\alpha)}{2K}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{D_\alpha \vartheta \frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta \frac{\pi(w-\alpha)}{2K}} \end{aligned}$$

Da nun

$$\frac{d\vartheta \frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{d\alpha} = \frac{d\vartheta \frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}{dw}, \quad \frac{d\vartheta \frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{d\alpha} = -\frac{d\vartheta \frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{dw},$$

so erhalten wir aus 1., wenn wir mit dw multipliciren und zwischen den Grenzen 0 und w integrieren,

$$\begin{aligned} 2. \quad &\int_0^w \frac{k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha \Delta am \alpha \sin^2 am w}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am w} dw \\ &= \frac{D_\alpha \vartheta \frac{\pi\alpha}{2K}}{\vartheta \frac{\pi\alpha}{2K}} \cdot w + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta \frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta \frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}. \end{aligned}$$

Der Periodicitätsmodul des links stehenden Integrals ist πi ; ihn besonders hinzuzufügen ist wegen des rechts stehenden Logarithmus nicht nöthig. Das links stehende Integral bezeichnet JACOBI als Normalintegral dritter Art $\Pi(w, K, \alpha)$, wofür auch $\Pi(w, \alpha)$ geschrieben wird, wenn über den Modulus k kein Zweifel sein kann.

Wenn wir in 2. rechts und links durch α dividiren und dann zur Grenze für $\alpha = 0$ übergehen, so erhalten wir

$$3. \quad \int_0^w k^2 \sin^2 am w \, dw = \frac{\pi^2}{4K^2} \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} w - \frac{D_w \vartheta \frac{\pi w}{2K}}{\vartheta \frac{\pi w}{2K}};$$

denn es ist, wenn $\pi\alpha : 2K = \beta$ gesetzt wird,

$$D_\alpha \vartheta \frac{\pi\alpha}{2K} = \frac{\pi}{2K} \vartheta' \beta,$$

$$\lim \frac{D_\alpha \vartheta \frac{\pi\alpha}{2K}}{\alpha} = \frac{\pi}{2K} \lim \frac{D_\alpha \vartheta \beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \lim \frac{\vartheta' \beta}{\beta} = \frac{\pi^2}{4K^2} \vartheta''(0).$$

Es ist daher

$$4. \quad \mathfrak{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 am w \, dw = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} \right] w + \frac{D_w \vartheta \frac{\pi w}{2K}}{\vartheta \frac{\pi w}{2K}}.$$

Das zweite Glied rechts bezeichnet man nach JACOBI mit $Z(w)$, so dass also

$$Z(w) = \frac{D_w \vartheta \frac{\pi w}{2K}}{\vartheta \frac{\pi w}{2K}}.$$

4. Wir entwickeln nun einige Eigenschaften der Function Z . Wenn man die angedeutete Differentiation ausführt, so erhält man zunächst

$$Z(w) = \frac{2q \sin \frac{\pi w}{K} - 4q^4 \sin \frac{2\pi w}{K} + 6q^9 \sin \frac{3\pi w}{K} - \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi w}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi w}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi w}{K} + \dots}.$$

Hieraus folgt

$$Z(-w) = -Z(w), \quad Z(0) = 0, \quad Z(mK) = 0, \quad Z(w + 2K) = Z(w),$$

Da ferner bekanntlich

$$\vartheta \frac{\pi}{2K} (w + 2iK') = -e^{\pi \frac{K'}{K} i - \frac{\pi w}{K}} \vartheta \frac{\pi w}{2K},$$

so folgt, indem man beiderseits die Logarithmen nimmt und differenziert,

$$Z(w + 2iK') = Z(w) - i \frac{\pi}{K}.$$

Ersetzt man hier w durch $-w$, so erhält man

$$Z(w - 2iK') = Z(w) + i \frac{\pi}{K}.$$

5. Geht z auf der zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche für $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ geradlinig von 0 bis 1, so durchläuft w die reale Achse von 0 bis K , geht z im untern Blatte geradlinig zurück bis 0, so geht w auf der realen Achse weiter bis $2K$. Für diesen Weg ist unzweideutig

$$\int_0^s \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz = \int_0^w \Delta^2 am w dw = \mathfrak{E}(m).$$

Das links stehende LEGENDRE'sche Integral zweiter Art erlangt auf dem angegebenen Wege den Werth $2E$.

Da nun $Z(2K) = 0$ ist, so folgt

$$2E = \left[1 - \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} \right] 2K;$$

folglich ist

$$1 - \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = \frac{E}{K},$$

und daher

$$1. \quad \mathfrak{E}(w) = \frac{E}{K} w + Z(w),$$

Rückt z auf der realen Achse von 0 bis vor 1, umgeht den Punkt 1 in negativer Drehrichtung in einem verschwindend kleinen Halbkreise, geht dann (auf demselben Rande der realen Achse wie von 0 bis 1) geradlinig weiter bis vor $1:k$, umkreist diesen Punkt in negativer Drehrichtung und kehrt hierauf (jenseits der von 1 bis $1:k$ liegenden Verwachsung) geradlinig bis zu 1 zurück, so durchläuft w geradlinig die reale Achse von 0 bis K , und dann eine Normale zur realen bis zum Punkte $K - 2iK'$. Es ist daher für diese Wege

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz + 2 \int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz = \frac{E}{K} (K - 2iK') + i \frac{\pi}{K},$$

$$\text{da} \quad Z(K - 2iK') = Z(K) + i \frac{\pi}{K} = i \frac{\pi}{K}.$$

Das zweite Integral links ist bekanntlich (§ 16, No. 19)

$$i(E' - K').$$

Daher folgt

$$E + 2i(E' - K') = \frac{E}{K} (K - 2iK') + i \frac{\pi}{K}.$$

Dies reducirt sich auf die von LEGENDRE auf anderm Wege gefundene Beziehung zwischen den vollständigen elliptischen Integralen K, K', E, E'

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gleichung $z = \sin am w$ hat, wenn z einen Punkt der zweiblätterigen RIEMANN'schen Fläche bezeichnet, für w die Wurzeln

$$w + 4mK + i \cdot 2nK',$$

wenn unter w irgend eine Wurzel dieser Gleichung verstanden wird. Die rechte Seite in 1. nimmt hierfür die unendlich vielen Werthe an

$$\frac{E}{K} (w + 4mK + i \cdot 2nK') + Z(w) - i \frac{n\pi}{K}.$$

Setzt man hier nach der LEGENDRE'schen Gleichung

$$\frac{\pi}{K} = 2E' + 2E \frac{K'}{K} - 2K',$$

so erhält man

$$\frac{E}{K} w + Z(w) + 4mE - n \cdot 2i(E' - K').$$

Daher ist die rechte Seite von 1. in derselben Weise unendlich vieldeutig, wie das Integral

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz.$$

Die Gleichung

$$2. \quad \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz = \frac{E}{K} w + Z(w), \quad z = \sin am w.$$

ist daher erschöpfend, beide Seiten stellen dieselbe Gruppe von doppelt unendlich vielen Werthen dar mit den Periodicitätsmoduln $4E$ und $2i(E' - K')$.

6. Um für $\mathfrak{E}(w)$ und $Z(w)$ eine FOURIER'sche Entwicklung zu erhalten, suchen wir eine solche zunächst für die Function $\sin^2 am w$. Zu diesem Zwecke haben wir das geradlinige Integral zu ermitteln

$$\int_0^{2K} \sin^2 am w \cdot e^{-\frac{\pi \pi w}{K} i} dw,$$

da $\sin^2 am w$ die reale Periode $2K$ hat. Wir integrieren die Function

$$\sin^2 am w \cdot e^{-\frac{\pi \pi w}{K} i}$$

entlang des Perimeters eines Rechtecks, dessen Ecken $OABC$ der Reihe nach $w = 0, 2K, 2K + 2iK', 2iK'$ sind und umgehen dabei die Ausnahmepunkte iK' und $2K + iK'$ durch verschwindende Halbkreise. In gleich weit von der realen Achse entfernten Punkten von OC und AB hat die zu integrierende Function denselben Werth, die auf diese Strecken bezüglichen Theile des Integrals verschwinden daher. In gleichweit von der imaginären Achse entfernten Punkten von OA und CB hat $\sin am w$ denselben Werth; für die Punkte CB tritt aber infolge der Exponentialgrösse der Faktor hinzu

$$e^{\frac{2i\pi K'}{K}} = q^{-2n};$$

es ist somit

$$\int(OA) + \int(BC) = (1 - q^{-2n}) \int(OA).$$

Statt der beiden Halbkreise um iK' und $2K + iK'$ kann ein Kreis um iK' gesetzt werden. Für dieses Kreisintegral J setzen wir

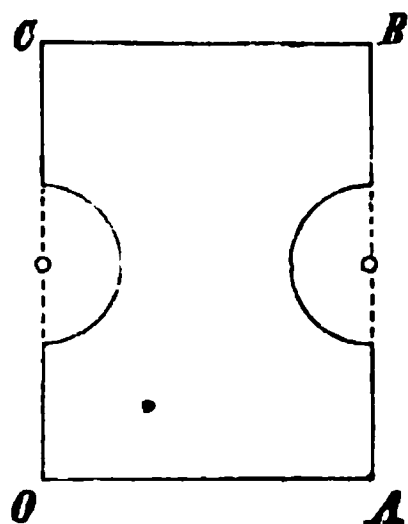
$$w = iK' + \zeta, \quad \zeta = r e^{i\varphi},$$

und haben

$$-J = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k^2 \sin^2 am \zeta} \cdot q^{-n} \cdot e^{-\frac{\pi \pi \zeta}{K} i} \cdot i \zeta \cdot d\varphi.$$

Wird die Exponentialgrösse durch eine Potenzreihe ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -J = \frac{1}{k^2 q^n} & \left[i \int_0^{2\pi} \frac{\zeta}{\sin^2 am \zeta} d\varphi + \frac{n\pi}{K} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2}{\sin^2 am \zeta} d\varphi \right. \\ & \left. - i \frac{n^2 \pi^2}{2K^2} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^3}{\sin^2 am \zeta} d\varphi - \dots \right]. \end{aligned}$$



(M. 575.)

Das erste Integral rechts stimmt bis auf einen constanten Faktor mit dem Kreisintegrals für die Function $\sin^2 am w$ überein, von dem wir bewiesen haben, dass es verschwindet; das dritte und alle folgenden verschwinden, wenn wir zur Grenze für $\zeta = 0$ übergehen, da die zu integrierende Function verschwindet; das zweite liefert bei diesem Grenzübergange einen nicht verschwindenden endlichen Werth, und wir erhalten

$$\lim J = -\frac{2n\pi^2}{k^2 K q^n}.$$

Daher ergibt sich schliesslich

$$\int_0^2 \sin^2 am w e^{-\frac{n\pi w}{K}i} dw = -\frac{2\pi^2}{k^2 K} \cdot \frac{nq^n}{1-q^{2n}},$$

$$a_n = \frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Hieraus folgt

$$a_n - a_{-n} = 0, \quad a_n + a_{-n} = -\frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cdot \frac{2nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Für $n = 0$ ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{2K} \int_0^{2K} \sin^2 am w dw = \frac{1}{2k^2 K} \int_0^{2K} (1 - \Delta^2 am w) dw = \frac{K-E}{k^2 K}.$$

Wir haben somit

$$1. \sin^2 am w = \frac{K-E}{k^2 K} - 2 \frac{\pi^2}{k^2 K^2} \left(\frac{q}{1-q^2} \cos \frac{\pi w}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4} \cos \frac{2\pi w}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6} \cos \frac{3\pi w}{K} + \dots \right).$$

Da nun

$$\mathcal{E}(w) = \int_0^w \Delta^2 am w dw = w - k^2 \int_0^w \sin^2 am w dw,$$

so ergibt sich

$$2. \quad \mathcal{E}(w) = \frac{E}{K} w + \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin \frac{2\pi w}{K} + \dots \right)$$

Hieraus folgt noch

$$3. \quad Z(w) = \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi w}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin \frac{2\pi w}{K} + \frac{q^3}{1-q^6} \sin \frac{3\pi w}{K} + \dots \right).$$

7. Nach No. 3 2, ist

$$1. \quad \Pi(w, k, \alpha) = Z(\alpha) \cdot w + \frac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi(w-\alpha)}{2K}}{\vartheta \frac{\pi(w+\alpha)}{2K}}.$$

Vertauscht man Parameter und Amplitude, so entsteht

$$\Pi(\alpha, k, w) = Z(w) \cdot \alpha + \frac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi(\alpha-w)}{2K}}{\vartheta \frac{\pi(\alpha+w)}{2K}}.$$

Durch Subtraction ergibt sich hieraus in Rücksicht darauf, dass $\vartheta(z-\zeta) = \vartheta(\zeta-z)$ die Beziehung

$$2. \quad \Pi(w, k, \alpha) - \Pi(\alpha, k, w) = wZ(\alpha) - \alpha Z(w).$$

Diese Gleichung lehrt, wie man ein Integral dritter Art durch ein anderes ausdrücken kann, in welchem der Modul gegen die Amplitude vertauscht ist.

K , so wird das Integral dritter Art als vollständig bezeichnet. Nach

$$\Pi(K, k, a) = \Pi(a, k, K) + KZ(a) - aZ(K).$$

$$\Pi(a, k, K) = 0, \quad Z(K) = 0,$$

zur Berechnung eines vollständigen elliptischen Integrals dritter Art Gleichung

$$\Pi(K, k, a) = KZ(a),$$

erhalten aus 1. gewonnen werden kann.

LEGENDRE'sche Integral dritter Art ist mit dem JACOBI'schen durch

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w + \frac{\operatorname{tang} am a}{\Delta am a} \Pi(w, k, a),$$

$$\sin am w = z, \quad \sin^2 am a = -\frac{\lambda}{k^2}.$$

Wenn λ positiv und $-\lambda > k^2$, so ist $-\lambda : k^2$ ein unechter Bruch, mithin a rein imaginär. In beiden Fällen ist $\sin am a$ und daher auch a rein imaginär. In beiden Fällen überhaupte bei realem λ , das LEGENDRE'sche Integral Π_0 real mit a real, rechts ein nicht realer Parameter a vorkommt.

Wir zeigen, wie man die imaginäre Form in diesen Fällen vermeiden kann. Wir untersuchen zunächst das besondere Integral

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

— 1, also

$$\sin am a = \frac{1}{k}, \quad a = K + iK'.$$

$$\Pi(K, K + iK') = wZ(K + iK') + \frac{1}{2}i \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K - iK')}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K + iK')}.$$

Wenn $K + iK'$ den Werth $K + iK'$ annimmt, hat z von 0 bis 1 zu gehen, den Kreisbogen im ersten Quadranten des Halbkreises in der Richtung der abnehmenden z zu beschreiben und dann geradlinig die Strecke bis $1:k$ zurückzulegen.

$$\begin{aligned} Z(K + iK') &= \int_0^{K+iK'} \Delta^2 am w dw - \frac{E}{K}(K + iK') \\ &= E - i(E' - K') - E - i \frac{EK'}{K} \\ &= -i \left(E' + \frac{EK'}{K} - K' \right). \end{aligned}$$

Es ist bekanntlich

$$\frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(K + iK' - w)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(K + iK' + w)} = e^{\frac{i\pi w}{K}} \cdot \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K)} = e^{\frac{i\pi w}{K}}.$$

$$\Pi(w, k, K + iK') = \frac{iw}{K} \left(\frac{\pi}{2} - E'K - EK' + KK' \right) = 0.$$

nun auch $\Delta am(K + iK') = 0$, so nimmt das Glied

$$\frac{\text{tang } am(K + iK')}{\Delta am(K + iK')} \Pi(w, k, K + iK')$$

in $0:0$ an. Um den Grenzwert des Ausdrucks zu bestimmen, haben wir Quotienten von

$$\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta am \alpha}{\partial \alpha}$$

Werth $\alpha = K + iK'$ zu ermitteln.

$$\Pi(w, k, \alpha) = \Pi(\alpha, k, w) + wZ(\alpha) - \alpha Z(w)$$

$$\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{k^2 \sin am w \cos am w \Delta am w \sin^2 am \alpha}{1 - k^2 \sin^2 am w \sin^2 am \alpha} + wZ'(\alpha) - Z(w).$$

$$Z(\alpha) = \int_0^\alpha \Delta^2 am w dw - \frac{E}{K} \alpha,$$

$$Z'(\alpha) = \Delta^2 am \alpha - \frac{E}{K}.$$

Nimmt man hiervon in 1. Gebrauch und setzt

$$\sin am \alpha = \frac{1}{k}, \quad \text{also} \quad \cos am \alpha = \frac{ik'}{k}, \quad \Delta am \alpha = 0,$$

so erhält man

$$\left[\frac{\partial \Pi(w, k, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{(\alpha=K+iK')} = \text{tang } am w \Delta am w - \mathfrak{E}(w).$$

Es ist

$$\frac{\partial \Delta am \alpha}{\partial \alpha} = -k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha.$$

$\alpha = K + iK'$ ergibt dies $(-ik')$. Da nun

$$\text{tang } am(K + iK') = \frac{1}{ik'},$$

so schliesslich

$$\frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w + \frac{1}{k^2} [\text{tang } am w \Delta am w - \mathfrak{E}(w)],$$

ergibt, von dessen Richtigkeit man sich durch Differentiation leicht überzeugt.

Auf dieses Integral lassen sich die Functionen $Z(w)$ und $\mathfrak{E}(w)$ im Falle imaginären Arguments reduciren; denn es ist

$$Z(iv) = \mathfrak{E}(iv) - i \cdot \frac{E}{K} v,$$

$$\mathfrak{E}(iv) = \int_0^{iy} \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz, \quad \text{wobei} \quad y = \text{tang } am(v, k').$$

Setzt man hier z durch iy , so entsteht

$$\mathfrak{E}(iv) = i \int_0^y \sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+y^2}} dy.$$

Die Substitution $y = \text{tang } \varphi$, also $\varphi = am(v, k')$, giebt

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(iv) &= i \int_0^v \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \\ &= i \int_0^v \frac{(1 - k'^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{(1 - \sin^2 \varphi) \Delta(\varphi, k')} \\ &= ik'^2 \int_0^v \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k')} + ik^2 \int_0^v \frac{d\varphi}{(1 - \sin^2 \varphi) \Delta(\varphi, k')}.\end{aligned}$$

Daher folgt schliesslich in Rücksicht auf No. 8, 2

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(iv) &= ik'^2 v + ik^2 v + i \frac{k^2}{k'^2} [\text{tang am}(v, k') \Delta \text{am}(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')] \\ &= iv + i \frac{k^2}{k'^2} [\text{tang am}(v, k') \Delta \text{am}(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')], \\ Z(iv) &= i \cdot \frac{K - E}{K} v + i \cdot \frac{k^2}{k'^2} [\text{tang am}(v, k') \Delta \text{am}(v, k') - \mathfrak{E}(v, k')]\end{aligned}$$

10. Ist λ negativ und $-\lambda > 1$, so folgt, wenn $-\lambda = \mu^2$ gese

$$\sin \text{am} \alpha = \frac{\mu}{k},$$

dass α von der Form $K + iK' + \beta$ ist. Da nun

$$\sin \text{am}(K + iK' + \beta) = \frac{1}{k \sin \text{am}(K + \beta)} = \frac{\Delta \text{am} \beta}{k \cos \text{am} \beta},$$

so dient zur Bestimmung von β die Gleichung

$$\Delta \text{am} \beta = \mu \cos \text{am} \beta,$$

aus welcher hervorgeht

$$1. \quad \sin \text{am} \beta = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - k^2}};$$

nach der Voraussetzung über μ ist der Radicand ein positiver echte

Man hat nun

$$\Pi(w, k, K + iK' + \beta) = w Z(K + iK' + \beta) + \frac{1}{2} i \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K + iK' + \beta)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K - iK' - \beta)}.$$

Aus den Gleichungen § 19, No. 2, 7 folgt

$$\vartheta \frac{\pi}{2K}(K + iK' + \beta) = \vartheta_2 \frac{\pi}{2K}(iK' + \beta) = e^{i\varphi - \frac{i\pi\beta}{2K}} \vartheta_2 \frac{\pi}{2K}$$

Also ist

$$\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + K + iK' + \beta) = e^{i\varphi - \frac{i\pi(\beta+w)}{2K}} \vartheta_2 \frac{\pi(\beta+w)}{2K},$$

$$\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - K - iK' - \beta) = e^{i\varphi - \frac{i\pi(\beta-w)}{2K}} \vartheta_2 \frac{\pi}{2K}(\beta - w).$$

Hieraus folgt

$$Z(K + iK' + \beta) = -\frac{i\pi}{2K} + \frac{D\vartheta_2 \frac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta_2 \frac{\pi\beta}{2K}},$$

$$\Pi(w, k, K + iK' + \beta) = \frac{D\vartheta_2 \frac{\pi\beta}{2K}}{\vartheta_2 \frac{\pi\beta}{2K}} + \frac{1}{2} i \frac{\vartheta_2 \frac{\pi(\beta+w)}{2K}}{\vartheta_2 \frac{\pi(\beta-w)}{2K}}.$$

Ferner ist

$$\cos am(K + iK' + \beta) = -i \frac{\Delta am(K + \beta)}{k \sin am(K + \beta)},$$

$$\Delta am(K + iK' + \beta) = -i \frac{\cos am(K + \beta)}{\sin am(K + \beta)}$$

und daher

$$\frac{\tan am(K + iK' + \beta)}{\Delta am(K + iK' + \beta)} = - \frac{\tan am(K + \beta)}{\Delta am(K + \beta)} = \frac{\Delta am \beta}{\tan am \beta}.$$

Somit haben wir schliesslich

$$\int_0^z \frac{dz}{(1 - \mu^2 z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w + \frac{\Delta am \beta}{\tan am \beta} \left[\frac{D_\beta \vartheta_2 \frac{\pi \beta}{2K}}{\vartheta_2 \frac{\pi \beta}{2K}} + \frac{1}{2} l \frac{\vartheta_2 \frac{\pi(\beta + w)}{2K}}{\vartheta_2 \frac{\pi(\beta - w)}{2K}} \right],$$

wobei also

$$\mu > 1, \quad z = \sin am w, \quad \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - k^2}} = \sin am \beta.$$

11. Wir wenden uns nun zu dem LEGENDRE'schen Integrale dritter Art für den Fall eines positiven λ . Setzen wir jetzt $\lambda = \mu^2$, wo nun μ real ist, so ist

$$\sin am \alpha = i \cdot \frac{\mu}{k};$$

setzt man $\alpha = i\beta$, so folgt zur Bestimmung des realen Werths β

$$\tan am(\beta, k') = \frac{\mu}{k}, \quad \sin am(\beta, k') = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + k^2}}.$$

Wir haben nun zunächst

$$\int_0^z \frac{dz}{(1 + \mu^2 z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w + \frac{\tan am(i\beta)}{\Delta am(i\beta)} \Pi(w, k, i\beta).$$

Nach § 18, No. 4 ist

$$\frac{\tan am i\beta}{\Delta am i\beta} = \frac{i \sin am(\beta, k') \cdot \cos am(\beta, k')}{\Delta am(\beta, k')}.$$

Ferner ist

$$1. \quad \Pi(w, K, i\beta) = w Z(i\beta) + \frac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + i\beta)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)},$$

$$z(i\beta) = \frac{D_{i\beta} \vartheta \frac{\pi \beta}{2K} i}{\vartheta \frac{\pi}{2K} i} = \frac{1}{i} \frac{D_\beta \vartheta \frac{\pi}{2K} i}{\vartheta \frac{\pi}{2K} i}.$$

Da nun

$$2. \quad \vartheta iz = \sum (-1)^n e^{-n^2 \rho + 2nz},$$

so ist $\vartheta \frac{\pi \beta}{2K} i$ real, und man kann daher für die rechte Seite der vorletzten Gleichung $m : i$ setzen, wobei m real ist. Das elliptische Integral $\Pi(w, k, i\beta)$ ist für ein reales w rein imaginär; ersetzt man es durch iV , so entsteht aus 1.

$$i(V + mw) = \frac{1}{2} l \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w + i\beta)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)};$$

mithin ist

$$e^{i(V+mw)} = \left[\frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$e^{-i(V+mw)} = \left[\frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man

$$3. \quad \cos(V+mw) = \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) + \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{2 \sqrt{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) \cdot \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}}.$$

$$4. \quad \sin(V+mw) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) - \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}{\sqrt{\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) \cdot \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta)}}.$$

Jede dieser Gleichungen ist dazu geschickt, V zu finden; es erübrigt nur noch, Zähler und Nenner in 3. und 4. in handlicher Form darzustellen.

Für den Nenner hat man nach § 19, No. 17

$$\vartheta(2)^2 \vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = \left(\vartheta \frac{\pi w}{2K} \cdot \vartheta \frac{\pi \beta}{2K} i \right)^2 \left(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\pi w}{2K} \sin^2 \operatorname{am} \frac{\pi \beta}{2K} \right).$$

Daher ist

$$5. \quad \vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta) = \left[\frac{\vartheta \frac{\pi w}{2K} \cdot \vartheta \frac{\pi \beta}{2K} i}{\vartheta(0)} \right]^2 \left[1 + k^2 \operatorname{tang}^2 \operatorname{am}(\beta, k') \sin^2 \operatorname{am} \frac{\pi w}{2K} \right].$$

hierbei hat man für $\vartheta \frac{\pi \beta}{2K} i$ die stark convergente Reihe

$$6. \quad \vartheta \frac{\pi \beta}{2K} i = 1 - q \left(e^{\frac{\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{\pi \beta}{K}} \right) + q^4 \left(e^{\frac{2\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{2\pi \beta}{K}} \right) \\ - q^9 \left(e^{\frac{3\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{3\pi \beta}{K}} \right) + q^{16} \left(e^{\frac{4\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{4\pi \beta}{K}} \right) - \dots$$

Ferner ist

$$\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right) \\ - i \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right),$$

$$e^{\frac{\pi}{2K}}(w-i\beta) = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right) \\ + i \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right).$$

Daher ist

$$7. \quad \frac{1}{2} \left[\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) + \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta) \right] = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right),$$

$$\frac{1}{2i} \left[\vartheta \frac{\pi}{2K}(w+i\beta) - \vartheta \frac{\pi}{2K}(w-i\beta) \right] = - \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right).$$

Durch die Gleichungen 3 bis 7 ist V bestimmt.

12. Wir haben nun noch den Fall zu erledigen, dass λ negativ ist und $-\lambda$ zwischen k^2 und 1 liegt; unter dieser Voraussetzung ist α von der Form $K + i\beta$ und β bestimmt sich, wenn $-\lambda$ durch μ^2 ersetzt wird, aus

$$\sin \operatorname{am}(K + i\beta) = \frac{\cos \operatorname{am} i\beta}{\Delta \operatorname{am} i\beta} = \frac{1}{\Delta \operatorname{am}(\beta, k')} = \frac{\mu}{k},$$

woraus folgt

$$\sin \operatorname{am}(\beta, k') = \frac{\sqrt{\mu^2 - k^2}}{k}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_0^s \frac{dz}{(1 - \mu^2 z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w + \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am}(K + i\beta)}{\Delta \operatorname{am}(K + i\beta)} \Pi(w, k, K + i\beta), \\ & \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am}(K + i\beta)}{\Delta \operatorname{am}(K + i\beta)} = - \frac{\Delta \operatorname{am}(i\beta)}{k'^2 \operatorname{tang} \operatorname{am}(i\beta)} = \frac{i}{k'^2} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am}(\beta, k')}{\sin \operatorname{am}(\beta, k') \cos \operatorname{am}(\beta, k')}, \\ 2. \quad & \Pi(w, k, K + i\beta) = w Z(K + i\beta) + \frac{1}{2} i \frac{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + K + i\beta)}{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - K - i\beta)}. \end{aligned}$$

Zur weiteren Reduction bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} 3. \quad & Z(K + i\beta) = \frac{1}{i} \frac{D_\beta \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(K + i\beta)}{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(K + i\beta)} = \frac{1}{i} \frac{D_\beta \vartheta_3 \frac{\pi\beta}{2K} i}{\vartheta_3 \frac{\pi\beta}{2K} i} \\ & \vartheta_3 \frac{\pi\beta}{2K} i = 1 + \sum_1^\infty q^{n^2} \left(e^{\frac{n\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi\beta}{K}} \right); \end{aligned}$$

ferner, dass

$$\begin{aligned} \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + K + i\beta) &= \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + i\beta), \\ \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - K - i\beta) &= \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - i\beta). \end{aligned}$$

Der zweite Theil der rechten Seite in Gleichung 1. ist für $z^2 < 1$ real, folglich ist $\Pi(w, k, K + i\beta)$ rein imaginär; ersetzen wir es zur Abkürzung durch iV , sowie $Z(K + i\beta)$ durch $m:i$, worin nun m eine reale bekannte Zahl ist, die sich aus 3. bestimmt, so haben wir für V die Gleichung

$$e^{i(V+mw)} = \left(\frac{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + i\beta)}{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus weiter folgt

$$\begin{aligned} 4. \quad & \cos(V + mw) = \frac{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + i\beta) + \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}{2 \sqrt{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + i\beta) \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}}, \\ & \sin(V + mw) = \frac{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + i\beta) - \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}{2i \sqrt{\vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w + i\beta) \vartheta_3 \frac{\pi}{2K}(w - i\beta)}}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in § 18, No. 20, 17 z durch $\frac{1}{2}\pi + z$, so erhält man

$$\frac{\theta(0)^2}{(z)^2 \theta(\zeta)^2} \cdot \theta_3(z + \zeta) \theta_3(z - \zeta) = 1 - k^2 \frac{\cos^2 am z}{\Delta^2 am z} \cdot \sin^2 am \zeta.$$

Substitution $z = \frac{\pi w}{2K}$, $\zeta = \frac{\pi \beta}{2K} i$ liefert hieraus

$$+ i\beta) \theta_3 \frac{\pi}{2K} (w - i\beta) = \left[\frac{\theta_3 \frac{\pi w}{2K} \theta_3 \frac{\pi \beta i}{2K}}{\theta(0)} \right]^2 \left[1 + k^2 \frac{\cos^2 am z}{\Delta^2 am z} \tan^2 am(\beta, k') \right].$$

ist

$$\theta_3 \frac{\pi}{2K} (w + i\beta)$$

$$\sum_1^\infty q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right) = i \sum_1^\infty q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right),$$

$$\theta_3 \frac{\pi}{2K} (w - i\beta)$$

$$\sum_1^\infty q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right) - i \sum_1^\infty q^{n^2} \sin \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right).$$

folgt

$$\left[\theta_3 \frac{\pi}{K} (w + i\beta) + \theta_3 \frac{\pi}{K} (w - i\beta) \right] = 1 + \sum_1^\infty q^{n^2} \cos \frac{n\pi w}{K} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} + e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right),$$

$$\left[\theta_3 \frac{\pi}{K} (w + i\beta) - \theta_3 \frac{\pi}{K} (w - i\beta) \right] = - \sum_1^\infty q^{n^2} \left(e^{\frac{n\pi \beta}{K}} - e^{-\frac{n\pi \beta}{K}} \right).$$

die Gleichungen 1. bis 6. wird das Problem vollständig gelöst*).

Es sei es uns versagen, den Leser tiefer in die Theorie der elliptischen einzuführen und verweisen hierfür auf die citirten Werke; in dem geführten findet man ausführliche Nachweise über die reichhaltige Literatur dieses wichtigen Abschnitts der Analysis.

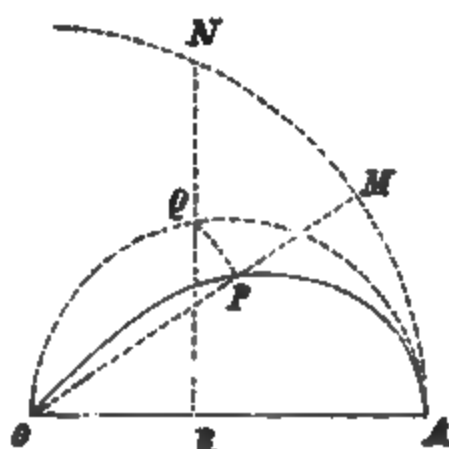
§ 22. Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale.

1. Rectification der Lemniscate. Die Gleichung der Lemniscate in Polarcordinaten ist

$$r = a \sqrt{\cos 2\omega},$$

wenn mit ω der Winkel des Radius vector r mit der Achse der Lemniscate bezeichnet wird.

Die Construction der Curve erfolgt in einfachster Weise, indem man um O mit $OA = a$ einen Kreis beschreibt, denselben mit einem Radius vector in M schneidet, $MN = AM$ macht, und mit $NQ \perp OA$ durchschneidet; alsdann ist $OR = a \cos 2\omega$, mithin $OQ = a \sqrt{\cos 2\omega}$; macht man daher $OP = OQ$, so ist P ein Punkt der Lemniscate.



Wir bezeichnen den Winkel AOQ als Amplitude φ des Lemniscatenpunkts P ; für diesen Winkel ist

$$\sin \varphi = \frac{AQ}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = \sqrt{2} \cdot \sin \omega.$$

*) Vergl. ENNEPER, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle 1876, § 34. Die verschiedenen Formen der elliptischen Integrale 3. Gattung.

Der von A bis P reichende Lemniscatenbogen hat die Länge

$$s = a \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Also ist

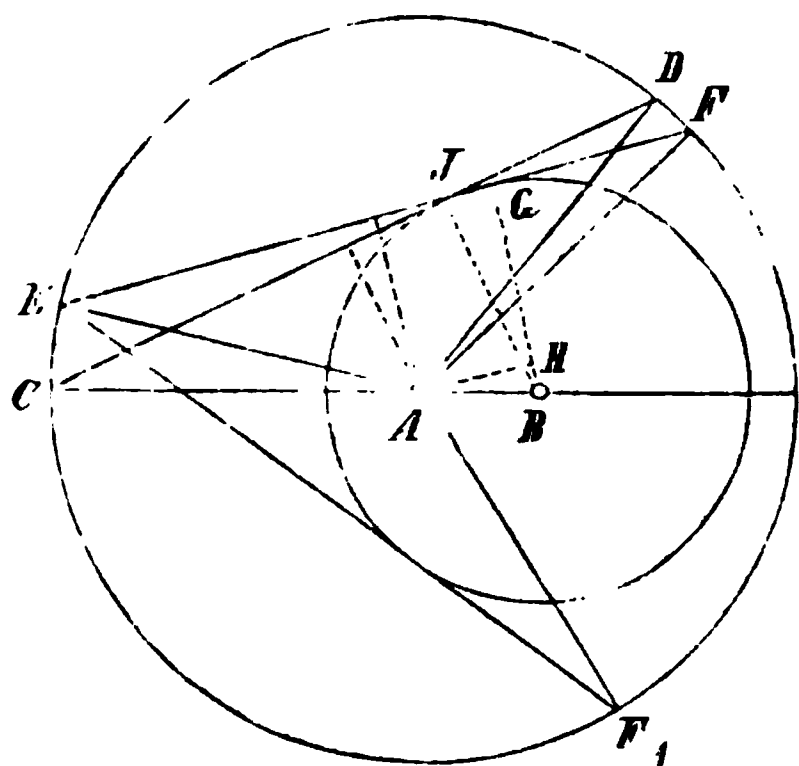
$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

und der Lemniscatenquadrant S

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Soll die Summe zweier Lemniscatenbogen s_1 und s_2 einem dritten Lemniscatenbogen s gleich sein, so müssen die Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ durch eine der äquivalenten Gleichungen verbunden sein, welche das Additionstheorem enthalten.

2. Wir wollen bei dieser Gelegenheit zeigen, wie das Additionstheorem durch eine geometrische Construction erledigt werden kann.



(M. 577.)

Man zeichne zwei Kreise, einen mit Centrum A und Radius R , den andern im Innern des ersteren mit Radius r ; der Abstand AB der Centra sei h . Im grösseren Kreise ziehe man zwei Sehnen BD und EF , die den kleineren berühren.

Sind α, β, γ die Winkel DAC, EAC, FAC und $AH \perp GB$, so hat man $BG = HG + BH$,

$$\text{d. i. } r = R \cos(\gamma - \beta) + h \cos(\gamma + \beta),$$

$$= (R + h) \cos \beta \cos \gamma + (R - h) \sin \beta \sin \gamma.$$

Ferner folgt aus CBJ

$$1. \quad r = (R + h) \cos \alpha,$$

daher ist

$$2. \quad \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \frac{R - h}{R + h} \sin \beta \sin \gamma.$$

Man kann nun h immer so bestimmen, dass für einen gegebenen Modul $k < 1$

$$3. \quad \frac{R - h}{R + h} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha};$$

es folgt nämlich hieraus

$$4. \quad h = R \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}{1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Man sieht, dass dieser Werth von h kleiner als R ist, und dass nach 3. $R - h$ grösser ist als $(R + h) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, also grösser als r ; es wird also immer mit willkürlich gewählten R und α und aus 4. und 1. bestimmten h und r die Figur mit der vorausgesetzten Anordnung der Kreise erhalten. Führt man nun 3. in 2. ein, so erhält man

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \Delta(\alpha).$$

Dies ist aber bekanntlich die Bedingung, unter welcher

$$1. \quad F(\alpha, k) + F(\beta, k) = F(\gamma, k).$$

Sind nun k, α, β gegeben, γ gesucht, so wähle man R beliebig, construiere dann h und r nach 4. und 2., mache $EAC = 2\beta$, und ziehe von E die Gerade EF so, dass sie den kleinen Kreis berührt; alsdann ist $\gamma = \frac{1}{2} FAC$.

Die zweite von E an den kleinen Kreis gelegte Tangente EF_1 bestimmt einen Winkel $\gamma = \frac{1}{2} CAF_1$, der die Aufgabe löst

$$F(\alpha, k) - F(\beta, k) = F(\gamma, k).$$

Zieht man von F aus eine Tangente F' an den kleinen Kreis, von F' aus eine Tangente $F'F''$ u. s. w. und bezeichnet die Winkel, die AF' , AF'' , AF''' u. s. w. mit AC bilden, mit $2\gamma_1$, $2\gamma_2$, $2\gamma_3$ u. s. w., so hat man

$$\begin{aligned} F(\alpha) + F(\beta) &= F(\gamma), \\ F(\alpha) + F(\gamma) &= F(\gamma_1), \\ F(\alpha) + F(\gamma_1) &= F(\gamma_2), \\ F(\alpha) + F(\gamma_2) &= F(\gamma_3), \\ &\dots \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$F(\gamma_n) = (n+1)F(\alpha) + F(\beta),$$

oder, wenn $\beta = 0$, also $E \equiv C$ ist,

$$F(\gamma_n) = (n+1)F(\alpha).$$

Hierdurch ist die Aufgabe gelöst: Durch Constructionen von geraden Linien und Kreisbogen die Amplitude eines Lemniscatenbogens zu erhalten, der gleich der Summe oder der Differenz der zu gegebenen Amplituden gehörigen Lemniscatenbogen ist; oder der gleich einem ganzzahligen Vielfachen des zu einer gegebenen Amplitude gehörigen Lemniscatenbogens ist.

3. Die Aufgabe, einem (in A anfangenden) Lemniscatenbogen in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, ist der geometrische Ausdruck der arithmetischen Aufgabe, $\sin am \frac{1}{n}w$ durch n , k und elliptische Functionen von w auszudrücken. Zur Lösung dieses Problems wird man zunächst durch wiederholte Anwendung der Gleichungen für $\sin am(w + w_1)$, $\cos am(w + w_1)$, $\Delta am(w + w_1)$ die Functionen $\sin am nw$, $\cos am nw$, oder $\Delta am nw$ durch w ausdrücken; man erhält so eine Gleichung, welche elliptische Functionen von w mit einer von nw algebraisch verknüpft. Ersetzt man nun hierin nw durch w , also w durch $w:n$, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichung eine Function von $w:n$ durch w ausgedrückt.

Diese aufzulösende Gleichung ist bereits für den $n = 2$ vom 8. Grade. Wir müssen hier darauf verzichten, die allgemeine Gleichung des Divisionsproblems aufzustellen, und ihre algebraische Lösbarkeit nachzuweisen*), und geben nur die Lösung für den einfachsten Fall.

Setzt man in

$$\cos am 2w = \frac{\cos^2 am w - \sin^2 am w \Delta^2 am w}{1 - k^2 \sin^4 am w},$$

w für $2w$ und z für $\sin am \frac{1}{2}w$, so erhält man für z die Gleichung

$$1. \quad (1 - k^2 z^4) \cos^2 am w = 1 - 2z^2 + k^2 z^4,$$

aus welcher folgt

$$2. \quad z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am w}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 am w}}}.$$

Die vier Auflösungen der Gleichung 1. sind

$$\sin am \frac{w}{2}, \quad \sin am \left(\frac{w}{2} + 2K \right), \quad \sin am \left(\frac{w}{2} + iK' \right), \quad \sin am \left(\frac{w}{2} + 2K + iK' \right).$$

Ausdrücke, welche ausser rationalen Grössen nur Quadratwurzeln enthalten, lassen sich bekanntlich mit Lineal und Zirkel construiren. Ohne auf die Einzelheiten einer solchen Construction weiter einzugehen, können wir daher den Satz

*) Vergl. KÖNIGSBERGER, Vorl. über die Theorie d. ell. Funct. 2 Bd. pag. 210.

aussprechen: Ein Lemniscatenbogen k in 2^{te} gleiche Theile getheilt werden.

4. Rectification der Ellipse. Wer einen Ellipsenpunkt mit Hülfe eines Winkels ausdrückt

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi$$

so ist ein vom Endpunkte der kleinen Achse

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

Bezeichnet man die numerische Excentricität

$$e = \frac{b}{a} E(\varphi)$$

Alle auf Integrale zweiter Art bezügliche Deutung als Sätze über Ellipsenbogen. Das

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) =$$

lehrt: Zu zwei gegebenen Ellipsenbögen s_1 und s_2 ein dritter s_3 construiren, so dass das

$$s_1 + s_2 - s_3 =$$

geometrisch construirt werden kann.

Nimmt man insbesondere $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, so ist $s_2 - s_1$ ein Ellipsenbogen s' , der vom Endpunkte der kleinen Achse beginnt. In diesem Falle hat man

$$s - s' = \frac{a^2 - b^2}{a^2} E(\varphi)$$

$$\sin \psi = \frac{\cos \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

Man erhält so den Satz: Zu jedem i^{ten} Theile eines Ellipsenquadranten lässt sich ein beginnender Theil construiren, so dass die Summe construierbar ist.

5. Rectification der Hyperbel. Für einen Punkt, bezogen auf die Symmetrieachsen, hat man

$$x = a \operatorname{cosec} \varphi, \quad y = b \cot \varphi$$

und daher für den vom Scheitel anfangende Bogen

$$1. \quad s = \int_0^\varphi \frac{\sqrt{c^2 - a^2 \cot^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

Durch theilweise Integration erhält man

$$\int \frac{\Delta \varphi}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi = - \cot \varphi \Delta \varphi +$$

Ferner ist

$$k^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta \varphi} \, d\varphi = - k'^2 \frac{1}{\Delta \varphi} \, d\varphi$$

Daher hat man

$$2. \quad \int \frac{\Delta \varphi}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi = - \cot \varphi \Delta \varphi + k$$

Setzt man nun in 1.

$$k = a : c$$

so erhält man durch 2.

$$\frac{1}{c} s = \cot \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + k'^2 [K - F(\varphi, k)] - [E - E(\varphi, k)].$$

Der Abstand des Nullpunktes von der Hyperbelnormalen im Bogenendpunkte ist, wie man leicht erhält

$$p = c \frac{\cot \varphi}{\Delta \varphi};$$

daher ist

$$s - p \Delta^2 \varphi = c k'^2 [K - F(\varphi, k)] - c [E - E(\varphi, k)].$$

Geht man hier zur Grenze $\varphi = 0$ über, so ergibt sich links der Unterschied eines Hyperbelquadranten und der Asymptote, beide vom Nullpunkte aus gezählt; rechts ergibt sich

$$c (k'^2 K - E).$$

6. Complation von Oberflächentheilen der centriscen Flächen zweiten Grades. Die Gleichung einer centriscen Fläche zweiten Grades, bezogen auf die Hauptachsen, ist

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

woraus folgt

$$z = \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{C}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{Ax}{\sqrt{C(1 - Ax^2 - By^2)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{By}{\sqrt{C(1 - Ax^2 - By^2)}}.$$

Bezeichnet ω den Winkel der Flächennormalen mit der XY -Ebene, so ist die Oberfläche

$$1. \quad S = \iint \frac{1}{\sin \omega} dx dy, \quad \sin \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Setzt man für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die obigen Werthe ein, so erhält man

$$2. \quad \sin \omega = \sqrt{\frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - B)y^2}}.$$

Behält man die rechtwinkligen Coordinaten bei, so führt bereits die erste Integration auf elliptische Integrale, deren Modul die zweite Variable enthält; dadurch ergeben sich Schwierigkeiten, die man zu vermeiden suchen muss, indem man geeignete neue Coordinaten einführt.

Als solche empfehlen sich der Winkel ω und der Winkel φ , den die Projection der Normalen auf die XY -Ebene mit der X -Achse bildet. Die neuen Variabeln sind mit den bisherigen durch die Gleichungen verbunden

$$2. \quad \sin^2 \omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - B)y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{By}{Ax}.$$

Der letzten Gleichung wird identisch genügt, wenn man setzt

$$3. \quad x = BR \cos \varphi, \quad y = AR \sin \varphi;$$

führt man diese Werthe in die erste ein, so folgt

$$4. \quad R^2 = \frac{C}{AB} \cdot \frac{\cos^2 \omega}{BC \cos^2 \omega \cos^2 \varphi + AC \cos^2 \omega \sin^2 \varphi + AB \sin^2 \omega}.$$

Die Einführung der neuen Variabeln ergibt nun zunächst

$$S = \iint \frac{1}{\sin \omega} \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} \right) d\varphi d\omega.$$

Für die in Klammern stehende Determinante findet man

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} \\
&= AB \left[\frac{\partial R}{\partial \omega} \cos \varphi \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \varphi + R \cos \varphi \right) - \frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \varphi \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} \cos \varphi - R \sin \varphi \right) \right] \\
&= AB \cdot R \frac{\partial R}{\partial \omega} = AB \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial (R^2)}{\partial \omega} \\
&= - \frac{ABC \sin \omega \cos \omega}{(BC \cos^2 \omega \cos^2 \varphi + CA \cos^2 \omega \sin^2 \varphi + AB \sin^2 \omega)^2}.
\end{aligned}$$

Daher ist schliesslich

$$5. \quad S = \pm ABC \iint \frac{\cos \omega \, d\omega \, d\varphi}{(BC \cos^2 \omega \cos^2 \varphi + CA \cos^2 \omega \sin^2 \varphi + AB \sin^2 \omega)^2}.$$

Zur Orientirung über das Vorzeichen in Verbindung mit der Anordnung der Grenzen dient hier folgende Bemerkung. Die Fläche S ist stets positiv; wird nun für ω immer ein spitzer Winkel, und die unteren Grenzen kleiner als die oberen genommen, so ist das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem ABC positiv oder negativ ist.

Die relativ einfachsten Resultate wird man bei der Wahl bestimmter Variablen immer erhalten, wenn man die Grenzen constant nimmt. In unserm Falle würde das die geometrische Bedeutung haben, dass wir das Stück der Fläche bestimmen, welches von zwei Curven begrenzt ist, längs deren jeder die Normalen gleiche Neigung gegen die XY -Ebene haben, und von zwei anderen, mit diesen in der Begrenzung abwechselnden Curven, längs deren jeder die Normalen einer bestimmten Verticalebene parallel sind.

Die Punkte, deren Normalen die gemeinsame Neigung ω gegen die XY -Ebene haben, haben als Horizontalprojection die Curve

$$\sin^2 \omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C - A)x^2 - B(C - B)y^2},$$

oder, besser geordnet

$$\frac{A(Atang^2 \omega + C)}{C} x^2 + \frac{B(Btang^2 \omega + C)}{C} y^2 = 1.$$

Es ist bemerkenswerth, dass diese Curve auch der Durchschnitt der Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

mit dem Kegel zweiten Grades ist

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 - (C \cot \omega)^2 z^2 = 0.$$

Lässt man ω von Null bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen, so zieht sich der Kegel, der anfangs mit der XY -Ebene zusammenfällt, enger und enger zusammen und fällt schliesslich mit der Z -Achse zusammen; dabei bedeckt sich die Fläche zweiten Grades mit Zonen von verschwindender Breite; an den beiden Rändern jeder solchen Zone haben die Normalen unendlich wenig verschiedene, längs desselben Randes constante Neigung.

Der Inhalt einer solchen Zone wird gefunden, wenn man in 5. die auf φ bezügliche Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π ausführt; um die Zone φ zu erhalten, an deren Rändern die Normalen die Neigungen ω_0 und ω_1 haben, hat man alsdann die auf ω bezügliche Integration von ω_0 bis ω_1 zu erstrecken; es ist also

$$S = \pm ABC \int_{\omega_0}^{\omega_1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega \, d\omega \, d\varphi}{(BC \cos^2 \omega \cos^2 \varphi + CA \cos^2 \omega \sin^2 \varphi + AB \sin^2 \omega)^2}.$$

Um die erste Integration auszuführen, ersetzen wir

$$\sin^2 \omega \text{ durch } \sin^2 \omega (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

und setzen zur Abkürzung

$$m = B(C \cos^2 \omega + A \sin^2 \omega), \quad n = A(C \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega);$$

dadurch geht das Integral über in

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \cos \omega d\omega \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(m \cos^2 \varphi + n \sin^2 \varphi)^2}.$$

Substituiert man hier $\tan \varphi = t$, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{m \cos^2 \varphi + n \sin^2 \varphi} = 4 \int_0^{\infty} \frac{(1+t^2) dt}{(m + nt^2)^2} = \pi \cdot \frac{m+n}{mn \sqrt{mn}},$$

mithin

$$S = \pm \pi ABC \cdot \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{mn}} \cdot \cos \omega d\omega.$$

Dieses Integral wird leicht auf elliptische reducirt. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, wollen wir voraussetzen, dass A und B gleiche Zeichen haben, dass bei dem Hyperboloiden A dem absoluten Werthe nach grösser als B ist und im Falle des Ellipsoids $A < B < C$ ist. Setzen wir

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{B}{C}},$$

so sind α und β jederzeit real und $\alpha > \beta$. Mit Einführung dieser Werthe erhalten wir nun

$$m = BC(1 - \alpha^2 \sin^2 \omega), \quad n = AC(1 - \beta^2 \sin^2 \omega),$$

$$S = \pm \frac{\pi}{C \sqrt{AB}} \cdot \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\frac{A}{1 - \alpha^2 \sin^2 \omega} + \frac{B}{1 - \beta^2 \sin^2 \omega} \right) \frac{\cos \omega d\omega}{\sqrt{(1 - \alpha^2 \sin^2 \omega)(1 - \beta^2 \sin^2 \omega)}}.$$

Hierin setzen wir

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}},$$

und führen eine neue Variable durch die Gleichung ein

$$\sin \omega = \frac{1}{\alpha} \sin \varphi;$$

hierdurch entsteht

$$S = \pm \frac{\pi}{\alpha C \sqrt{AB}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\frac{A}{1 - \sin^2 \varphi} + \frac{B}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right) \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Wird die Zone von der XY -Ebene an gerechnet, so ist $\varphi_0 = 0$, und daher

$$\begin{aligned} S &= \pm \frac{\pi}{\alpha C \sqrt{AB}} \int_0^{\varphi} \left(\frac{A}{\cos^2 \varphi} + \frac{B}{\Delta^2 \varphi} \right) \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} \\ &= \pm \frac{\pi A}{\alpha k'^2 C \sqrt{AB}} [\tan \varphi \Delta \varphi + k'^2 F(\varphi) - E(\varphi)] \\ &\quad \pm \frac{\pi B}{\alpha k'^2 C \sqrt{AB}} \left[E(\varphi) - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta \varphi} \right], \\ &= \pm \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} \left[[A - (C-B) \cos^2 \varphi] \frac{\tan \varphi}{\Delta \varphi} + AF(\varphi) + (C-A) E(\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält das bemerkenswerthe Resultat: Jede Zone einer centralen Fläche zweiten Grades, längs deren Rändern die Normalen ihre Neigung gegen eine Symmetrieebene der Fläche nicht ändern, lässt sich durch elliptische Integrale ausdrücken.*)

Die halbe Fläche des Ellipsoids erhält man aus der vorstehenden Gleichung, wenn man $\sin \omega = 1$, also

$$\sin \varphi = \alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}$$

setzt; das Verhältniss der Oberfläche des Ellipsoids zu einem Hauptschnitte desselben wird daher, abgesehen von einem in Bezug auf die Achsen algebraischen Theile, durch unvollständige elliptische Integrale erster und zweiter Art berechnet.

Führt man den Werth für φ in die Gleichung für S ein, so erhält man für die ganze Oberfläche des Ellipsoids

$$S = \frac{2\pi}{C} + \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}} [F(\varphi) + (C-A) E(\varphi)].$$

*) Diesen Satz hat SCHLOEHMILCH gegeben; weitere Folgerungen hierzu sowie weitere Anwendungen der elliptischen Integrale auf die Complation von Flächen siehe Compendium der höhern Analysis, 2. Aufl. II. Bd. pag. 346 u. f.

III. Theil. Differentialgleichungen.

§ 23. Allgemeine Sätze über Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Unter einer Differentialgleichung wird eine Gleichung verstanden, in welcher Differentialquotienten abhängiger Variabeln in Bezug auf unabhängige (neben den Variabeln selbst und constanten Grössen) vorkommen.

Ist jede abhängige Veränderliche als Function nur einer Veränderlichen betrachtet, so bezeichnet man die Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung zum Unterschiede von partialen Differentialgleichungen, welche die partialen Differentialquotienten von Functionen mehr als einer Variabeln enthalten.

2. Wenn eine Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln den Differentialquotienten n ter Ordnung der abhängigen Variabeln und keinen höherer Ordnung enthält, so wird sie als Differentialgleichung n ter Ordnung bezeichnet.

Eine Gleichung zwischen zwei Variabeln, die weder den Differentialquotienten n ter Ordnung der unabhängigen Variabeln noch höhere Differentialquotienten enthält, und die so beschaffen ist, dass alle Werthe der Variabeln und des 1., 2. 3., . . . bis n ten Differentialquotienten, die dieser Gleichung, sowie der durch einmalige oder wiederholte Differentiation daraus hervorgehenden Gleichungen genügen, auch einer gegebenen Differentialgleichung n ter Ordnung Genüge leisten, wird als ein Integral der Differentialgleichung n ter Ordnung bezeichnet.

3. Wenn ein Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x, y so beschaffen ist, dass dieselben Systeme von Werthen $x, y, dy:dx$ der Differentialgleichung, sowie auch dem Integrale und dem aus dem Integrale folgenden Werthe von $dy:dx$ genügen, so bezeichnen wir es als das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Durch die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ werden drei Veränderliche x, y, y' mit einander verknüpft; betrachten wir x und y als rechtwinkelige Punktcoordinaten, so können wir die Differentialgleichung geometrisch so deuten, dass durch dieselbe jedem Punkte x, y der Ebene eine oder mehr als eine Richtung y' zugeordnet wird; diese Richtung kann durch eine Gerade T vertreten werden, die durch den Punkt x, y so gezogen wird, dass $\text{tang}(x, T) = y'$; dann ist also durch die Differentialgleichung jedem Punkte der Ebene eine durch den Punkt gehende Gerade oder eine bestimmte Anzahl solcher Geraden zugeordnet.

Ein Integral $\Phi(x, y) = 0$ der Differentialgleichung repräsentirt eine Curve, die in jedem ihrer Punkte von einer zu diesem Punkte durch die Differentialgleichung zugeordneten Geraden berührt wird. Enthält die Gleichung eine willkürliche Constante C , so gehört zu der Gleichung nicht eine individuelle Curve, sondern eine Gruppe von unendlich vielen Curven, die erhalten werden,

indem man C alle Werthe nach einander beilegt. Die Constante kann dann immer so gewählt werden, dass die Curve $\Phi(x, y, C) = 0$ durch einen gegebenen Punkt P_0 geht; man hat dann nur nöthig, C aus der Gleichung zu bestimmen

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0;$$

und umgekehrt: Soll die Gleichung $F(x, y) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O. sein, so muss ihr durch jeden Werth von x und y genügt werden können, sie muss also eine willkürliche Constante enthalten; ist diese so gewählt, dass die Curve $\Phi(x, y) = 0$ einen bestimmten Punkt P enthält, so muss alsdann durch die besondere Beschaffenheit der Function Φ die Tangente der Curve $\Phi(x, y) = 0$ in P mit einer der durch die Differentialgleichung dem Punkte P zugeordneten Geraden zusammenfallen.

Unter einem particulären Integrale versteht man ein Integral einer Differentialgleichung, das aus einem allgemeinen hervorgeht, indem man der willkürlichen Constanten einen besonderen Werth ertheilt.

4. Wir wollen nun zunächst zeigen, wie aus einer Gleichung

$$1. \quad \Phi(x, y, C) = 0,$$

die eine willkürliche Constante C enthält, eine C nicht enthaltende Differentialgleichung I. O. abgeleitet werden kann, von welcher $\Phi(x, y, C)$ das allgemeine Integral ist.

Aus $\Phi(x, y, C) = 0$ erhalten wir durch Differentiation

$$2. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Eliminiren wir nun C aus 1. und 2., so erhalten wir eine Differentialgleichung

$$3. \quad F(x, y, y') = 0.$$

Ist nun das System der Gleichungen 1. und 3. mit dem Systeme 1. und 2. äquivalent und wird C so bestimmt, dass 1. durch einen gegebenen Punkt x, y erfüllt wird, so sind die aus 3. zugeordneten Werthe y' übereinstimmend mit den aus 2. folgenden; also ist 1. das allgemeine Integral von 3.

Wir geben hierzu einige Beispiele.

A. Aus der Gleichung

$$4. \quad (y - C)^2 = 2px$$

folgt durch Differentiation

$$(y - C)y' = p.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von $y - C$ in 4. ein, so erhält man die zu 4. gehörige Differentialgleichung

$$y' = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

B. Die Gleichung $x^2 - 2Cy - C^2 - a^2 = 0$ liefert

$$Cy' = x;$$

setzt man hieraus C in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$(x^2 - a^2)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0,$$

$$\text{oder} \quad y' = \frac{x}{x^2 - a^2} (y + \sqrt{y^2 + x^2 - a^2}).$$

C. Die Gleichung

$$5. \quad (x - 2C)^2 + k^2 Cy^2 = C^2$$

stellt für positive C eine Gruppe von Ellipsen dar, deren Mittelpunkte auf der Abscissenachse liegen; die auf der X -Achse liegende Ellipsenachse ist gleich der Abscisse des Ellipsenmittelpunktes; die andern beiden Scheitel liegen auf der Parabel $\eta^2 = k^2 \xi$; für negative C ergeben sich Hyperbeln.

Aus 5. ergibt sich

$$6. \quad x - 2C + k^2 C y y' = 0.$$

Führt man zunächst den hieraus folgenden Werth

$$x - 2C = -k^2 C y y'$$

in 5. ein, so folgt

$$k^4 C y^2 y'^2 + k^2 y^2 = C.$$

Vergleicht man den hieraus folgenden Werth von C mit dem aus 6. sich ergebenden, so entsteht die zu 5. gehörige Differentialgleichung

$$y'^2 - \frac{y}{x} \cdot y' + \frac{2k^2 y^2 - x}{k^4 x y^2} = 0,$$

oder auf y reducirt

$$y' = \frac{1}{2k^2 xy} (k^2 y^2 + \sqrt{4x^2 - 8k^2 xy^2 + k^4 y^4}).$$

D. Die Gleichung

$$7. \quad 2x - 3Cy + C^3 = 0$$

repräsentirt eine Reihe von Geraden, für welche das Quadrat des Abschnittes auf der X -Achse zum Cubus des Abschnittes auf der Y -Achse das constante Verhältniss $= -27:4$ hat. Aus 7. folgt

$$2 = 3Cy',$$

und hieraus und aus 7. die Differentialgleichung

$$x y'^3 - y'^2 + \frac{27}{4} = 0.$$

E. Aus dem allgemeinen Integrale

$$\varphi = l(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tang } \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1 \right) = C$$

folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\sqrt{x^2 - xy} + 2x}{x(2x - y + \sqrt{x^2 - xy})}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{1}{2x - y + \sqrt{x^2 - xy}}. \end{aligned}$$

Daher ist die zugehörige Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}.$$

5. Die Aufgabe: Zu einer gegebenen Differentialgleichung das allgemeine Integral zu finden (eine Differentialgleichung zu integrieren) ist im Allgemeinen durch die bisher bekannten Functionen (Integrale von Functionen mit inbegriffen) nicht lösbar. Im Allgemeinen werden durch Differentialgleichungen neue Functionen definirt. Es besteht dann die Aufgabe, aus der Differentialgleichung die Eigenschaften der durch sie definirten Function möglichst erschöpfend abzuleiten, und ein Verfahren anzugeben, durch welches die Function annäherungsweise gefunden werden kann.

Wir wollen ein solches Annäherungsverfahren zunächst für Differentialgleichungen erster Ordnung angeben. Um ein Integral der Gleichung

$$1. \quad y' = f(x, y)$$

zu erhalten, gehen wir von einem beliebigen Punkte P_0 aus in der Richtung $y'_0 = f(x_0, y_0)$ um eine kleine Strecke bis zu dem Punkte P_1 , dessen Coordinaten $x_1 = x_0 + \Delta x_0$, $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ sind, wobei also

$$\Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x_0.$$

Hierauf gehen wir von P_1 bis zu dem Punkte P_2 , für den $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, wobei

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1) \Delta x_1,$$

und so fort, so dass wir von jedem Punkte P_i bis zum nächsten P_{i+1} in der Richtung weiter gehen, für welche

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Gehen die Abscissenveränderungen $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2 \dots$ zur Grenze Null über, so geht das Polygon $P_0 P_1 P_2 \dots$ in eine Curve über, und diese Curve ist ein Integral der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

6. Wenn zwei allgemeine Integrale einer Differentialgleichung I. O. nach den willkürlichen Constanten aufgelöst die Gleichungen ergeben

$$1. \quad F = C, \quad f = c,$$

so ist F eine Function von f , d. h. wenn man aus der Gleichung $f(x, y) = f$ die Variable y (oder x) berechnet, indem man das rechts stehende f als neue Variable betrachtet, und diesen Werth in F substituirt, so enthält F dann nur die Variable f , nicht auch x (oder y).

Durch Differentiation folgt aus 1.

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

In beiden Gleichungen kommt keine willkürliche Constante mehr vor, aus beiden muss sich also für alle Werthe von x und y derselbe Werth für y' ergeben; die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

$$2. \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Drückt man y in der angegebenen Weise durch x und f aus und setzt dies in F ein, so erhalte man \mathfrak{F} . Diese Function kann nur f und x enthalten; man hat

$$3. \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Bei dem letzten Differentialquotienten ist y als Function von x und f gedacht und vorausgesetzt, dass sich f nicht ändert; daher bestimmt sich derselbe aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

Wird der hieraus folgende Werth in 3. eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) : \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Da nun f nicht frei von y sein kann, so folgt aus 4. und 2.

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0;$$

also enthält \mathfrak{F} die Variable x nicht, w. z. b. w.*).

*) Statt dieses Beweises hätte auf den Satz Diff. Rechn. § 4, No. 5 verwiesen werden können; wir haben es vorgezogen, einen selbständigen Beweis für den einfachsten Fall jenes allgemeinen Satzes zu geben und bemerken, dass der Gedankengang dieses Beweises sich auch auf den allgemeinen Satz anwenden lässt. Vergl. u. A. BALTZER, Determinanten, § 12.

Aus der Gleichung $\mathfrak{F}(f) = C$ folgt $f = c$, worin c eine willkürliche Constante bezeichnet. Daher ist das allgemeine Integral $F = C$ von $f = c$ nicht wesentlich verschieden. Wir geben dieser Thatsache durch den Satz Ausdruck: Eine Differentialgleichung I. O. hat nur ein allgemeines Integral.

7. Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O. Die Werthe der Constanten C für diejenigen Integralcurven, welche durch einen gegebenen Punkt x, y gehen, erhält man durch Auflösung der Gleichung

$$f(x, y, C) = 0,$$

wenn man darin x und y als gegeben betrachtet. So viele verschiedene Auflösungen diese Gleichung hat, eben so viele verschiedene Integralcurven gehen durch P . Diese Curven haben im Allgemeinen in P keine gemeinsame Tangente. Die n Geraden, welche diese Curven in P berühren, sind die Geraden, welche dem Punkte P durch die gegebene Differentialgleichung zugeordnet sind. Hieraus folgt: Wenn der Differentialquotient y' eine n -deutige Function von x und y ist, so ist auch die Constante des allgemeinen Integrals n -deutig durch x und y bestimmt.

Beispiele. A. Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

folgt sofort das allgemeine Integral

$$lx + ly = c.$$

Hier erscheint c als unendlich vieldeutige Function von x und y . Geht man aber beiderseits zu den Logarithmanden über und bezeichnet c mit C , so erhält man für das allgemeine Integral die neue Gestalt

$$xy = C,$$

und hierin ist C eindeutig durch x und y bestimmt.

B. Für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

haben wir das allgemeine Integral

$$\arcsin x + \arcsin y = c.$$

Hier ist ebenfalls c unendlich vieldeutig. Macht man von dem Additionstheoreme Gebrauch

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

und ersetzt $\sin c$ durch γ , so erhält man

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \gamma.$$

Durch Quadriren ergibt sich, wenn man γ^2 durch C ersetzt,

$$x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = C,$$

und hierin ist C zweideutig, ebenso wie y' zweideutig ist. Hieraus folgt noch die rationale Gleichung

$$C^2 - 2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)C + (x^2 - y^2)^2 = 0.$$

8. Wenn durch eine Differentialgleichung y' n -deutig bestimmt ist, so werden im Allgemeinen für unzählig viele Punkte zwei von den n Werthen zusammenfallen; die Curve dieser Punkte wollen wir als Verzweigungscurve der Differentialgleichung bezeichnen. Ist y' explicite als Function von x und y gegeben

$$y' = \varphi(x, y),$$

so kann man ohne Weiteres die Gleichung der Verzweigungscurve ablesen.

Ist z. B.

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}},$$

so ist die Verzweigungscurve

$$x^2 - y^2 = 0,$$

besteht also aus den beiden Geraden, welche die Winkel der Achsen halbiren.

Bezeichnen g_1, g_2, \dots, g_n die verschiedenen Werthe, welche y' für einen gegebenen Punkt x, y hat, so sind dieselben die Wurzeln der Gleichung.

$$1. \quad F \equiv (y' - g_1)(y' - g_2) \dots (y' - g_n) = 0;$$

dieselbe gebe ausgerechnet

$$2. \quad F \equiv y'^n + A_1 y'^{n-1} + \dots + A_{n-1} y' + A_n = 0.$$

Zwei Wurzeln y' dieser Gleichung fallen zusammen, wenn der Verein von 2. und der folgenden Gleichung besteht

$$3. \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = n y'^{n-1} + (n-1) A_1 y'^{n-2} + \dots + A_{n-1} = 0.$$

Die Bedingung für den Verein von 2. und 3. erhält man nach SYLVESTER's Methode, indem man 2. und 3. der Reihe nach mit $y'^{n-2}, y'^{n-1}, \dots, y', 1$, bez. $y'^{n-1}, y'^{n-2}, \dots, y', 1$ multiplicirt, und aus diesen $2n-1$ Gleichungen die linear darin vorkommenden Grössen $y'^{2n-2}, y'^{2n-1}, \dots, y', 1$ in bekannter Weise eliminirt. Man erhält

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ & 1 & A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 1 & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ n(n-1)A_1 & (n-2)A_2 & \dots & A_{n-1} & & & & & \\ n & (n-1)A_1 & \dots & 2A_{n-2} & A_{n-1} & & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & 1 & (n-1)A_1 & \dots & A_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Verzweigungscurve.

9. Die Constante des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung I. O. sei für jeden Punkt der Ebene n -deutig bestimmt; ihre Werthe für den Punkt x, y seien $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Bildet man die Gleichung

$$(C - \gamma_1)(C - \gamma_2) \dots (C - \gamma_n) = 0.$$

so sind die Coefficienten eindeutige Functionen von x und y . Es giebt unzählig viele Punkte der Ebene, für welche zwei Wurzeln dieser Gleichung zusammenfallen; die Curve dieser Punkte nennen wir die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrals.

Die Gleichung für C ergebe

$$\Phi \equiv C^n + \alpha_1 C^{n-1} + \alpha_2 C^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0;$$

alsdann erhält man die Gleichung dieser Verzweigungscurve in Form einer verschwindenden Determinante, wenn man C nach SYLVESTER's Methode aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{dC} = 0.$$

Diese Curve hüllt entweder die Curven Φ ein und hat in jedem ihrer Punkte mit einer der Curven Φ eine gemeinsame Tangente, oder sie enthält die Doppelpunkte des Curvensystems

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

(Differentialrechn. § 11, No. 6).

Hieraus folgt sofort: Ist die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales die Einhüllende der Curven $\Phi = 0$, so genügt sie in allen ihren Punkten der Differentialgleichung.

Ist die Verzweigungscurve dagegen die Curve der Doppelpunkte des Curvensystems $\Phi = 0$, so genügt sie im Allgemeinen der Differentialgleichung nicht. Denn im Allgemeinen ist für einen Doppelpunkt einer Curve $\Phi = 0$ der aus der Differentialgleichung folgende Werth von y' nicht unbestimmt, wie der aus dem allgemeinen Integrale folgende, sondern bestimmt; man kann nun nicht den Schluss ziehen, dass dieser Werth mit dem aus der Gleichung der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales folgenden übereinstimmt.

Wenn die Gleichung der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung genügt, so ist im Allgemeinen für die Punkte derselben C nicht constant; sie ist alsdann kein particuläres Integral, sondern wird als singuläres Integral der Differentialgleichung bezeichnet.

10. Unabhängig von geometrischen Betrachtungen untersuchen wir nun auf analytischem Wege die Existenz eines singulären Integrales, d. i. einer Gleichung, die der Differentialgleichung genügt, ohne ein particuläres Integral zu sein.

Es sei $f(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral einer Differentialgleichung I. O.; wir machen dabei die ausdrückliche Voraussetzung, dass die Function f die Grössen x, y und C nur in eindeutigen Verbindungen enthält.

Jede beliebige Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ kann auf die Form $f(x, y, C) = 0$ gebracht werden, wenn man C nicht als Constante, sondern als Function von x und y betrachtet, gemäss der Gleichung

$$f(x, y, C) \equiv \varphi(x, y).$$

Die Frage nach einem singulären Integrale können wir nun so stellen: Kann C als Function von x und y so gewählt werden, dass die Gleichung

$$1. \quad f(x, y, C) = 0$$

der Differentialgleichung genügt?

Durch Differentiation folgt aus 1.

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0.$$

Wenn 1. der Differentialgleichung genügt, so wird 2. durch einen der aus der Differentialgleichung folgenden Werthe von y' erfüllt, sobald man C in 2. durch x und y gemäss der Gleichung 1. ersetzt. Unter dieser Voraussetzung erfüllt aber jedes der Differentialgleichung entsprechende y' die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Daher reducirt sich 2. auf

$$\frac{\partial f}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn entweder

$$3. \quad \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' = 0,$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0.$$

Der Bedingung 3. entsprechen solche Aenderungen von x und y , bei denen C constant bleibt; sie führt somit zum allgemeinen Integrale. Für ein Integral, das in dem allgemeinen nicht enthalten ist, ergiebt sich daher die Bedingung

$$4. \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0.$$

Es kann der Fall eintreten, dass den Gleichungen

$$f(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

durch einen constanten Werth von C genügt werden kann; in diesem Falle führt die Elimination von C aus beiden Gleichungen nicht auf ein singuläres, sondern auf ein particuläres Integral.

Eine Ausnahme hiervon tritt in den zahlreichen Fällen ein, wenn für alle Punkte der durch Elimination von C aus

$$f(x, y, C) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

sich ergebenden Curve (für welche wir den Namen Verzweigungscurve auch dann beibehalten wollen, wenn f keine algebraische Function von C ist) die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Denn dann erfüllen die Tangenten der Verzweigungscurve zwar die Gleichung 2., es lässt sich aber hieraus nicht schliessen, dass sie der Differentialgleichung genügen.

Man hat daher nach der Elimination von C aus $f = 0$ und $\partial f : \partial C = 0$ jedesmal erst nachzusehen, ob die resultirenden Curven, bez. welche von ihnen, der Differentialgleichung genügen.

11. Es sei y' eine n -deutige Function von x und y ; alsdann ist auch (No. 7) die Constante des allgemeinen Integrales n -deutig durch x und y bestimmt. Wenn für einen Punkt P zwei von den Werthen C unendlich wenig verschieden sind, so fallen auch die Tangenten an diese Curven in P unendlich nahe zusammen. Dies sind aber zwei dem Punkte P durch die Differentialgleichung zugeordnete Richtungen. Wir schliessen daher: Die Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales ist zugleich Verzweigungscurve der Differentialgleichung.

Hiervon tritt eine Ausnahme ein, wenn ein Theil der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales eine Parallele zur Y -Achse ist; denn für jeden Punkt dieser Geraden ist $y' = \pm \infty$, es fallen also für diese Punkte nicht nothwendig zwei Werthe von y' zusammen.

12. Ein direkter Nachweis für den Zusammenhang der beiden Verzweigungscurven wird zugleich Auskunft darüber geben, ob die Verzweigungscurve der Differentialgleichung aus Curven zusammengesetzt sein kann, die nicht zugleich der Verzweigungscurve des allgemeinen Integrales angehören. Die Differentialgleichung wird aus dem allgemeinen Integrale

$$1. \quad \Phi(x, y, C) = 0$$

erhalten, indem man C aus 1. und aus

$$2. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' = 0$$

eliminiert; das Resultat dieser Elimination werde mit (Φ) bezeichnet. Um die Verzweigungscurve der Differentialgleichung zu erhalten, hat man hierauf y' aus den Gleichungen

$$3. \quad (\Phi) = 0 \text{ und } \frac{\partial (\Phi)}{\partial y'} = 0$$

zu eliminieren. Nun ist

$$4. \quad \frac{\partial (\Phi)}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial y'}.$$

Die Gleichung 4. zerfällt in die beiden Gleichungen

$$5. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0,$$

$$6. \quad \frac{\partial C}{\partial y'} = 0.$$

Die Gleichungen 1. und 5. ergeben die Verzweigungcurve des allgemeinen Integrals. Die Gleichung 6. sagt aus, dass die durch 2. definirte Function C von y' nicht abhängt; sie ist daher nicht statthaft.

Wir fassen die Ergebnisse dieser Untersuchungen in folgenden Satz zusammen: Ist $F(x, y, y') = 0$ eine Differentialgleichung I. O. und $\Phi(x, y, C) = 0$ das allgemeine Integral derselben und sind x, y, y' , bez. x, y, C in den Functionen F und Φ nur in eindeutigen Verbindungen erhalten, so kann die Resultante, die durch Elimination von C aus

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

hervorgeht, höchstens um einen Faktor, der eine ganze Function von x allein ist, von der Resultante verschieden sein, welche durch Elimination von y' aus den Gleichungen

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

entsteht. Wenn die erstere Resultante der Differentialgleichung genügt, so ist sie das singuläre Integral der Differentialgleichung, soweit sie nicht durch Specialisirung der Constanten C aus dem allgemeinen Integrale hervorgeht.

13. Für die Ableitung des singulären Integrales haben wir daher folgende Wege:

a) Ist das allgemeine Integral auf C reducirt, so bilde man die Bedingung dafür, dass zwei Werthe für C zusammenfallen.

b) Sind in dem Integrale $\Phi(x, y, C) = 0$ die Grössen x, y, C nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so eliminire man C aus

$$\Phi = 0, \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

c) Ist die Differentialgleichung auf y' reducirt, so bilde man die Bedingung dafür, dass zwei Werthe von y' zusammenfallen.

d) Sind in der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ die Grössen x, y, y' nur in eindeutigen Verbindungen enthalten, so eliminire man y' aus

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Die auf einem dieser vier Wege erhaltenen Gleichungen hat man darauf hin zu prüfen, ob sie der Differentialgleichung genügen; soweit diese Bedingung erfüllt ist, hat man ein Integral der Differentialgleichung gefunden; dasselbe ist singulär, soweit es nicht durch Specialisirung der Constanten aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden kann. Nach Anwendung der Methoden c) und d) hat man noch nachzusehen, ob die Gleichung $x = \gamma$ für irgend einen constanten Werth γ der Differentialgleichung als singuläres oder particuläres Integral genügt.*)

14. Wir betrachten als Beispiele die in No. 4 aufgestellten Differentialgleichungen.

A. Die Differentialgleichung No. 4, 6

*) Auch ohne Kenntniss des allgemeinen Integrales kann man entscheiden, ob man nach den Methoden c) oder d) zu einem singulären oder particulären Integrale gelangt ist. Vergl. u. A. E. PRIX, Ueber singuläre Lösungen der Differentialgleichungen I. O. Progr. d. Realschule zu Annaberg i. S. 1876.

$$F \equiv y'^2 - \frac{p^2}{4x} = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv (y - C)^2 - 2px = 0.$$

Man erhält

$$\frac{dF}{dy'} = 2y', \quad \frac{d\Phi}{dC} = -2(y - C).$$

Die Verzweigungscurven sind: für die Differentialgleichung

$$V \equiv -\frac{p^2}{x} = 0;$$

für das allgemeine Integral

$$W \equiv \begin{vmatrix} 1 & -2yy^2 & -2px \\ 2 & -2y & 0 \\ 0 & 2 & -2y \end{vmatrix} \equiv -8px = 0.$$

Das singuläre Integral ist $x = 0$.

B. Zu der Differentialgleichung

$$y' \equiv \frac{x}{x^2 - a^2} (y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2})$$

gehört das allgemeine Integral

$$y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = C.$$

Aus beiden Gleichungen folgt das Integral

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0;$$

dasselbe ist singulär, da für die Punkte desselben $C = y$, also variabel ist.

C. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F \equiv y'^2 - \frac{y}{x} y' + \frac{2k^2 y^2 - x}{k^4 x y^2} = 0$$

ist

$$\Phi \equiv 3C^2 - (4x - k^2 y^2)C + x^2 = 0.$$

Die Bedingungen für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bez. C sind

$$\frac{1}{4k^4 xy^2} (8k^2 xy^2 - 4x^2 - k^4 y^4) = 0,$$

bez.

$$8k^2 xy^2 - 4x^2 - k^4 y^4 = 0.$$

Die letztere Gleichung ist das singuläre Integral. Man überzeugt sich leicht, dass es der Differentialgleichung genügt. Durch Differentiation folgt nämlich

$$y' = \frac{2(x - k^2 y^2)}{k^2 y(4x - k^2 y^2)}.$$

Ferner folgt aus dem singulären Integrale

$$k^2 y^2 = 2x(2 + \sqrt{3}), \quad x - k^2 y^2 = -2x\sqrt{3}, \\ x - k^2 y^2 = -x(3 + 2\sqrt{3}).$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergibt sich

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Derselbe Werth folgt aus der Differentialgleichung für die Punkte, welche dem singulären Integrale genügen.

D. Die Differentialgleichung

$$F \equiv xy'^3 - y'^2 + \frac{27}{4} = 0.$$

hat das allgemeine Integral

$$\Phi \equiv C^3 - 3Cy + 2x = 0.$$

Die Bedingung für das Zusammenfallen zweier Wurzeln y' bez. C ,

$$x^2 - y^3 = 0$$

ist das singuläre Integral.

E. Die Differentialgleichung

$$y' = 2 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$$

hat das allgemeine Integral

$$\varphi = l(\sqrt{x^2 - xy} - y + 2x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc tang} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \sqrt{1 - \frac{y}{x}} + 1 \right) = C.$$

Für die Verzweigungscurve

$$x - y = 0$$

ist

$$y' = 1,$$

während für die Punkte derselben aus der Differentialgleichung folgt

$$y' = 2.$$

Daher ist in diesem Falle die Verzweigungscurve kein Integral der Differentialgleichung.

F. Hat die Differentialgleichung die Form

$$y' = F + \sqrt{\Psi}$$

wobei F und Ψ rationale Functionen von x und y sind, so ist ihre Verzweigungscurve

$$\Psi = 0.$$

Der aus dieser Gleichung folgende Werth von y' stimmt im Allgemeinen nicht mit dem aus der Differentialgleichung unter der Bedingung $\Psi = 0$ folgenden Werthe

$$y' = F$$

überein; die Verzweigungscurve ist daher für Differentialgleichungen dieser Form im Allgemeinen kein Integral. Das vorige Beispiel bildet hiervon einen besonderen Fall. Ausnahmen bilden u. A. alle Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral die Form hat

$$2. \quad f + \sqrt{\varphi} = C,$$

wobei f und φ rationale Functionen sind

Zu 2. gehört die Differentialgleichung

$$y' = - \frac{2 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sqrt{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{2 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sqrt{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

welche auf die Form 1. gedacht wird, indem man den Nenner rational macht.

§ 24. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

1. Wir wenden uns nun zur Integration der Differentialgleichungen I. O.

Eine allgemeine Methode, durch welche die Herstellung des Integrals in geschlossener Form geleistet oder auf gewöhnliche Integrationen zurückgeführt werden könnte, giebt es nicht; wir müssen uns begnügen, eine Reihe von Fällen anzugeben, in welchen die Integration ausgeführt werden kann, und schliesslich Methoden zu entwickeln, nach welchen das Integral in Form einer unendlichen Reihe gewonnen wird.

Das Integral der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ ist sofort gefunden,

wenn die Variabeln getrennt sind, M und N nur eine Function von y ist; schreibe $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ für M und N , so haben wir

$$\varphi(x) dx + \psi(y) dy$$

und erhalten hieraus ohne Weiteres

$$\int \varphi(x) dx + \int \psi(y) dy$$

Willkürliche Constanten bei den Integralen wegen der rechts stehenden Constanten nicht zu setzen.

Beispiel. Aus $2(a+x) dx$ folgt das allgemeine Integral $(a+x)^2$.

2. Wenn die Variabeln nicht getrennt werden können, so ist die Division oder Multiplication mit einer Function X_1 oder X_2 zur Trennung herbeizuführen. So ergiebt sich

1. $X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy$ durch Division mit $X_2 Y_1$

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy$$

Sind nun X_1, X_2 Functionen von x allein, so ist das allgemeine Integral von

$$\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_2}{Y_1} dy$$

Beispiele. A. $xy^2 dx - (a-x) dy$

Hieraus folgt $\frac{x}{a-x} dx - \left(\frac{1}{y} \right) dy$

daher ist das allgemeine Integral

$$ly - al(a-x) =$$

B. $(1+y^2) dx + (1+x^2) dy$

Diese Gleichung ergiebt $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$

daher ist das allgemeine Integral

C. $\frac{\arctan x + \arctan y}{\sqrt{1-y^2}} dx + \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$

Hieraus folgt $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

daher ist das allgemeine Integral

$$\arcsin x + \arcsin y$$

Giebt man der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x}$$

so erkennt man, dass die singulären Lösungen

$$(1-x^2)(1-y^2) = 0$$

Alle vier hierin enthaltenen Geraden sind keine durch Specialisirung aus dem allgemeinen Integral zu erhaltenden, sondern alle singulären Lösungen.

3. Eine Reihe von einfachen geometrischen Gleichungen erster Ordnung, in denen die Variabeln nicht getrennt werden können.

A. Die Curven zu bestimmen, bei denen die Function $\varphi(y)$ der Ordinate ist.

Aus der Bedingung $yy' = \varphi(y)$

folgt

$$\int \frac{y dy}{\varphi(y)} = x + C.$$

B. Soll die Subnormale eine Function $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist die Differentialgleichung

$$yy' = \varphi(x),$$

und daher die Gleichung der gesuchten Curve

$$y^2 = 2 \int \varphi(x) dx + C.$$

C. Wird verlangt, dass die Subtangente eine Function $\varphi(y)$ der Ordinate ist, so hat man

$$\frac{y}{y'} = \varphi(y),$$

und daher das allgemeine Integral

$$\int \frac{\varphi(y) dy}{y} = x + C.$$

D. Soll die Subtangente eine Function $\varphi(x)$ der Abscisse sein, so ist

$$\frac{y}{y'} = \varphi(x),$$

also

$$ly = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C.$$

E. Soll die Tangente eine Function der Ordinate sein, so ist

$$\frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} = \varphi(y);$$

hieraus folgt

$$y' = \frac{y}{\sqrt{\varphi^2 - y^2}}.$$

Das allgemeine Integral ist

$$\int \frac{\sqrt{\varphi^2 - y^2}}{y} dy = x + C.$$

F. Auf ähnliche, einfachste, durch Trennung der Variabeln sofort zu integrierende Differentialgleichungen führen die Aufgaben: Eine Curve zu bestimmen, in welcher die Polarsubtangente, die Polarsubnormale, oder der Winkel zwischen Tangente und Radius vector eine gegebene Function des Radius vector oder des Polarwinkels ist.

G. Soll das von einem Curvenbogen, der Abscissenachse einer festen Ordinate und der Ordinate eines laufenden Curvenpunkts begrenzte Segment einer Curve eine gegebene Function $\varphi(y)$ der Endordinate sein, so hat man die Differentialgleichung

$$y dx = \varphi'(y) dy,$$

woraus folgt

$$\int \frac{\varphi'(y)}{y} dy = x + C.$$

Wird verlangt, dass das Segment eine gegebene Function der Endabscisse sei, so führt die Aufgabe auf keine Differentialgleichung.

4. Wenn in der Gleichung

$$M dx + N dy = 0$$

M und N ganze homogene Functionen von x und y vom Grade n sind, so gelingt die Trennung der Variabeln durch die Substitution $y = zx$. Da in jedem Gliede von M und N die Anzahl der variablen Faktoren n ist, so folgt, dass nach der Substitution M und N in Produkte von x^n mit ganzen

Functionen von z übergehen. Werden dieselben mit $M(z)$ und $N(z)$ bezeichnet, und bemerkt man, dass

$$dy = z dz + x dz,$$

so erhält man für z und x die Differentialgleichung

$$M(z) dx + N(z) (z dx + x dz) = 0.$$

Nach der Trennung der Variabeln folgt hieraus das allgemeine Integral

$$\int x = - \int \frac{N(z)}{M(z) + z N(z)} dz + C.$$

Durch die Substitution folgt aus der gegebenen Differentialgleichung

$$y' = \frac{M(z)}{N(z)} = M\left(\frac{y}{x}\right) : N\left(\frac{y}{x}\right).$$

Umgekehrt: Wenn es gelingt, y' als Function von $y:x$ darzustellen; so werden die Variabeln durch die Substitution $y = zx$ getrennt, denn ist

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

so liefert die Substitution

$$z dx + x dz = \varphi(z) dx;$$

daher ist das allgemeine Integral

$$\int x = - \int \frac{dz}{z + \varphi(z)} + C.$$

Hierin hat man nach der Integration z durch $y:x$ zu ersetzen.

Differentialgleichungen dieser Art werden als homogene Differentialgleichungen bezeichnet.

5. Dieselbe Substitution führt auch bei der nicht homogenen Differentialgleichung zum Ziele

$$y' = \frac{y}{x} + f(x) \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Denn man erhält

$$x dz = f(x) \varphi(z) dx,$$

und daher das allgemeine Integral

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = \int \frac{f(x)}{dx} dx + C.$$

6. Beispiele. A. Die Curve zu bestimmen, bei welcher die Tangente der Geraden parallel ist, die den Winkel des Radius vector mit der Ordinatenachse halbirt. Bezeichnet ψ den halben Polarwinkel, so soll sein

$$y' = \tan(45^\circ + \psi) = \frac{1 + \tan \psi}{1 - \tan \psi} = \frac{\sqrt{1 + \cos 2\psi} + \sqrt{1 - \cos 2\psi}}{\sqrt{1 + \cos 2\psi} - \sqrt{1 - \cos 2\psi}} = \frac{1 + \sin 2\psi}{\cos 2\psi}.$$

Daher hat man die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x} (y + \sqrt{y^2 + x^2}).$$

Die Substitution $y = zx$ liefert

$$xz' + z = z + \sqrt{z^2 + 1},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dx}{x},$$

hieraus folgt das allgemeine Integral

$$\int (z + \sqrt{z^2 + 1}) = \int x + C.$$

Denkt man sich C als Logarithmus einer andern Constanten, die wieder mit C bezeichnet werden kann, und geht dann von den Logarithmen zu den Logarithmanden über, so erhält man

$$z + \sqrt{z^2 + 1} = Cx.$$

Substituirt man rückwärts $z = y : x$, so ergibt sich

$$Cx^2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Hieraus folgt die rationale Gleichung

$$C^2 x^2 - 2Cy = 1.$$

Ersetzt man hier C durch $1 : C$, so erhält man das allgemeine Integral

$$C^2 + 2Cy = x^2,$$

in Uebereinstimmung mit No. 4, 7.

B. Die Strecke OS_2 , welche eine Curventangente von der Ordinatenachse abschneidet, ist bekanntlich $y - xy'$; ist μ der Winkel, unter welchem diese Strecke von der Projection P' des Curvenpunkts, auf die Abscissenachse aus gesehen wird, so ist $\tan \mu = y : x - y'$. Wird nun die Curve verlangt, deren Tangente in P normal zu $P'S_2$ ist, so ergibt sich für dieselbe die Differentialgleichung

$$1. \quad y' = 1 : \left(\frac{y}{x} - y' \right).$$

Hieraus folgt für y' eine quadratische Gleichung, und durch Auflösung derselben

$$2. \quad y' = \frac{y}{2x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{4x^2}}.$$

Die Substitution $y = zx$ führt zu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{4} - \frac{z}{2}}},$$

oder, wenn rechts der Nenner rational gemacht wird,

$$\frac{dx}{x} = \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} + \frac{z}{2} \right) dz.$$

Die Integration ergibt

$$lx = \frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} + l \left(\frac{z}{2} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{4}} \right) + C.$$

Hieraus folgt schliesslich, wenn C geeignet geändert wird:

$$3. \quad 4x^2 l(y - \sqrt{4x^2 + y^2}) = y^2 + y \sqrt{4x^2 + y^2} + C.$$

Aus 2. folgt die Verzweigungscurve für y'

$$4. \quad 4x^2 + y^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt $y' = -4x : y$, aus 2. ergibt sich mit Rücksicht auf 4. $y' = y : 2x$; vergleicht man beide Werthe, so erhält man $8x^2 + y^2 = 0$; da diese Gleichung mit 4. nicht übereinstimmt, so ist 4. kein Integral der Differentialgleichung.

7. Um die Differentialgleichung

$$1. \quad (ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

in eine homogene zu verwandeln, substituiren wir

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta.$$

Wir erhalten

$$ax + by + c = au + bv + a\alpha + b\beta + c,$$

$$a'x + b'y + c' = a'u + b'v + a'\alpha + b'\beta + c'.$$

Werden nun α und β aus dem Systeme bestimmt

$$2. \quad a\alpha + b\beta = -c,$$

$$a'\alpha + b'\beta = -c',$$

so erhält man die transformirte homogene Gleichung

$$3. \quad (au + bv)du + (a'u + b'v)dv = 0.$$

Die Gleichungen 2. führen auf unendliche Werthe von α und β , wenn

führen, dass man y durch das Produkt uv zweier noch unbestimmter Functionen von x ersetzt. Hierdurch erhält man die Gleichung

$$1. \quad uv' + vu' + Puv = Q.$$

Bestimmt man nun u aus der Gleichung

$$2. \quad u' + Pu = 0,$$

so bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung übrig

$$3. \quad uv' = Q.$$

Da es bei der Integration von 2. nur darauf ankommt, irgend eine dieser Gleichung entsprechende Function von x zu erhalten, so kann man der willkürlichen Constanten des allgemeinen Integrals von 2. einen solchen besonderen Werth geben, dass das Integral möglichst einfach wird. Die willkürliche Constante des allgemeinen Integrals der Gleichung 1. tritt erst mit der Integration von 3. ein.

Die Gleichung 2. stimmt mit No. 8, 1 für den Fall $Q = 0$, überein; und die Gleichung 3. ist von der Gleichung No. 8, 4 nicht verschieden, wenn man y durch u und z durch v ersetzt.

11. Die nichtlineare Differentialgleichung

$$1. \quad f'(y) \frac{dy}{dx} + f(y)P = Q,$$

worin P und Q wieder Functionen von x allein sind, lässt sich in eine lineare verwandeln; setzt man nämlich $f(y) = z$, so ist $f'(y) dy = dz$ und man erhält

$$z' + Pz = Q.$$

Auf diese Gleichung führt z. B. die folgende

$$2. \quad y' + Py = Qy^m.$$

Dividirt man nämlich durch $-y^m : (m-1)$, so erhält man

$$-(m-1)y^{-m}y' - (m-1)Py^{-(m-1)} = -(m-1)Q;$$

und diese Gleichung stimmt mit 1. überein, wenn man $f(y)$, P , Q durch $y^{-(m-1)}$, $-(m-1)P$, $-(m-1)Q$ ersetzt.

12. Das allgemeine Integral der nicht linearen Gleichung*)

$$y' + Py = Qy^2 + R$$

lässt sich angeben, wenn man ein particuläres Integral $y = u$ dieser Gleichung kennt. Setzt man nämlich das allgemeine Integral in der Form voraus

$$y = u + v,$$

worin v eine noch zu bestimmende Function bezeichnet, so hat man für u und v die Gleichung

$$u' + v' + Pu + Pv = Qu^2 + 2Quv + Qv^2 + R.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$u' + Pu = Qu^2 + R,$$

daher bleibt zur Bestimmung von v die Gleichung

$$v' + (P - 2Qu)v = Qv^2.$$

Diese Gleichung fällt unter No. 11, 2 für $m = 2$.

Beispiele. A. Der Gleichung

$$y' + Py = Qy^2 + 1 + Px - Qx^2$$

wird durch das particuläre Integral $y = x$ genügt. Daher ist jetzt $u = x$, und für v hat man die Gleichung

$$v' + (P - 2Qx)v = Qv^2.$$

$$B. \quad y' + Py = y^2 + P',$$

wobei P' für $dP:dx$ gesetzt ist.

*) STURM, Cours d'Analyse, 5. éd., t. II, Paris 1877, pag. 51.

Der Gleichung wird durch $y = P$ genügt; daher ist das allgemeine Integral $y = P + v$, wenn v durch die Gleichung bestimmt wird

$$v' - Pv = Qv^2.$$

13. Die Gleichung

$$1. \quad xy' - ay + by^2 = cx^n$$

ist unter der Form No. 12, 1 enthalten. Setzen wir versuchsweise $y = kx^{\frac{n}{2}}$, so erhalten wir

$$\frac{n}{2} kx^{\frac{n}{2}} - akx^{\frac{n}{2}} + bk^2x^n = cx^n.$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt, wenn

$$n = 2a, \quad k = \sqrt{c:b}.$$

Im Falle $n = 2a$ kann also nach der in No. 12 angegebenen Methode das allgemeine Integral der Gleichung 1. gefunden werden.

Durch geeignete Substitutionen kann man in einer Reihe von Fällen Differentialgleichungen von der Form 1., in welchen n von $2a$ verschieden ist, auf eine Gleichung derselben Form zurückführen, in welcher $n = 2a$ ist.

Setzt man nämlich in 1.

$$y = A + \frac{x^n}{y_1},$$

worin y_1 eine neue Variable ist, so erhält man

$$2. \quad -aA + bA^2 + (n - a + 2bA) \frac{x^n}{y_1} + b \frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2} y_1' = cx^n.$$

Wir wählen nun A so, dass $-aA + bA^2 = 0$; also entweder $A = a:b$, oder $A = 0$.

Die Annahme $A = a:b$ ergibt die Transformation

$$3. \quad y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1},$$

und die transformirte Gleichung

$$(n + a) \frac{x^n}{y_1} + b \frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2} y_1' = cx^n.$$

Durch Multiplication mit $y_1^2 : x^n$ ergibt sich hieraus

$$4. \quad xy_1' - (a + n)y_1 + cy_1^2 = bx^n.$$

Diese Gleichung geht aus 1. hervor, wenn man a, b, c der Reihe nach durch $(a + n), c, b$ ersetzt.

Wendet man nun auf 4. die Substitution an

$$5. \quad y = \frac{a + n}{c} + \frac{x^n}{y_1},$$

die aus 3. hervorgeht, wenn man a und b durch $a + n$ und c ersetzt, so erhält man

$$xy_1' - (a + 2n)y_1 + by_1^2 = cx^n;$$

hierauf wendet man wieder die der Substitution 3. entsprechende an u. s. f.; nach k Transformationen erhält man die Gleichung

$$\text{wenn } k \text{ ungerade ist: } xy_1' - (a + kn)y_1 + cy_1^2 = bx^n;$$

$$\text{wenn } k \text{ gerade ist: } xy_1' - (a + kn)y_1 + by_1^2 = cx^n.$$

Kann man nun die ganze Zahl k so wählen, dass $n = 2(a + kn)$, ist also $(n - 2a) : 2n$ eine ganze Zahl, so kann das allgemeine Integral der Gleichung 1. nach den gegebenen Methoden gefunden werden.

Die andere Annahme $A = 0$ liefert die Substitution $y = x^n : y_1$ und die transformirte Gleichung

$$(n - a) \frac{x^n}{y_1} + b \frac{x^{2n}}{y_1} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2} y_1' = cx^n.$$

Multipliziert man mit $y_1^2 : x^n$, so entsteht

$$6. \quad xy_1' - (n - a)y_1 + cy_1^2 = bx^n,$$

also die Gleichung 1., wenn man a, b, c der Reihe nach durch $n - a, c, b$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung der Substitution ergibt sich schliesslich

$$\text{wenn } k \text{ ungerade ist: } xy_1' - (kn - a)y_1 + cy_1^2 = bx^n;$$

$$\text{wenn } k \text{ gerade ist: } xy_1' - (kn - a)y_1 + by_1^2 = cx^n.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung 1. integrabel ist, wenn k so bestimmt werden kann, dass $2(kn - a) = n$, wenn also $(n + 2a) : 2n$ eine ganze Zahl ist.

Wir sehen somit: Das allgemeine Integral der Gleichung 1. kann gefunden werden, wenn $(n \pm 2a) : 2n$ eine positive ganze Zahl ist.

Die RICCATI'sche Differentialgleichung

$$y' + by^2 = cx^m$$

kann auf die Form der Gleichung 1. gebracht werden; setzt man nämlich $y = z : x$, so erhält man aus 7.

$$xz' - z + bz^2 = cx^{m+2}.$$

Die RICCATI'sche Gleichung ist somit integrabel, wenn entweder $(m + 4) : (2m + 4)$ oder $m : (2m + 4)$ eine positive ganze Zahl ist.

14. Die Integration der Differentialgleichung

$$1. \quad Mdx + Ndy = 0,$$

gelingt sofort, wenn die linke Seite das vollständige Differential

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

einer Function $\varphi(x, y)$ ist, das allgemeine Integral ist alsdann

$$\varphi(x, y) = C.$$

Es fragt sich nun zunächst, wie man erkennt, ob ein Differentialausdruck $Mdx + Ndy$ ein vollständiges Differential ist, und wie man von dem vollständigen Differentiale die Function φ ableitet.

Ist $Mdx + Ndy$ das vollständige Differential von $\varphi(x, y)$, so ist

$$1. \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Hieraus folgt sofort die nothwendige Bedingung

$$2. \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

denn beide Seiten der Gleichung sind nach 1. gleich $\partial^2 \varphi : \partial x \partial y$. Die Bedingung 2. ist aber auch hinreichend. Hat man nämlich eine Function ψ , welche der Gleichung genügt $M = \partial \psi : \partial x$, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

also können N und $\partial \psi : \partial y$ nur um eine Grösse verschieden sein, die x nicht enthält, mithin eine bestimmte Function von y allein ist. Bezeichnet man dieselbe mit Y , und setzt

$$\varphi = \psi + \int Y dy,$$

$$\text{so ist} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Eine Function ψ ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung $M = \partial \psi : \partial x$ zu

$$\psi = \int M dx,$$

wo bei der Integration das in M enthaltene y als constant zu betrachten ist; es genügt einen particularen Werth dieses Integrals zu nehmen.

auktion
(x^1

ie S
= \int
ich

Int
Di
ner
erv
ntia

meit
erei

, 2.

ebt

iffin
hun
iffe
tegi
defi

di

ne
in 1
All

I. O. durch Aufsuchung eines integrierenden Faktors nicht lösbar; vielmehr wird man umgekehrt die partielle Differentialgleichung 1. für im Wesentlichen gelöst erachten, nachdem man ihren Zusammenhang mit dem allgemeinen Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung I. O. erkannt hat, und hierauf werden wir bei Gelegenheit der partialen Differentialgleichungen zurückkommen.

Doch bleibt trotzdem das Studium der integrierenden Faktoren auch für die Integration von Differentialgleichungen I. O. von hoher Bedeutung; denn alle Integrationsmethoden lassen sich auf die eine Methode, einen integrierenden Faktor zu bestimmen, reduciren, — und indem man umgekehrt von bestimmten Formen integrierender Faktoren ausgeht, kann man Gruppen integrierender Differentialgleichungen aufstellen. Wir werden später hierzu Beispiele geben.

17. Dem allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung I. O. kann man unzählig viele verschiedene Formen geben. So hat z. B. $3x^2 dx + 2y dy = 0$ das allgemeine Integral $x^3 + y^2 = C$; dasselbe kann aber auch durch

$$(x^3 + y^2)^n = C, \quad l(x^3 + y^2) = C, \quad \sin(x^3 + y^2) = C \text{ u. s. w.}$$

ersetzt werden. Diesen verschiedenen Formen des Integrals entspringen verschiedene Formen des integrierenden Faktors; wir wollen nun nachweisen, wie man aus einem integrierenden Faktor die allgemeine Form finden kann, unter der jeder integrierende Faktor derselben Gleichung enthalten ist.

Ist v ein integrierender Faktor von

$$1. \quad Mdx + Ndy = 0,$$

so ist

$$2. \quad vMdx + vNdy = d\varphi,$$

und $\varphi = c$ ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Multipliciren wir 2. mit einer willkürlichen Function von φ , so erhalten wir

$$vF(\varphi)(Mdx + Ndy) = F(\varphi)d\varphi.$$

Hierin ist die rechte Seite das vollständige Differential von

$$\int F(\varphi) d\varphi,$$

also ist auch die linke Seite ein vollständiges Differential, mithin ist $vF(\varphi)$ ein integrierender Faktor von 1. Wir haben daher: Ist v ein integrierender Faktor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, und $\varphi = c$ das allgemeine Integral, so ist das Product aus v und einer willkürlichen Function von φ ebenfalls ein integrierender Faktor.

Es sei nun ausser v auch V ein integrierender Faktor; um nachzuweisen, dass $V = vF(\varphi)$, zeigen wir, dass der Quotient $V:v$ eine Function von φ ist. Die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Determinante

$$R \equiv \frac{\partial(V:v)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial(V:v)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Differenzirt man rechts die Quotienten, so entsteht

$$v^2 R \equiv v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right) - V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Nv, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Mv,$$

und daher

$$vR \equiv v \left(N \frac{\partial V}{\partial x} - M \frac{\partial V}{\partial y} \right) - V \left(N \frac{\partial v}{\partial x} - M \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Nach No. 16, 1 ist nun

20. Wir gehen nun auf einige besonders einfache Fälle ein.

Setzen wir $\varphi \equiv x$, bez. $\varphi \equiv y$, so entsteht

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}, \quad \text{bez. } \psi_1 = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Soll also der integrierende Faktor eine Function von x allein bez. von y allein sein, so muss

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) : M$$

eine Function von x , bez. von y sein.

A. Bedeutet X eine Function von x allein, so ist bei der Gleichung

$$(X + 3axy + by^2)dx + (ax^2 + bxy)dy = 0$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N = \frac{ax + by}{x(ax + by)} = \frac{1}{x},$$

also ist der integrierende Faktor eine Function von x .

Durch Multiplication mit x erhält man

$$xXdx + d(ax^3y + \frac{1}{2}bx^2y^2) = 0.$$

Hieraus folgt das allgemeine Integral

$$ax^3y + \frac{b}{2}x^2y^2 + \int xXdx = C.$$

B. Bei der linearen Gleichung

$$y' + Py - Q = 0$$

ist $M = Py - Q$, $N = 1$, und daher

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N = P,$$

folglich ist auch hier der integrierende Faktor eine Function von x allein. Zur Bestimmung des Faktor haben wir aus 2.

$$\frac{dF}{F} = Pdx,$$

also ist

$$F = e^{\int Pdx}.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, bilden wir zunächst (No. 14.)

$$\int MFdx = \int (Py - Q)e^{\int Pdx} dx = ye^{\int Pdx} - \int Qe^{\int Pdx} dx.$$

Ferner ist

$$Y = NF - \frac{\partial}{\partial y} \int MFdx = 0.$$

Daher folgt für das allgemeine Integral

$$ye^{\int Pdx} - \int Qe^{\int Pdx} dx = c$$

in Uebereinstimmung mit No. 8.

21. Der integrierende Faktor ist eine Function des Produkts xy , wenn

$$\psi \equiv \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx}$$

eine Function von xy ist.

Beispiel. $yF(xy)dx + xG(xy)dy = 0.$

Hier ist $M = yF(xy)$, $N = xG(xy)$, und somit

$$\psi = \frac{xy[F'(xy) - G'(xy)] + F(xy) - G(xy)}{xy[G(xy) - F(xy)]}.$$

Bezei

also ist

Eine

wird dah

22. I

x und y , c

1.

eine Func

Soll

also von d

,

2.

also muss

Beisp

so kann n

Hier i

und daher

Folgli

der homog

Setzt

sich ψ eb

Different

jeden Gr

Berecl

für den Fall, dass der integrierende Faktor homogen vom Grade n sein soll, so enthält dieselbe die unbestimmte Zahl n ; unter Umständen gelingt es, die Zahl n so zu wählen, dass ϕ homogen wird. Dies ist z. B. der Fall bei der Gleichung

$$(2x^3 + 3x^2y + y^3 - y^3) dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3) dy = 0;$$

man findet leicht, dass sie einen homogenen integrierenden Faktor vom Grade (-2) zulässt.

23. Um die Gleichung zu integrieren

1. $Qdx + Rdy + S(xdy - ydx) = 0,$

worin Q , R und S homogene Functionen sind, und zwar Q und R vom Grade m , S vom Grade n , bestimme man einen homogenen integrierenden Faktor vom Grade $-n-2$ für die Gleichung $Qdx + Rdy = 0$: Giebt man der Differentialgleichung die Form

$$Qdx + Rdy - Sx^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

so erkennt man sofort, dass dieser Faktor die linke Seite in die Summe zweier vollständigen Differentiale verwandelt.

In die Form 1. lässt sich die Gleichung $(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0$ durch eine geschickte Substitution bringen.

Setzt man nämlich

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

so erhält man eine transformirte Gleichung von der Form

$$(a\xi + a'\eta)(\xi d\eta - \eta d\xi) - (b\xi + b'\eta)d\eta + (c\xi + c'\eta)d\xi = 0,$$

wenn α und β die Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} \alpha(A + A'\alpha + A''\beta) - (B + B'\alpha + B''\beta) &= 0 \\ -\beta(A + A'\alpha + A''\beta) + (C + C'\alpha + C''\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben hierfür

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta}.$$

Setzen wir den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Ausdrücke $= \lambda$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} A - \lambda + A'\alpha + A''\beta &= 0, \\ B + (B' - \lambda)\alpha + B''\beta &= 0, \\ C + C'\alpha + (C'' - \lambda)\beta &= 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & A' & A'' \\ B & B' - \lambda & B'' \\ C & C' & C'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Hat man eine Wurzel λ dieser cubischen Gleichung gefunden, so ergeben sich α und β z. B. aus

$$A - \lambda + A'\alpha + A''\beta = 0 \quad \text{und} \quad B + (B' - \lambda)\alpha + B''\beta = 0.$$

24. Die bisher integrierten Differentialgleichungen I. O. sind vom ersten Grade, d. h. sie enthalten nur die erste Potenz von y' . Wir geben nun einige besondere Regeln, welche bei der Integration von Differentialgleichungen von höherem Grade zu beachten sind.

Zerfällt die Gleichung

$$F(x, y, y') = A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + A_2 y'^{n-2} + \dots + A_{n-1} y' + A_n = 0,$$

in welcher A_0, A_1, \dots, A_n eindeutige Functionen von x und y bezeichnen, in ein Produkt von Functionen minderen Grades von y' , deren Coefficienten eindeutige Functionen von x und y sind, so zerfällt die Differentialgleichung in ebenso viele einzelne Gleichungen, die dadurch hervorgehen, dass man die einzelnen Faktoren gleich Null setzt.

Gelingt es, $F(x, y, y')$ in rücksichtlich y' lineare Faktoren zu zerlegen

$$F = A_0(y' - f_1)(y' - f_2) \dots (y' - f_n) = 0,$$

$$2. \quad \varphi + \varphi' \cdot \frac{dy'}{dx} + y'\psi + y\psi' \frac{dy'}{dx} = \chi' \frac{dy'}{dx},$$

Setzt man hierin

$$\frac{dy'}{dx} = y' \frac{dy'}{dy},$$

und ersetzt y' durch das einfachere Zeichen p , so erhält man

$$\varphi + p\varphi' \frac{dp}{dy} + p\psi + y p\psi' \frac{dp}{dy} = p\chi' \frac{dp}{dy}.$$

Hier wollen wir p als die unabhängige und y als die abhängige betrachten; wir erhalten alsdann für y die Gleichung

$$3. \quad \frac{dy}{dp} + \frac{p\psi'}{\varphi + p\psi} y = \frac{\chi' - \varphi'}{\varphi + p\psi} p;$$

diese Gleichung ist linear.

Man kann auch y aus 1. und 2. eliminiren; dadurch entsteht

$$\varphi + \varphi' \frac{dp}{dx} + p\psi + \frac{\chi - x\varphi}{\psi} \cdot \psi' \frac{dp}{dx} = \chi' \frac{dp}{dx}.$$

Wird p als unabhängige Variable betrachtet, so ergibt sich für x Differentialgleichung

$$5. \quad \frac{dx}{dp} - \frac{\varphi\psi'}{\psi(\varphi + p\psi)} x + \frac{\varphi'\psi + \chi - \chi'\psi}{\psi(\varphi + p\psi)} = 0.$$

Beispiel. Bei der Differentialgleichung

$$6. \quad px + (a + \frac{1}{2}p)y = \frac{1}{4a}p^2$$

$$\text{ist} \quad \varphi = p, \quad \psi = (a + \frac{1}{2}p), \quad \chi = \frac{1}{4a}p^2;$$

$$\varphi' = 1, \quad \psi' = \frac{1}{2}, \quad \chi' = \frac{p}{2a}.$$

Daher erhält man für x die Gleichung

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{(2a + p)(2a + 2 + p)} x + \frac{a}{(2a + p)(2a + 2 + p)} =$$

Nach den bekannten Regeln für eine lineare Gleichung ist das Integral hiervon

$$7. \quad x = \frac{p + 2a}{p + 2a + 2} \left(C + \frac{a}{p + 2a} \right);$$

aus dieser und aus der gegebenen Differentialgleichung hat man schlie p zu eliminiren; doch ist auch ohne Ausführung der Elimination durch die beiden Gleichungen 6. und 7. vollständig gelöst; durch diese G sind die beiden Variablen x und y durch dieselbe Hilfsvariable p a

27. Die in No. 24, 25 und 26 mitgetheilten Methoden bestehen man die gegebene Gleichung

$$1. \quad F(x, y, y') = 0$$

differenzirt; aus der dadurch erhaltenen Gleichung

$$2. \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$

und aus 1. eliminirt man y ; oder man eliminirt x und ersetzt $dy' y' dy' : dy$.

Wenn es sich ereignet, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

identisch verschwindet, dass also

29. Die Gleichung

$$1. \quad y - 2xy' = y'f(y y')$$

liefert mit y multiplicirt

$$2. \quad y^2 - 2yy' \cdot x = yy' \cdot f(y y').$$

Substituirt man $y^2 = z$, so ist $2yy' = z'$, und es ergibt sich

$$z - xz' = \frac{1}{2}z'f(\frac{1}{2}z'),$$

also eine CLAIRAUT'sche Gleichung. Das allgemeine Integral von 1. i

$$3. \quad y^2 = 2Cx + Cf(C),$$

das singuläre folgt durch Elimination von y' aus 1. und aus

$$4. \quad 1 + y'^2 \cdot \frac{df(y y')}{d(y y')} = 0,$$

wie man leicht erhält, wenn man die an die Stelle von No. 28, 4 hin Gleichung durch 1. reducirt.

30. Die Aufgabe: Die Curve zu bestimmen, bei welcher die eine gegebene Function f der von der Normalen auf der abgeschnittenen Strecke ist, führt auf die Differentialgleichung

$$1. \quad y \sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy').$$

Führt man statt y eine neue abhängige Variable r durch die Subs

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

so ist

$$rr' = x + yy',$$

$$y' = \frac{1}{y} (rr' - x), \quad 1 + y'^2 = \frac{r^2 + r^2 r'^2 - 2xrr'}{r^2 - x^2}.$$

Daher ergibt sich aus 1.

$$2. \quad r^2 + r^2 r'^2 - 2xrr' = [f(rr')]^2.$$

Hieraus folgt die neue Differentialgleichung

$$r - 2xr' = r' \cdot \frac{[f(rr')]^2 - r^2 r'^2}{rr'};$$

diese ist von derselben Form, wie No. 29, 1.

31. Denkt man sich die Gleichung

$$1. \quad \varphi(x, y, y') = 0$$

in Bezug auf y' aufgelöst, so erhält man ein Resultat von der Form

$$2. \quad dy - y'dx = 0,$$

worin man y' aus 1. zu substituiren hat. Man kann nun versuch integrirenden Faktor F als Function von x, y, y' so zu bestimmen, d

$$3. \quad F \cdot (dy - y'dx) = 0$$

unter der Voraussetzung 1. ein vollständiges Differential wird. Das Integral von 1. wird alsdann durch Elimination von y' aus 1. und au

$$\int F \cdot (dy - y'dx) = C$$

erhalten, wenn man mit $\int F \cdot (dy - y'dx)$ eine Function bezeichnet, ständiges Differential $F \cdot (dy - y'dx)$ ist.

Ist 3. ein vollständiges Differential, so sind die Bedingungen erfül

$$4. \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} + F \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = 0$$

Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y}$$

sind aus 1. zu berechnen. Nun ist für jede Verschiebung des Punkte lang einer Integralcurve

also ist

$$\frac{\psi' \cdot y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{xy'^2 + xyy'' - yy'}{1 + y'^2 + yy''}.$$

Wird dies in 3. eingesetzt, so erhält man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{-(x + yy')y}{1 + y'^2 + yy''}.$$

Hieraus und aus 2. folgt sofort

$$-\frac{1}{y'^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right) = -\frac{1 + y'^2 + yy''}{y'(x + yy')}.$$

Da nun

$$\frac{d(x + yy')}{dy} = \frac{1}{y'} + y' + yy'' \cdot \frac{1}{y'},$$

so ist

$$-\frac{1}{y'^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right) = -\frac{d}{dy} l(x + yy').$$

Hieraus folgt

$$G = \frac{1}{x + yy'}.$$

Man hat nun das Integral zu bestimmen

$$\int \frac{dy - y' dx}{y'(x + yy')} = C.$$

Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} C &= \int \frac{y dy + yy' \cdot d(yy')}{yy'(x + yy')} - \int \frac{dx + d(yy')}{x + yy'} \\ &= -l(x + yy') + \frac{1}{2} \int \frac{d[y^2(1 + y'^2)]}{yy'(x + yy')}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$y\sqrt{1 + y'^2} = u,$$

so folgt hieraus

$$C = -l(x + yy') + \int \frac{u du}{yy'(x + yy')}.$$

Da nun

$$yy'(x + yy') = u^2 + \frac{u(xy' - y)}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

so folgt aus 1.

$$yy'(x + yy') = u^2 + uf(u).$$

Daher hat man schliesslich

$$5. \quad C = -l(x + yy') + \int \frac{du}{u + f(u)}.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ergibt sich durch Elimination von y' aus 1. und 5.

34. Die Curve zu bestimmen, bei welcher das vom Nullpunkte auf die Normale gefällte Loth eine gegebene Function des Radius vector ist.

Die Differentialgleichung des Problems ist

$$1. \quad \varphi = f(x^2 + y^2) - \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 2yf' - \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y'} &= \frac{xy' - y}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Aus 1. ergibt sich fe

$$2(x + yy')f' = 1$$

Daher ist

$$2yf' = - \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Da nun

$$\frac{yy'y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

so folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

Man hat daher das I

Subtrahirt man hiervon

$$\int$$

so erhält man

$$\text{arc tang } \frac{y}{x} =$$

Da nun, wie man sofort

$$\left($$

so folgt mit Rücksicht auf

Daher hat man schlie

$$\text{arc tang } \frac{y}{x}$$

35. Integration du

Aus der Differentialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ gewinnt man durch Differentiation

$$y'' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_1(x, y),$$

$$1. \quad y''' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \varphi_2(x, y),$$

$$y'''' = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \varphi_3(x, y),$$

u. s. w.,

so dass also y', y'', y''' bekannte Functionen von x und y sind. Diese Werthe

*) Weitere Beispiele findet man in dem citirten MALMSTEN'schen Aufsätze.

kann man dazu verwenden, y in eine TAYLOR'sche oder MACLAURIN'sche Reihe zu entwickeln. Wird einem Anfangswerthe x_0 eine beliebige Ordinate y_0 zugeordnet, so ist

$$2. \quad y = y_0 + \varphi(x_0, y_0) \frac{x - x_0}{1} + \varphi_1(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Setzt man insbesondere $x_0 = 0$ und schreibt b für y_0 , so erhält man

$$3. \quad y = b + \varphi(0, b) \cdot \frac{x}{1} + \varphi_1(0, b) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \varphi_2(0, b) \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Nach Berechnung der Coefficienten $\varphi_k(x_0, y_0)$ hat man die Grenzen für die Convergenz festzustellen.

Die Entwicklung 3. wird man zumeist mit Vortheil nach der Methode der unbestimmten Coefficienten vornehmen; man setzt

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

$$\text{also} \quad y' = A_1 + 2 \cdot A_2 x + 3 \cdot A_3 x^2 + \dots,$$

substituiert beide Reihen in die Differentialgleichung und bestimmt die A_k so, dass dieselbe identisch erfüllt wird. Wenn eine der Functionen $\varphi_k(0, b)$ unendlich gross ist, so ist die Entwicklung nach der MACLAURIN'schen Reihe nicht zulässig; in diesem Falle wird man zur TAYLOR'schen Reihe greifen und x_0, y_0 so wählen, dass alle Functionen $\varphi_k(x_0, y_0)$ endlich sind.

Aus der Differentialgleichung

$$y' = \frac{\varphi(x, y)}{x}$$

folgt $y' = \infty$ für $x = 0$, sobald $\varphi(x, y)$ für $x = 0$ nicht verschwindet. Man kann daher das Integral dieser Gleichung nicht nach der MACLAURIN'schen Reihe entwickeln. Setzt man $x = 1 + \xi$, so erhält man

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\varphi(1 + \xi, y)}{1 + \xi}.$$

Wenn nun φ für $x = 1$ nicht unendlich gross ist, so kann man unter Umständen y in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ξ , d. i. in eine TAYLOR'sche Reihe nach steigenden Potenzen von $x - 1$ entwickeln.

36. Es kann der Fall eintreten, dass man nicht das allgemeine Integral, sondern nur ein particuläres erhält, wenn man nach der MACLAURIN'schen Reihe entwickelt. So führt z. B. die Differentialgleichung

$$y' = - \frac{2x + y}{x(1 + x + y)}$$

bei der Annahme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

auf die Gleichung

$$(A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots)[(A_0 + 1)x + (A_1 + 1)x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 + \dots] \\ = -A_0 - (A_1 + 2)x - A_2 x^2 - A_3 x^3 - A_4 x^4 - \dots$$

Hieraus folgen die Werthe

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = A_3 = A_4 = \dots = 0,$$

also ergibt sich das Integral

$$y = -x,$$

das nicht das allgemeine sein kann, da es keine willkürliche Constante enthält. Die Herstellung des allgemeinen Integrals hat keine Schwierigkeit, da man sich leicht überzeugt, dass die Differentialgleichung einen integrierenden Faktor hat, der eine Function von $x + y$ ist.

37. Die RICCATI'sche Differentialgleichung (No. 13).

$$1. \quad y' + by^2 = cx'''$$

wird, indem man by durch y ersetzt, in die Gleichung verwandelt

$$2. \quad y' + y^2 = \gamma x''', \quad \gamma = cb.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich als Quotient zweier Potenzreihen herstellen. Macht man nämlich die Annahme $y = \psi(x) : \varphi(x)$, indem man unter ψ und φ zwei Potenzreihen versteht, so erhält man aus 2.

$$\frac{\varphi\psi' - \psi\varphi' + \psi^2}{\varphi^2} = \gamma x^m.$$

Nimmt man $\psi = \varphi'$, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\varphi'' = \gamma\varphi x^m.$$

Hierin ersetzen wir φ durch $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$ und erhalten

$$1 \cdot 2 \cdot A_2 + 2 \cdot 3 A_3x + 3 \cdot 4 A_4x^2 + \dots = \gamma(A_0x^m + A_1x^{m+1} + A_2x^{m+2} + \dots).$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_2 &= A_3 = A_4 = \dots = A_{m+1} = 0. \\ (m+1)(m+2)A_{m+2} &= \gamma A_0, \quad (m+2)(m+3)A_{m+3} = \gamma A_1, \\ A_{m+4} &= A_{m+5} = \dots = A_{2m+3} = 0, \\ (2m+3)(2m+4)A_{2m+4} &= \gamma A_{m+2}, \quad (2m+4)(2m+5)A_{2m+5} = \gamma A_{m+3}, \\ A_{2m+6} &= A_{2m+7} = \dots = A_{3m+5} = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Setzen wir abkürzungsweise

$$U = 1 + \frac{\gamma}{(m+1)(m+2)} x^{m+2} + \frac{\gamma^2}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)} x^{2m+4} + \dots$$

$$V = x + \frac{\gamma}{(m+2)(m+3)} x^{m+3} + \frac{\gamma^2}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)} x^{2m+5} + \dots,$$

so ergibt sich

$$\varphi = A_0 U + A_1 V;$$

daher ist, wenn der willkürliche Quotient $A_1 : A_0$ mit c bezeichnet wird, das allgemeine Integral der RICCATI'schen Gleichung

$$y = \frac{U' + cV'}{U + cV}.$$

38. Trajektorien. Eine Curvengleichung $\varphi(x, y, c) = 0$ enthalte eine willkürliche Constante c ; giebt man derselben nach einander alle möglichen Werthe, so wird ein System von unendlich vielen Curven erzeugt. Eine Curve, welche alle diese Curven unter demselben Winkel schneidet, wird als Trajectorie des Curvensystems bezeichnet. Der einfachste Fall tritt ein, wenn die Trajectorie die Curven der Schaar orthogonal schneidet, eine Orthogonalcurve der Schaar ist.

Für irgend einen Punkt x, y der Curve

$$1. \quad \varphi(x, y, c) = 0$$

bestimmt sich die Richtung der Tangente aus der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

daher folgt für die diesen Punkt enthaltende Orthogonalcurve

$$2. \quad y' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Eliminirt man c aus den Gleichungen 1. und 2., so erhält man die Differentialgleichung der Orthogonalcurve; wie man sieht, ist dieselbe von der ersten Ordnung.

39. Für eine Orthogonalcurve von

$$y = \gamma x^m$$

ergiebt sich zunächst

$$y' = -\frac{1}{m\gamma x^{m-1}}.$$

Die Elimination von γ aus beiden Gleichungen führt zu

$$yy' + \frac{1}{m}x = 0;$$

hiervon ist das allgemeine Integral

$$\frac{1}{m}x^2 + y^2 = c.$$

Ist $m > 0$, so sind die gegebenen Curven parabolisch und die Orthogonalcurven Ellipsen; ist $m = 1$, so sind die gegebenen Curven Strahlen eines Büschels, dass den Nullpunkt zum Träger hat, und die Orthogonalcurven sind concentrische Kreise; ist $m < 0$, so sind die gegebenen Curven hyperbolisch und haben die Achsen zu Asymptoten, die Orthogonalcurven sind Hyperbeln; für $m = -1$ insbesondere bilden die gegebenen Curven sowohl, wie die Orthogonalcurven Büschel von gleichseitigen coaxialen Hyperbeln, die Achsen des einen Büschels sind die gemeinsamen Asymptoten des anderen.

40. Um die Orthogonalcurven der Kreise eines Büschels zu erhalten, legen wir die X -Achse durch die Centren, die Y -Achse in die Chordale des Büschels; die Gleichungen aller Büschelkreise sind dann von der Form

$$\varphi \equiv (x - a)^2 + y^2 + b + 2\gamma x = 0$$

wobei γ von Kreis zu Kreis sich ändert. Für eine Orthogonalcurve hat man daher zunächst

$$y' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x - a + \gamma}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination von γ

$$2xy dx + (y^2 - x^2 + b) dy = 0.$$

Hier ist

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) : M = \frac{2}{y},$$

folglich hat die Differentialgleichung einen integrierenden Faktor, der eine Function von y allein ist; er ergibt sich aus der Gleichung $dF : F = -2dy : y$ zu $F = y^{-2}$.

Ferner bildet man

$$\lambda \equiv \int \frac{M}{y^2} dx = \frac{x^2}{y},$$

$$Y \equiv \frac{N}{y^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 1 + \frac{b}{y^2}, \quad \int Y dy = y - \frac{b}{y},$$

$$\lambda + \int Y dy = \frac{x^2 + y^2 - b}{y},$$

und erhält hieraus das allgemeine Integral der Differentialgleichung, wenn die willkürliche Constante mit $2c$ bezeichnet wird,

$$\frac{x^2 + y^2 - b}{y} = 2c,$$

oder

$$x^2 + y^2 - b - 2cy = 0.$$

Dies bestätigt den in der analytischen Planimetrie entwickelten Satz, dass die Orthogonalcurven eines Kreisbüschels die Kreise eines Büschels sind, deren Centren auf der Chordale des gegebenen Büschels liegen und deren Chordale mit der Centralen desselben zusammenfällt.

41. Die Ellipsen

$$1. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

für welche, wenn h eine Constante bezeichnet,

$$2. \quad a^2 - b^2 = h^2,$$

sind confocal; um die Di
hat man a und b aus 1. t

zu eliminiren; man erhält

3. $xy y'^2$

Durch Einführung neu
facht werden; setzt man r

st

4.

Wird diese Gleichung

Diese Gleichung zerfällt

5. $t' =$

Die erste liefert in 4
zweiten und aus 4. elimin

6.

und diese Gleichung ist n
Schaar confocaler Ellipsen

Wird dies in 4. subst

das allgemeine Integral v
cale Hyperbeln sind, was
ist. Zu bemerken ist no
genügt und daher das sin

§ 25. Differentialgleich

1. Eine Function φ

Die Gleichung

1.

wollen wir n mal differen
von der Form

$\varphi_1(x, y)$

$\varphi_2(x, y)$

2. $\varphi_3(x, y)$

\vdots

$\varphi_n(x, y)$

Eliminiren wir die n
so entsteht eine Resultant

3.

also eine Differentialgleich
stanten nicht bereits aus
lassen, in welchem Falle
Ordnung sein würde. Wi

§ 25. Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei Verän

den Variablen x und y n Constante enthält, so genügt vereinbaren Werthsysteme von $x, y, y', y'', y''' \dots$ einer Differentialgleichung n ter Ordnung, welche die nicht enthält.

Denkt man sich die Differentialgleichung 3. gegeben, so durch die Gleichung 1. genügt unabhängig von den Werthen, c stanten beilegen mag; wenn es sich also darum handelt, die D zu integrieren, d. i. aus ihr eine von Differentialquotienten zwischen den Variablen abzuleiten, so haben die c den Charak lichen Constanten.

Beispiele. A. Die Gleichung

$$y = a e^x + b e^{-x}$$

liefert durch zweimalige Differentiation

$$y'' = a e^x + b e^{-x};$$

hieraus folgt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y.$$

Aus der allgemeineren Gleichung

$$y = a e^{mx} + b e^{nx},$$

folgen

$$y' = m a e^{mx} + n b e^{nx},$$

und

$$y'' = m^2 a e^{mx} + n^2 b e^{nx}.$$

Die erste und zweite Gleichung ergeben

$$y' - n y = (m - n) a e^{mx},$$

aus der zweiten und dritten folgt

$$y' - n y' = m(m - n) a e^{mx},$$

daher ergibt sich die von den Constanten a und b freie Diffe

$$y'' - (n + m) y' + m n y = 0.$$

2. Unter dem allgemeinen Integrale einer Differe n ter Ordnung

$$1. \quad f(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$$

versteht man eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ von der Beschaffenheit, dass das Werthsystem $x, y, y', \dots y^{(n)}$, das der Differentialgleichung g Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, sowie die durch n aufeinanderfolgende daraus folgenden Gleichungen erfüllt

$$\varphi_1(x, y, y') = 0,$$

2.

$$\varphi_2(x, y, y', y'') = 0,$$

$$\dots \dots \dots \varphi_n(x, y, y', y'', y''', \dots y^{(n)}) = 0,$$

und umgekehrt.

In der Differentialgleichung 1. kann man $x, y, y', y'', \dots y^{(n)}$ beliebige Werthe geben; alsdann ist der höchste Differentialquotient in der Gleichung 1. bestimmt. Es müssen daher das allgemeine Integral und die abgeleiteten Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \dots \quad \varphi_{n-1} = 0$$

so beschaffen sein, dass sie durch jedes willkürliche für die G $\dots y^{(n-1)}$ substituirte Werthsystem erfüllt werden können. Hat die Function φ n unbestimmte Constante $c_1, c_2 \dots c_n$ enthalten, so können in solchen Verbindungen, dass durch geeignete Wahl dieser C gegebenen Bedingungen genügt werden kann. Wir erhalten hi gemeine Integral einer Differentialgleichung n ter Or n willkürliche Constante.

Wenn eine Gleichung $\varphi = 0$ so beschaffen ist, dass alle Werthe von $x, y, y' \dots y^{(n)}$, die den Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots \quad \varphi_n = 0$$

genügen, auch die Differentialgleichung erfüllen, φ aber nicht n willkürliche Constante enthält, so wird $\varphi = 0$ als ein particuläres Integral bezeichnet, wenn es aus dem allgemeinen Integrale durch Specialisirung einiger Constanten hervorgeht; in jedem andern Falle wird es als singuläres Integral bezeichnet.

3. Eine Gleichung $\psi(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) = 0$ wird als ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung n ter Ordnung bezeichnet, wenn jedes Werthsystem $x, y, y' \dots y^{(n)}$, welches der Differentialgleichung genügt, auch die Gleichung $\psi = 0$ und die durch einmalige Differentiation daraus hervorgehende $\psi_1 = 0$ erfüllt. Aus dem Umstande, dass in der Differentialgleichung die Grössen $x, y, y' \dots y^{(n-1)}$ beliebig gewählt werden können, folgt, dass die Function ψ eine willkürliche Constante enthalten muss. Ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung n ter Ordnung enthält eine willkürliche Constante. Ausser den durch Specialisirung der Constanten aus einem allgemeinen ersten Integrale hervorgehenden kann es noch weitere erste Integrale $\psi = 0$ geben, so dass alle $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ befriedigenden Werthe von $x, y, \dots y^{(n)}$ auch die Differentialgleichung erfüllen; diese werden als singuläre erste Integrale bezeichnet.

Ein allgemeines erstes Integral einer Differentialgleichung n ter Ordnung ist eine Differentialgleichung $(n-1)$ ter Ordnung. Ein allgemeines erstes Integral dieser Gleichung wird als ein allgemeines zweites Integral der gegebenen Differentialgleichung bezeichnet u. s. f.; ein allgemeines zweites Integral enthält somit zwei, ein drittes drei Constante, u. s. w. Das allgemeine n te Integral enthält n Constante und keinen Differentialquotienten; es fällt mit dem bereits definirten allgemeinen Integrale zusammen.

Beispiele. A. Die Differentialgleichung

$$y'' - (m+n)y' + mn = 0$$

hat das allgemeine erste Integral

$$\psi = y' - ny - (m-n)ae^{mx} = 0;$$

denn durch Differentiation ergibt sich

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y'} y'' = y'' - ny' - (m-n)mae^{mx} = 0,$$

und durch Elimination von a aus $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ folgt die Differentialgleichung. Dieselbe hat noch ein allgemeines erstes Integral, das sich aus No. 1, 3 und 4 durch Elimination von a ergibt, nämlich

$$y' - my - (n-m)be^{nx} = 0.$$

Eliminirt man b aus dieser Gleichung und aus der durch Differentiation aus ihr hervorgehenden

$$y'' - my' - (n-m)nbe^{nx} = 0,$$

so erhält man ebenfalls die gegebene Differentialgleichung.

B. Die Differentialgleichung erster Ordnung.

$$3. \quad y - xy' = \gamma \sqrt{x},$$

in welcher γ als willkürliche Constante gilt, ist ein allgemeines erstes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man durch Elimination von γ aus 3. und aus der durch Differentiation abgeleiteten Gleichung erhält

$$4. \quad -xy'' = \frac{\gamma}{2\sqrt{x}},$$

also der Gleichung 5. $2x^2y'' - xy' + y = 0.$

Zu 3. gehört das allgemeine Integral (§ 24, No. 8)

$$6. \quad y = cx + 2\gamma \sqrt{x};$$

diese Gleichung giebt nach x differenziert

$$7. \quad y' = c + \frac{\gamma}{\sqrt{x}}.$$

Eliminirt man γ aus 6. und 7., so folgt

$$8. \quad 2xy' - y = cx,$$

und diese Gleichung ist das andere allgemeine erste Integral von 5.

4. Eliminirt man aus dem allgemeinen Integrale $\varphi(x, y, c_1, c_2 \dots c_n) = 0$ einer Differentialgleichung n ter Ordnung und aus der durch einmalige Differentiation abgeleiteten Gleichung $\varphi_1 = 0$ eine Constante, so erhält man eine Differentialgleichung I. O. mit $(n - 1)$ Constanten; wie man sofort sieht, ist dieselbe ein allgemeines $(n - 1)$ tes Integral der gegebenen Gleichung. Da man nun jede der n Constanten eliminiren kann, so ist ersichtlich, dass man n allgemeine $(n - 1)$ te Integrale erhält.

Differenziert man ein solches $(n - 1)$ tes Integral und eliminirt man aus dem Resultate und aus der ursprünglichen Gleichung eine weitere Constante, so erhält man ein allgemeines $(n - 2)$ tes Integral u. s. w.

Eliminirt man zwei Constante aus

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

erhält man ebenfalls ein allgemeines $(n - 2)$ tes Integral.

Man erkennt leicht, dass es nicht zwei verschiedene $(n - 2)$ te allgemeine Integrale geben kann, die dieselben $(n - 2)$ willkürlichen Constanten enthalten. Denn gesetzt

$$\psi(x, y, y', y'', c_1, c_2 \dots c_{n-2}) = 0$$

$$\text{und} \quad \chi(x, y, y', y'', c_1, c_2 \dots c_{n-2}) = 0$$

wären wesentlich verschieden, so dass also eine dieser beiden Gleichungen nicht eine nothwendige Folge der andern wäre. Differenziert man die erste Gleichung, so erhält man

$$\psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \dots \frac{d^{n-3}\psi}{dx^{n-3}} = 0,$$

und diese $(n - 2)$ Gleichungen enthalten die Grössen $x, y, y' \dots y^{(n-1)}, c_1, c_2, c_3 \dots c_n$. Fügt man hierzu noch die Gleichung $\chi = 0$, so kann man aus diesen $n - 1$ Gleichungen die c_k eliminiren, und behält eine Gleichung zwischen $x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ übrig, im Widerspruche damit, dass ein allgemeines $(n - 2)$ tes Integral durch jedes System von $x, y, y' \dots y^{(n-1)}$ muss befriedigt werden können.

Man erhält somit dasselbe allgemeine $(n - 2)$ te Integral erstens, indem man c_i und c_k aus $\varphi = 0, \varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ eliminirt; zweitens, indem man c_i aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ eliminirt, die Resultante $\varphi_i = 0$ differenziert und c_k aus $\varphi_i = 0$ und $\varphi'_i = 0$ eliminirt; drittens, indem man c_k aus $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ eliminirt, die Resultante $\varphi_k = 0$ differenziert, und c_i aus $\varphi_k = 0$ und $\psi'_k = 0$ eliminirt.

Aehnlich, wie den Satz, dass es nicht zwei verschiedene allgemeine $(n - 2)$ te Integrale mit denselben $(n - 2)$ willkürlichen Constanten giebt, beweist man, dass es nicht zwei $(n - k)$ te Integrale mit denselben $(n - k)$ willkürlichen Constanten geben kann.

Hieraus schliessen wir weiter, dass es sovieler $(n - k)$ te verschiedene Integrale

gibt, als sich die n willkürlich gruppieren lassen; es gibt daher

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

allgemeine $(n-k)$ te Integrale.

Wenn man aus den allgem. $y^{(n-1)}$ eliminirt, so erhält man zwischen x, y und n willkürlichen Constanten, also das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung n ter Ordnung.

5. Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung n ter Ordnung lässt sich durch Reihenentwicklung nach dem TAYLOR'schen Satze erhalten. Wir denken uns die Differentialgleichung auf den höchsten Differentialquotienten $y^{(n)}$ algebraisch reducirt und berechnen aus

$$1. \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

die höheren Differentialquotienten; indem wir bei jeder durch Differentiation erhaltenen neuen Gleichung den Werth für $y^{(n)}$ aus 1. substituiren, erhalten wir alle höheren Differentialquotienten als Functionen von $x, y, y' \dots y^{(n)}$; es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} \\ 2. \quad &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} f(x, y, y' \dots y^{(n)}). \\ &= f_1(x, \dots, y^{(n)}). \end{aligned}$$

So fortfahrend findet man

$$3. \quad \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = f_2(x, \dots, y^{(n)}), \quad \frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}} = f_3(x, \dots, y^{(n)}), \dots$$

Nehmen wir nun die zu einem beliebigen Ausgangswerthe x_0 gehörigen Werthe der abhängigen Variablen und ihrer Differentialquotienten bis zum $(n-1)$ ten willkürlich an, so sind $y_0^{(n+1)}, y_0^{(n+2)} \dots$ durch die Gleichungen 2. und 3. bestimmt. Werden die willkürlich angenommenen Werthe der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi$ bezeichnet, so ergibt sich schliesslich die gesuchte Entwicklung

$$\begin{aligned} y &= \alpha + \beta(x - \alpha) + \frac{\gamma}{1 \cdot 2} (x - \alpha)^2 + \dots + \frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} (x - \alpha)^{n-1} \\ 4. \quad &+ \frac{f_1(\alpha, \beta, \dots)}{n!} \cdot (x - \alpha)^n + \frac{f_2(\alpha, \beta, \dots)}{(n+1)!} (x - \alpha)^{n+1} \\ &+ \frac{f_3(\alpha, \beta, \dots)}{(n+2)!} \cdot (x - \alpha)^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

6. Wir wenden uns nun zu den Regeln für die Bestimmung des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in den einfachsten Fällen.

A. Ist y'' eine Function von x allein, also

$$1. \quad y'' = f(x),$$

so hat man sofort ein allgemeines erstes Integral

$$2. \quad y' = \int f(x) dx + C$$

und hieraus das allgemeine Integral

$$3. \quad y = \int dx \int f(x) dx + Cx + C_1.$$

Das andere allgemeine erste Integral folgt durch Elimination von C aus 2. und 3. zu

$$xy' - y = x \int f(x) dx - \int dx \int f(x) dx - C_1.$$

B. Ist y'' eine Function von y allein, also

$$4. \quad y'' = f(y),$$

so setze man

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy};$$

dadurch entsteht aus 4.

$$y' dy' = f(y) dy,$$

und hieraus folgt ein allgemeines erstes Integral

$$5. \quad y'^2 = 2 \int f(y) dy + C, \quad \text{oder} \quad y' = \sqrt{2 \int f(y) dy + C}.$$

Hier lassen sich wieder die Variabeln sondern und man erhält

$$6. \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C}} + C_1.$$

C. Ist y'' eine Function von y' allein, so hat man

$$7. \quad y'' = f(y').$$

Hieraus ergibt sich

$$8. \quad x = \int \frac{dy'}{f(y')} + C,$$

und es erübrigt nun noch die Integration dieser Differentialgleichung erster Ordnung. Man kann indess dieselbe umgehen, da man das andere allgemeine erste Integral bestimmen kann.

Setzt man in 7. $y'' = y' dy' : dy$, so erhält man

$$y' dy' = f(y') dy;$$

hieraus ergibt sich

$$9. \quad y = \int \frac{y' dy'}{f(y')} + C_1.$$

Das allgemeine Integral von 7. erhält man nun durch Elimination von y' aus 8. und 9.

D. Enthält die Differentialgleichung nur y'' , y' und x , also y nicht explicite, ist sie also von der Form

$$10. \quad f(y'', y', x) = 0,$$

so bemerke man, dass $y'' = dy' : dx$; man erkennt nun, dass 9. eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und x ist. Die Integration derselben führt auf eine Gleichung von der Form

$$11. \quad \varphi(y', x, C) = 0;$$

das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung erster Ordnung ist das allgemeine Integral von 10.

E. Enthält die Differentialgleichung nur y'' , y' und y , also nicht x explicite, so hat sie die Form

$$12. \quad f(y'', y', y) = 0.$$

Ersetzt man hier y'' durch $y' dy' : dy$, so ergibt sich

$$f\left(y' \frac{dy'}{dy}, y', y\right) = 0,$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y' und y . Das allgemeine Integral derselben

$$13. \quad \varphi(y', y, C) = 0$$

ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und x ; das allgemeine Integral von 13. ist auch das allgemeine Integral von 12.

7. Geometrische Anwendungen. Die Aufgabe, eine Curve durch ihre Krümmungshalbmesser zu definiren, führt auf eine Differentialgleichung II. O.,

sobald der Krümmungshalbmesser als Function der Coordinaten, oder ausserdem als Function der Tangente, Normale, Subtangente oder Subnormale gegeben ist.

A. Eine Curve so zu bestimmen, dass der Krümmungshalbmesser in jedem Punkte proportional dem Cubus der Normale ist.

Aus den bekannten Formeln für den Krümmungshalbmesser ρ und die Normale v

$$\rho = \sqrt{(1 + y'^2)^3} : y'', \quad v = y \sqrt{1 + y'^2}$$

folgt, wenn a ein constanter, gegebener Faktor ist, die Differentialgleichung des Problems

$$\frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''} = a^2 y^3 \sqrt{(1 + y'^2)^3},$$

oder einfacher

$$y'' = \frac{1}{a^2 y^3};$$

daher ist

$$y' dy' = \frac{dy}{a^2 y^3},$$

$$y'^2 = -\frac{1}{a^2 y^2} + C, \quad y' = \frac{\sqrt{a^2 C y^2 - 1}}{a y}.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = a \int \frac{y dy}{\sqrt{a^2 C y^2 - 1}} + C_1;$$

d. i.

$$x = \frac{1}{aC} \sqrt{a^2 C y^2 - 1} + C_1.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$-a^2 C^2 (x - C_1)^2 + a^2 C y^2 - 1 = 0,$$

so erkennt man, dass die Aenderung von C_1 nur auf eine Verschiebung der Y-Achse hinauskommt; von dem Vorzeichen von C hängt es ab, ob die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

B. Die Curve zu bestimmen, für welche der Krümmungshalbmesser proportional der Tangente ist.

Die Differentialgleichung des Problems ist

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{a y}{y'} \sqrt{1 + y'^2},$$

oder

$$y'' = \frac{(1 + y'^2) y'}{a y}.$$

Wir setzen hierin $y'' = y' dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy}{a y};$$

daher ist ein erstes allgemeines Integral

$$\arctang y' = l C y^{\frac{1}{a}}.$$

Hieraus ergibt sich schliesslich

$$x = \int \frac{dy}{\tan(l C y^{\frac{1}{a}})} + C_1.$$

C. Der Krümmungshalbmesser sei proportional der Normalen.

Ist n ein constanter Faktor, so hat man jetzt

$$n \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y \sqrt{1 + y'^2},$$

oder einfacher

$$n(1 + y'^2) = y y''.$$

Hier setzen wir wieder $y'' = y' dy' : dy$ und erhalten

$$\frac{y' dy'}{1 + y'^2} = n \frac{dy}{y},$$

daher ergibt sich ein erstes allgemeines Integral

$$\frac{1}{2} l(1 + y'^2) = n l \left(\frac{y}{C} \right),$$

woraus folgt

$$y' = \frac{\sqrt{y^{2n} - C^{2n}}}{C^n},$$

$$x = C^n \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - C^{2n}}} + C_1.$$

Für $n = -1$ ergibt sich ein Kreis, dessen Centrum auf der Abscissenachse liegt; für $n = 1$ eine Kettenlinie; für $n = -\frac{1}{2}$ eine Cycloide; für $n = \frac{1}{2}$ eine Parabel.

D. Soll der Krümmungshalbmesser eine gegebene Function φ der Abscisse sein, so hat man

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = y'' \varphi(x).$$

Hieraus folgt

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \int \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Die Integration links kann man ausführen und erhält

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C.$$

Wird das Integral rechts zur Abkürzung mit X bezeichnet, so ergibt sich

$$y' = \frac{X + C}{\sqrt{1 - (X + C)^2}},$$

und hieraus folgt schliesslich

$$y = \int \frac{(X + C)}{\sqrt{1 - (X + C)^2}} dx + C_1^*).$$

8. Lineare Differentialgleichungen. Unter einer linearen Differentialgleichung n ter Ordnung versteht man eine Gleichung von der Form

$$1. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X,$$

wobei X_1, X_2, \dots, X_n, X Functionen von x allein sind. Die Gleichung

$$2. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = 0,$$

die aus 1. hervorgeht, wenn man $X = 0$ setzt, wird als reducirte lineare Differentialgleichung bezeichnet. Wir betrachten diese zunächst. Für dieselben gilt folgender Satz:

Wenn eine reducirte lineare Differentialgleichung die particulären Integrale hat

$$y = y_1, \quad y = y_2, \quad y = y_3, \quad \dots \quad y = y_k,$$

so wird ihr auch durch die Function genügt

$$3. \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_k y_k,$$

wobei c_1, c_2, \dots, c_k willkürliche Constante sind.

Denn setzt man 3. in 1. ein, und fasst die Glieder zusammen, die mit demselben c multiplicirt sind, so erhält man

*) Weitere Beispiele findet man u. A. in SCHLOEMILCH, Compendium, 1. Bd., Cap. XVIII.

$$\begin{aligned}
& c_1 (y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y_1' + X_n y_1) \\
& + c_2 (y_2^{(n)} + X_1 y_2^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y_2' + X_n y_2) \\
& + \dots \\
& + c_k (y_k^{(n)} + X_1 y_k^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y_k' + X_n y_k) = 0.
\end{aligned}$$

Da nun y_1, \dots, y_k der Gleichung 1. genügen, so verschwinden links alle Klammerausdrücke, also ist die Gleichung identisch erfüllt. Kennt man n particuläre Integrale und sind nicht zwei oder mehr durch eine Identität von der Form verbunden

$$y_1 = a y_2 + b y_3 + c y_4 + \dots$$

so ist

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$$

das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung. Denn der gegebene Werth von y befriedigt die Gleichung und enthält n willkürliche Constante. Tritt hingegen der ausgeschlossene Fall ein, ist z. B. $y_1 = a y_2 + b y_3$, so hat man

$$y = (a + c_1) y_2 + (b + c_2) y_3 + c_4 y_4 + \dots + c_n y_n,$$

und diese Function enthält nur $(n - 1)$ willkürliche Constante, nämlich $(a + c_1)$, $(b + c_2)$, c_4, c_5, \dots, c_n .

9. In die lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

substituieren wir versuchsweise $y = e^{\lambda x}$, und erhalten

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

Diese Gleichung wird identisch erfüllt, sobald man für λ eine Wurzel der Gleichung nimmt

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, so erhält man n verschiedene particuläre Integrale

$$y = e^{\lambda_1 x}, \quad y = e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad y = e^{\lambda_n x};$$

daher ist das allgemeine Integral

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Sind unter den Wurzeln λ conjugirt complexe, so ersetzt man die Exponentialfunctionen durch goniometrische. Die Methode versagt, wenn die Gleichung für λ zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat; wir werden später sehen, wie man in diesem Falle das allgemeine Integral findet.

10. Der Gleichung

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{a_n}{x^n} y = 0$$

lässt sich durch die Annahme genügen $y = x^\mu$; man erhält durch Substitution dieses Werthes

$$[\mu(\mu - 1) \dots (\mu - n + 1) + a_1 \mu(\mu - 1) \dots (\mu - n + 2) + \dots + a_{n-1} \mu + a_n] x^{\mu-n} = 0,$$

hat also für μ eine Wurzel der Gleichung zu nehmen

$$\mu(\mu - 1) \dots (\mu - n + 1) + a_1 \mu(\mu - 1) \dots (\mu - n + 2) + \dots + a_{n-1} \mu + a_n = 0.$$

Hat diese Gleichung n verschiedene Wurzeln μ_1, \dots, μ_n , so erhält man n particuläre Integrale und aus diesen das allgemeine

$$y = c_1 x^{\mu_1} + c_2 x^{\mu_2} + c_3 x^{\mu_3} + \dots + c_n x^{\mu_n}.$$

11. Kennt man ein particuläres Integral einer reducirten linearen Differentialgleichung n ter Ordnung, so wird das allgemeine Integral aus einer Differentialgleichung $(n - 1)$ ter Ordnung gefunden.

Ist $y = \eta$ das gegebene particuläre Integral, so ist auch $y = c \eta$ ein Integral, wenn c constant ist; es liegt nun nahe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen

man der Gleichung durch einen variablen Werth von c genügen kann. Ersetzen wir c durch z , setzen also $y = z\eta$, so haben wir die höheren Differentialquotienten des Produkts $z\eta$ nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung zu bilden und diese entwickelten Werthe in die Differentialgleichung einzusetzen. Wir erhalten dann eine Differentialgleichung, welche keinen höheren Differentialquotienten von z enthält als $z^{(n)}$. Die Glieder, welche z enthalten, sind

$$(\eta^{(n)} + X_1 \eta^{(n-1)} + X_2 \eta^{(n-2)} + \dots + X_{n-1} \eta' + X_n \eta) z;$$

da nun η ein particuläres Integral ist, so verschwindet der Klammerinhalt, und die Differentialgleichung für z ist somit von der Form

$$z^{(n)} + Pz^{(n-1)} + Qz^{(n-2)} + \dots + Tz'' + Uz' = 0.$$

Setzt man hier

$$\frac{dz}{dx} = v, \quad \text{also} \quad z = \int v dx,$$

so erhält man für v die Gleichung

$$v^{(n-1)} + Pv^{(n-2)} + Qv^{(n-3)} + \dots + Tv' + Uv = 0,$$

also in der That eine Differentialgleichung $(n-1)$ ter Ordnung.

Hat man das allgemeine Integral dieser Gleichung, so wird zu den $(n-1)$ willkürlichen Constanten desselben durch die Integration

$$z = \int v dx$$

noch eine hinzugefügt, und es ist daher

$$y = z\eta$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

12. Dieser Satz führt zunächst dazu, eine reducirte lineare Differentialgleichung II. O. von der Form No. 9 oder No. 10 allgemein zu integrieren, wenn die Gleichungen für λ und μ gleiche Wurzeln haben.

Bei der Gleichung

$$1. \quad y'' - 2ay' + a^2y = 0$$

ergiebt die Substitution $y = e^{\lambda x}$ für λ die Gleichung

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0,$$

also zwei zusammenfallende Wurzeln $\lambda = a$. Macht man nun in 1. die Substitution

$$y = ze^{ax},$$

so erhält man für z die Gleichung

$$z'' = 0, \quad \text{also} \quad z = C_1 x + C.$$

Folglich ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = e^{ax}(C_1 x + C).$$

Setzt man ferner in die Gleichung

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0$$

$y = \mu x$, so erhält man für μ

$$\mu^2 - (1-a)\mu + \frac{(1-a)^2}{4} = 0, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{1-a}{2}.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, haben wir zu setzen

$$y = zx^{\frac{1-a}{2}}$$

und erhalten

$$z' \cdot x^{-\frac{a+1}{2}} + z'' \cdot x^{\frac{1-a}{2}} = 0, \quad \text{oder} \quad z' + xz'' = 0.$$

Hieraus folgt $v = C/x$ und $z = C/x + C_1$; daher ist

$$y = x^{\frac{1-a}{2}}(C/x + C_1)$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung.

13. Hat bei der linearen Differentialgleichung n ter Ordnung mit constanten Coefficienten

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0,$$

die Gleichung für λ

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

r gleiche Wurzeln $\lambda = v$, so liegt es nahe, von dem für Gleichungen zweiter Ordnung erhaltenen Resultate ausgehend zu vermuthen, dass der gegebenen Gleichung durch die Annahme genügt werde

$$1. \quad y = e^{vx} (c x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \dots + c_{r-1}),$$

wobei $c, c_1, c_2, \dots, c_{r-1}$ willkürliche Constante sind.

Um die Richtigkeit dieser Vermuthung nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass, wenn die Function $f(\lambda) = 0$ den Faktor $(\lambda - v)^r$ enthält, alsdann in der Function $f'(\lambda) = 0$ der Faktor $(\lambda - v)^{r-1}$ enthalten ist; denn aus der Voraussetzung

$$f(\lambda) = (\lambda - v)^r \cdot \varphi(\lambda)$$

$$\text{folgt} \quad f'(\lambda) = r(\lambda - v)^{r-1} \cdot \varphi(\lambda) + (\lambda - v)^r \varphi'(\lambda).$$

Wenn daher v eine r -fache Wurzel der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

ist, so sind für $\lambda = v$ auch die Gleichungen erfüllt

$$f'(\lambda) = 0, \quad f''(\lambda) = 0, \quad f^{(r-1)}(\lambda) = 0.$$

Setzt man

$$c x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \dots + c_{r-1} = \varphi,$$

so erhält man

$$e^{-vx} y^{(k)} = v^k \varphi + \binom{k}{1} v^{k-1} \varphi' + \binom{k}{2} v^{k-2} \varphi'' + \dots$$

Substituirt diese für $k = n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$ gebildeten Werthe in die Differentialgleichung und unterdrückt den Faktor e^{vk} , so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \cdot (v^n + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + \dots) \\ &+ \varphi' \cdot \left[\binom{n}{1} v^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_1 v^{n-2} + \binom{n-2}{1} a_2 v^{n-3} + \dots \right] \\ &+ \varphi'' \cdot \left[\binom{n}{2} v^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_1 v^{n-3} + \binom{n-2}{2} a_2 v^{n-4} + \dots \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die Faktoren von $\varphi, \varphi', \varphi'' \dots$ sind der Reihe nach

$$f(v), \quad \frac{f'(v)}{1}, \quad \frac{f''(v)}{1 \cdot 2}, \quad \dots$$

verschwinden daher sämmtlich; folglich ist 1. ein Integral der Differentialgleichung.

14. Der linearen Gleichung zweiter Ordnung

$$1. \quad y'' + \frac{2}{x} y' + k^2 y = 0$$

suchen wir durch eine Potenzreihe zu genügen; setzen wir

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

$$\text{also} \quad y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots,$$

$$y'' = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + 3 \cdot 4A_4 x^2 + \dots,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{2A_1}{x} + 2 \cdot 3A_2 + k^2 A_0 + (3 \cdot 4A_3 + k^2 A_1)x + (4 \cdot 5A_4 + k^2 A_2)x^2 + \dots \\ \dots + [n(n+1)A_n + k^2 A_{n-2}]x^{n-2} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{k^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A_0 \dots,$$

$$\text{allgemein} \quad A_{2n-1} = 0, \quad A_{2n} = \pm \frac{k^{2n}}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} A_0.$$

Daher ist

$$y = A_0 \left(1 - \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right) = \frac{A_0}{k} \cdot \frac{\sin kx}{x}.$$

Dieses Integral ist particulär, da es nur eine willkürliche Constante enthält. Substituiert man in 1.

$$y = z \cdot \frac{\sin kx}{x},$$

so erhält man für z die Gleichung

$$\frac{\sin kx}{x} \cdot z'' + 2 \cdot \frac{k \cos kx}{x} \cdot z' = 0,$$

Diese Differentialgleichung ergibt

$$z' = \frac{C_1}{\sin^2 kx}, \quad z = -\frac{C_1 \cot kx}{k} + C_2.$$

Ersetzt man hier C_1 durch $-kC_1$, so erhält man für das allgemeine Integral von 1.

$$y = \frac{C_1 \cos kx + C_2 \sin kx}{x}.$$

15. Ersetzen wir in der Gleichung

$$2. \quad y'' - (x^2 + 3)y = 0$$

y durch die Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$, so erhalten wir das allgemeine Integral

$$y = A_0 \left(1 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{24} x^4 + \frac{23}{240} x^6 + \dots \right) + A_1 \left(x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \dots \right).$$

In der zweiten eingeklammerten Reihe ist das Bildungsgesetz der Coefficienten zwar nicht allgemein nachgewiesen, nach den ersten vier Gliedern scheint es aber, als sei diese Reihe

$$x \left[1 + \frac{1}{1} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots \right] = x e^{\frac{1}{4} x^2}.$$

Um diese Vermuthung zu prüfen, setzen wir

$$y = x e^{\frac{1}{4} x^2}$$

in die gegebene Differentialgleichung; wir finden leicht, dass derselben genügt wird; mithin haben wir ein particuläres Integral gefunden. Zur Bestimmung des allgemeinen setzen wir

$$x e^{\frac{1}{4} x^2} \cdot z'' + 2 \frac{d}{dx} (x e^{\frac{1}{4} x^2}) z' = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$z' = \frac{C}{x^2} e^{-x^2}, \quad z = C_1 + C \int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx,$$

also ist das allgemeine Integral von 2.

$$y = x e^{\frac{1}{4} x^2} \left(C_1 + C \int \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx \right). *$$

16. Wir wenden uns nun zur Integration einer linearen Differentialgleichung, die nicht reducirt ist; die Integrationsmethode wollen wir zunächst an der Differentialgleichung II. O. zeigen.

*) SCHLOEMILCH, Compendium, Bd. I, § 114.

Um das allgemeine Integral

1. $y'' +$
zu finden, liegt es nahe, zunächst

2. $y' +$
und dann zu versuchen, ob man
kann, dass man in dem allgemein

3. y
die willkürlichen Constanten durch
Diese Methode, das Integral einer
herzustellen, wird als Variation
derselben bereits in § 24 No. 8 an

Setzen wir nun in 1.

4. $y =$
wobei also y_1 und y_2 bekannte Fun

5. $y_1'' + X$
 $y_2'' + X$

so erhalten wir zunächst

6. $u_1(y_1'' + X_1 y_1' + X$
 $+ X_1(u_1' y_1 + u_2' y_2) + 2(u$

Die erste Zeile verschwindet
 u_1 und u_2 die Annahme

7. $u_1' y_1$
so folgt zunächst durch Differentia

8. $u_1' y_1' + u_2'$
Durch 7. und 8. reducirt sich

9. $u_1' y_1$
Aus 7. und 9. folgen nun für

$u_1' = \frac{X y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'}$

Daher ergibt sich

$$u_1 = \int \frac{X y_2 dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} +$$

Das allgemeine Integral d
gleichung zweiter Ordnung is

10. $y = y_1 \int \frac{X y_2 dx}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} +$

Hieraus ist der auch direkt le
meine Integral einer nicht re
zweiter Ordnung wird erhält
Integrale das allgemeine In
Gleichung fügt.

Bei der Verwendung der Form
berücksichtigen, dass

$$\frac{X y_2}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} = X : y_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_1}{y_2} \right)$$

Beispiele. A. Die reducirte

$$y'' +$$

hat bekanntlich die particulären In

$$y_1 = \frac{\cos kx}{x}, \quad y_2 = \frac{\sin kx}{x};$$

daher hat die Gleichung

$$y'' + \frac{2}{x}y' + k^2y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = \frac{\cos kx}{x} \left(C_1 - \frac{1}{k} \int X \sin kx dx \right) + \frac{\sin kx}{x} \left(C_2 + \frac{1}{k} \int X \cos kx dx \right).$$

B. Für die Gleichung

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

haben wir die particulären Integrale

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3;$$

daher ergibt sich für

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = X$$

das allgemeine Integral

$$y = x^2 \left(C_1 - \int x X dx \right) + x^3 \left(C_2 + \int x^2 X dx \right).$$

17. Um das allgemeine Integral der Gleichung

$$1. \quad y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y' + X_n y = X$$

zu erhalten, setzen wir voraus, es sei

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$$

das allgemeine Integral der reducirten Gleichung

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_{n-1} y' + X_n y = 0,$$

und suchen nun $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ als Functionen von x so zu bestimmen, dass

$$2. \quad y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$$

das allgemeine Integral von 1. wird.

Wenn man den Werth 2. und die daraus folgenden Werthe $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ in 1. substituirt, so erhält man eine Gleichung für die n unbestimmten Functionen u_k ; um dieselben zu bestimmen, kann man daher noch $(n-1)$ Gleichungen beliebig annehmen. Wir wählen diese Gleichungen so, dass in den Werthen $y', y'', y''' \dots y^{(n-1)}$ keine Differentialquotienten der u_k vorkommen; alsdann erhält die Differentialgleichung nur die ersten Differentialquotienten dieser Functionen und die Bestimmung derselben wird dadurch thunlichst erleichtert. Aus y folgt zunächst

$$y' = u_1 y_1' + \dots + u_n y_n' + u_1' y_1 + \dots + u_n' y_n.$$

Um Differentialquotienten der u in y' zu vermeiden, setzen wir

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + \dots + y_n u_n' = 0,$$

und erhalten unter dieser Voraussetzung

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_n y_n'.$$

Ferner setzen wir

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' + \dots + y_n' u_n' = 0,$$

und erhalten dadurch

$$y'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \dots + u_n y_n''.$$

So weiter gehend, erhalten wir schliesslich

$$y_1^{(n-2)} u_1' + y_2^{(n-2)} u_2' + \dots + y_n^{(n-2)} u_n' = 0,$$

$$y^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u_n y_n^{(n-1)}.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$y^{(n)} = u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)} \\ + y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \dots + y_n^{(n-1)} u_n'.$$

Setzt man nun diese Werthe für $y, y', y'' \dots y^{(n)}$ in die Differentialgleichung

berücksichtigt,
so erhält man

$$y_1^{(n-1)} u_1'$$

die Unbekannte

$$\begin{aligned} y_1 u_1 \\ y_1' u_1 \\ y_1'' u_1 \\ \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^{(n-2)} u_1' - \\ y_1^{(n-1)} u_1' - \end{aligned}$$

se Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1' &= \chi_1, \\ \chi_2 \dots \chi_n &\text{ beliebig} \\ u_1 &= \int \chi_1 dx + \\ &\text{ist schliesslich da} \\ y &= y_1 \int \chi_1 dx \end{aligned}$$

man ersieht hieraus noch: Das allgemeine Integral einer nicht reducirten linearen Differentialgleichung wird aus einem particulären Integral gefunden, indem man zu diesem das allgemeine Integral der entsprechenden reducirten Gleichung fügt.

Ueberblickt man die soeben vollendete Rechnung, so erkennt man, dass derselbe Gedankengang auch dann förderlich sein wird; wenn man das allgemeine Integral der reducirten Gleichung kennt, sondern nur eine bestimmte Anzahl von particulären Integralen. Sind r particuläre Integrale y_1, \dots, y_r bekannt, zwischen denen keine linearen Identitäten bestehen, so wird das allgemeine Integral der nicht reducirten Gleichung

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_r y_r.$$

gebildet nun die entsprechenden Bedingungsgleichungen für die u_i wie im vorigen Falle; da wir aber nur u_r unbekannte Functionen haben, so dürfen wir der Differentialgleichung nur $(r-1)$ Gleichungen ansetzen. Die Bedingungen

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \dots + y_r u_r' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \dots + y_r' u_r' &= 0, \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \dots + y_r'' u_r' &= 0, \\ \vdots \end{aligned}$$

$$y_1^{(r-2)} u_1' + y_2^{(r-2)} u_2' + \dots + y_r^{(r-2)} u_r' = 0.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} y' &= u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_r y_r', \\ y'' &= u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \dots + u_r y_r'', \\ \vdots \end{aligned}$$

$$y^{(r-1)} = u_1 y_1^{(r-1)} + u_2 y_2^{(r-1)} + \dots + u_r y_r^{(r-1)},$$

oder

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= u_1 y_1^{(r)} + u_2 y_2^{(r)} + \dots + u_r y_r^{(r)} \\ &\quad + u_1' y_1^{(r-1)} + u_2' y_2^{(r-1)} + \dots + u_r' y_r^{(r-1)}, \end{aligned}$$

$$y^{(r)} = \sum u_k y_k^{(r+1)} + 2 \sum u_k' y_k^{(r)} + \sum u_k'' y_k^{(r-1)},$$

$$y^{(r+1)} = \sum u_k y_k^{(r+2)} + 3 \sum u_k' y_k^{(r+1)} + 3 \sum u_k'' y_k^{(r)} + \sum u_k''' y_k^{(r-1)},$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum u_k y_k^{(n)} + \binom{n-r+1}{1} \sum u_k' y_k^{(n-1)} + \binom{n-r+1}{2} \sum u_k'' y_k^{(n-2)} \\ &\quad + \dots + \sum u_k^{(n-r+1)} y_k^{(r-1)}. \end{aligned}$$

Führen wir diese Werthe in die Differentialgleichung ein und beachten dabei, dass $y_1, y_2, \dots y_r$ der reducirten Gleichung genügen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$3. \quad \Sigma P_k u_k' + \Sigma Q_k u_k'' + \dots + \Sigma V_k u_k^{(n-r+1)} = X,$$

worin die $P_k, Q_k, \dots V_k$ bekannte Functionen von x sind. Aus den $(r-1)$ Bedingungsgleichungen 1. können wir die Verhältnisse der $u_1', u_2' \dots u_r'$ finden; drücken wir $u_2' \dots u_r'$ durch u_1' aus, so erhalten wir

$$5. \quad u_2' = A u_1', \quad u_3' = B u_1', \dots u_r' = N u_1'$$

wo nun $A, B, \dots N$ bekannt sind. Diese Gleichungen differenziren wir $(n-r)$ mal und setzen die Resultate in 4. ein. Dadurch entsteht eine Differentialgleichung, die nur u_1 enthält und von der Form ist

$$\alpha u^{(n+r-1)} + \beta u^{(n+r-2)} + \dots + \nu u' = X,$$

worin $\alpha, \beta, \dots \nu$ bekannte Functionen von x sind.

Dies ist eine nichtreducirte lineare Differentialgleichung $(n-r)$ ter Ordnung für den Differentialquotienten u' . Wir erhalten somit: Wenn man r particuläre durch keine lineare Identität verbundene Integrale der Differentialgleichung kennt

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = 0,$$

so hat man zur Bestimmung des allgemeinen Integrals dieser Gleichung eine reducirte lineare Differentialgleichung $(n-r)$ ter Ordnung aufzulösen und dann noch ein einfaches Integral zu berechnen; zur Bestimmung des allgemeinen Integrals der nicht reducirten Gleichung

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = X,$$

hat man die Differentialgleichung $(n-r)$ ter Ordnung zu integrieren, die aus der des reducirten Problems hervorgeht, wenn man auf der rechten Seite X statt 0 setzt, und dann ebenfalls noch ein einfaches Integral auszuführen.

19. Die Methode, an Stelle einer gegebenen Differentialgleichung eine einfachere aufzulösen, und aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung das der gegebenen dadurch abzuleiten, dass man an die Stelle einer oder mehrerer Constanten geeignet gewählte Functionen der Variablen setzt, lässt sich auch in andern Fällen, als in den schon bekannten, mit gutem Erfolge anwenden.

Um zu dem allgemeinen Integrale der Gleichung

$$1. \quad y'' + Xy' + Yy'^2 = 0$$

zu gelangen, in welcher X und Y Functionen von x bez. y allein sind, betrachten wir zunächst die einfachere Gleichung

$$2. \quad y'' + Xy' = 0,$$

zu der wir leicht ein erstes Integral finden

$$3. \quad y' = C e^{-\int X dx}.$$

Wir versuchen nun, z als Function von x so zu bestimmen, dass

$$4. \quad y' = z e^{-\int X dx}$$

ein allgemeines erstes Integral von 1. wird. Aus 4. folgt durch Differentiation

$$5. \quad y'' = e^{-\int X dx} (-zX + z');$$

substituiert man 4. und 5. in 1., so ergibt sich

$$z' + Yz^2 e^{-\int X dx} = 0.$$

Ersetzt man hier s' durch $y'ds : dy$

$$\left(\frac{dz}{dy} + Y \right)$$

Hieraus folgt

$$\frac{dz}{dy} + Yz = 0, \quad ;$$

Führt man dies in 4. ein, so entste

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-f1}$$

In dieser Differentialgleichung I. O erhält das allgemeine Integral der gege

$$\int e^{fYdx} dy = C f,$$

20. An Stelle der Gleichung

$$1. \quad (1 - x^2)y'' - 2x$$

worin X nur x enthält, untersuchen wir

$$2. \quad (1 - x^2)y''$$

diese hat das erste Integral

$$3. \quad y' = 1$$

Setzen wir nun in 1.

$$y' = \frac{2}{1-x^2}, \quad \text{also } y'$$

so erhalten wir

$$s' + X \cdot \frac{1}{(1-x^2)}$$

Hieraus folgt das allgemeine Integr

$$\frac{1}{s^2} = 2 \int \frac{X}{(1-x^2)}$$

und daher schliesslich das allgemeine I

$$y = \int \frac{2}{1-x^2}$$

21. Die soeben behandelte Gleich

$$y'' + X_0 y' +$$

Ein allgemeines erstes Integral von

$$y'' + X$$

ist $y' = Ce$

Sucht man nun der gegebenen Glei

$$y' = 1$$

so erhält man zur Bestimmung von s d

$$s' + X_1 s^n e^{-\phi}$$

Hieraus folgt, sobald n von $+1$ v

$$\frac{1}{n-1} s^{-n+1} = \int X_1$$

Führt man den hieraus folgenden V als Function von x , und gewinnt y dur

22. Das allgemeine Integral der G

$$1. \quad y'' + Y_0 y'^2$$

worin Y_0 und Y_1 Functionen von y allein sind, wird aus einem allgemeinen ersten Integrale der Gleichung gefunden

$$y'' + Y_0 y'^2 = 0.$$

Ersetzt man y'' durch $y' dy' : dy$, so erhält man hieraus

$$\frac{dy'}{y'} = -Y_0 dy$$

und hieraus

$$y' = C e^{-\int Y_0 dy}.$$

Wir suchen nun der gegebenen Gleichung durch

$$2. \quad y' = z e^{-\int Y_0 dy}$$

zu genügen, worin z eine Function von y allein bedeute. Bildet man unter dieser Voraussetzung

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy} = z e^v \left(e^v \frac{dz}{dy} - Y_0 z e^v \right),$$

wobei zur Abkürzung

$$v = -\int Y_0 dy$$

gesetzt worden ist, so erhält man aus 1.

$$z e^{2v} \frac{dz}{dy} + Y_1 z^n e^{nv} = 0.$$

Hieraus folgt

$$3. \quad \frac{dz}{z^{n-1}} + Y_1 e^{(n-2)v} dy = 0,$$

worin die Variablen gesondert sind. Hat man hieraus z als Function von y erhalten, so giebt 2. durch eine Integration x als Function von y . Die beiden Constanten treten bei der Integration der Gleichungen 3. und 2. ein.

23. Mitunter gelingt es, durch Einführung von ein oder zwei neuen Variablen eine Differentialgleichung in eine einfachere überzuführen. Die Gleichung

$$1. \quad y'' = a^2 x - b^2 y$$

lässt sich als nicht reducirte lineare Gleichung integrieren; noch rascher kommt man zum Ziele, wenn man setzt

$$a^2 x - b^2 y = t, \text{ also } -b^2 y'' = t''. \text{ Dadurch erhält man aus 1.}$$

$$t'' = -b^2 t;$$

das allgemeine Integral hiervon ist

$$t = C_1 \cos b x + C_2 \sin b x,$$

daher ist das allgemeine Integral von 1.

$$a^2 x - b^2 y = C_1 \cos b x + C_2 \sin b x^*).$$

§ 26. Differentialgleichungen zwischen mehr als zwei Variabeln. Bestimmte Systeme.

1. Aus der Gleichung zwischen drei Variablen

$$f(x, y, z) = c,$$

worin c eine willkürliche Constante bezeichnet, folgt durch Differentiation

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Diese Gleichung hat man sich durch eine der verschwindenden Grössen dx ,

*; Weitere Ausführungen siehe LACROIX. Traité du calcul differential et du calcul intégral, Paris 1800, 2. vol. Auf die Theorie der singulären Integrale von Gleichungen höherer Ordnung einzugehen, müssen wir uns versagen; man vergl. LACROIX, Traité, 2. vol. No. 667. BOOLE, A Treatise on differential equations, 4. ed. 1. vol. Ch. X.

dy, dz dividirt zu denken, so dass an die
tanten treten, die einen bestimmten Gren:

Ist umgekehrt eine Gleichung gegeben

$$Pdx + Qdy +$$

worin P, Q, R Functionen von x, y, z bez
ein Integral von der Form

$$f(x, y, z)$$

hat, und wie dieselbe gefunden werden ka

2. Sollen alle Werthsysteme von x, y, z

erfüllen

1. $Pdx + Qdy + Rdz = 0$
der Gleichung genügen

2. $f(x, y, z) = c$
so muss 1. mit der durch Differentiation a

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

übereinstimmen, es muss daher einen Fak

3. $vP = \frac{\partial f}{\partial x}, vQ = \frac{\partial f}{\partial y}, vR = \frac{\partial f}{\partial z}$

Berechnet man $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ aus der ersten und zweiten Gleichung, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ aus der zweiten und dritten, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ aus der dritten und ersten und setzt die erhaltenen Werthe einander gleich, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$v \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$v \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \frac{\partial v}{\partial z} - R \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$v \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \frac{\partial v}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Multiplirt man die erste Gleichung mit R , die zweite mit P , die dritte mit Q und addirt, so erhält man nach geeigneter Umstellung folgende v nicht enthaltende Bedingung

$$4. P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0.$$

Soll also die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ durch eine einzige Gleichung $f(x, y, z) = c$ integrabel sein, so müssen die Functionen P, Q, R die Gleichung 4. identisch erfüllen.

3. Die Bedingung ist nicht nur nothwendig sondern auch ausreichend. Wir weisen dies nach, indem wir zugleich zeigen, wie das Integral der vorgelegten Differentialgleichung gefunden werden kann.

Die Werthe von x und y , die der Gleichung No. 2, 1 bei constantem z genügen, erfüllen die Differentialgleichung

$$1. Pdx + Qdy = 0;$$

aus dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung

$$2. V(x, y) = c$$

kann man das Integral der gegebenen Gleichung erhalten, indem man in 2. die Constante c durch eine passend gewählte Function von z ersetzt. Nehmen wir an, $V = \varphi(z)$ sei das Integral der Gleichung

$$3. Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Durch Differentiation folgt aus

4. $V - \varphi(z) = 0$
die Gleichung

$$5. \quad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \varphi' \right) dz = 0.$$

Da nun $V = c$ das allgemeine Integral von 1. ist, so giebt es einen Faktor v von der Beschaffenheit, dass

$$6. \quad vP = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad vQ = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Multipliziert man 3. mit v und berücksichtigt 6., so folgt

$$7. \quad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + vR dz = 0.$$

Der Vergleich von 5. und 7. ergibt

$$8. \quad \frac{\partial V}{\partial z} - vR = \frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

Da hier rechts eine Function von z allein steht, so muss dasselbe auch links der Fall sein.

Durch die Gleichung $V = \varphi(z)$ ist z als Function von V definiert; die Bedingung, dass $\partial V: \partial z - vR$ eine Function von z allein sei, ist daher erfüllt, wenn dieser Ausdruck in Anbetracht der Variablen x und y eine Function von V ist. Die ausreichende Bedingung hierzu ist bekanntlich

$$9. \quad \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR \right) - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - vR \right) = 0.$$

Von dieser Bedingung lässt sich leicht zeigen, dass sie mit No. 2, 4 identisch ist. Durch Ausführung der Differentiationen folgt zunächst aus 9.

$$10. \quad \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - v \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} \right) - R \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

Aus $\frac{\partial V}{\partial y} = vQ, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = vP$ folgt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = v \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = v \frac{\partial P}{\partial z} + P \frac{\partial v}{\partial z};$$

daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= v^2 \left(P \frac{\partial Q}{\partial z} - Q \frac{\partial P}{\partial z} \right), \\ v \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} \right) &= v^2 \left(P \frac{\partial R}{\partial y} - Q \frac{\partial R}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= v \left(P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Da v integrierender Faktor der Gleichung 1. ist, so ist

$$P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x} = v \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Setzt man dies in 10. ein und unterdrückt den Faktor v^2 , so erhält man in der That No. 2, 4.

Um nun $\varphi(z)$ zu erhalten, hat man in 8. links die Variablen x und y durch V zu verdrängen und V durch φ zu ersetzen; man erhält dann eine Differentialgleichung erster Ordnung für φ . Durch das allgemeine Integral dieser Gleichung tritt in das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung eine willkürliche Constante ein.

Beispiel. $a^2 x dx + b^2 y dy - c \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2 - 1} dz = 0.$

Hier ist $v = 2$, $V = a^2 x^2 +$
 $\frac{\partial V}{\partial z} - vR = 2c$

Dies ist eine Function von V , folglich lässt die gegebene Differentialgleichung eine einzelne Integralgleichung zu. Man hat weiter

$$\frac{d\varphi}{dz} = -2R = 2c\sqrt{\varphi - 1};$$

Hieraus folgt

$$cz = \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi - 1}} = \sqrt{\varphi - 1} + c_1,$$

wenn c_1 eine willkürliche Constante ist. Dies ergibt

$$\varphi = (cz - c_1)^2 + 1.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist sonach

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - (cz - c_1)^2 = 1. *)$$

4. Wenn in der Gleichung

$$1. \quad Pdx + Qdy + Rds = 0$$

die Functionen P, Q, R die Bedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

nicht erfüllen, wenn es also keine Flächenfamilie $f(x, y, z, c) = 0$ giebt, die jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs irgend einer der Flächen der Differentialgleichung genügt, so lassen sich doch auf jeder beliebigen Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ unzählige Linien so ziehen, dass jede unendlich kleine Verschiebung eines Punktes längs jeder solchen Curve die Differentialgleichung erfüllt.

Aus der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ möge hervorgehen

$$2. \quad z = f(x, y);$$

hieraus folgt für jede Verschiebung entlang der Fläche φ

$$3. \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Setzt man 2. und 3. in 1. ein, so bleibt eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y ; das allgemeine Integral derselben sei

$$4. \quad \psi(x, y, C) = 0,$$

wobei C eine willkürliche Constante bezeichnet; diese Gleichung giebt eine Schaar von Cylinderflächen, deren Mantellinien der Z -Achse parallel sind; der Schnitt jedes dieser Cylinder mit der Fläche $\varphi = 0$ befriedigt die Gleichung 1.

Man kann nun sagen, die Gleichung 1. sei durch den Verein der beiden Gleichungen 2. und 4. integrirt.

Man kann in diesem Falle die Integralgleichungen auch in folgender Weise darstellen. Ist

$$V(x, y, z) = c$$

das Integral von $Pdx + Qdy = 0$ unter Voraussetzung eines constanten z , so ist

$$5. \quad V(x, y, z) = \varphi(z),$$

worin z eine ganz willkürliche Function von z bedeutet, ein Integral der gegebenen Differentialgleichung für alle Werthe der Variablen x, y, z , welche der Gleichung genügen (No. 3, 8)

$$6. \quad \frac{\partial V}{\partial z} - vR - \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

*) Weitere Beispiele siehe BOOLE, A treatise etc., Ch. XII.

Somit ist die Gleichung durch zwei Gleichungen (5. und 6.) integrirt, die eine willkürliche Function (φ) enthalten.

5. Um die Bedingungen zu erhalten, unter denen die Differentialgleichung zwischen vier Variablen

$$1. \quad Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch eine einzige Gleichung

$$2. \quad t = \varphi(x, y, z)$$

integrirt werden kann, leiten wir aus 1. ab

$$3. \quad dt = -\frac{P}{S}dx - \frac{Q}{S}dy - \frac{R}{S}dz.$$

Die gesuchten Bedingungen ergeben sich zunächst in der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{Q}{S},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{P}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{R}{S},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{Q}{S} = \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{R}{S}.$$

Führt man die Differentiationen aus, und bezeichnet partielle Differentialquotienten nach x, y, z, t durch entsprechende Indices, so erhält man, wenn man die partialen Differentialquotienten von t aus 3. substituirt,

$$4. \quad S(Q_x - P_y) + P(S_y - Q_t) + Q(P_t - S_x) = 0,$$

$$5. \quad S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0,$$

$$6. \quad S(Q_z - R_y) + Q(R_t - S_z) + R(S_y - Q_t) = 0.$$

Reducirt man 1. auf das Differential einer anderen Variablen, als auf dt , so erhält man ausser den Gleichungen 4., 5., 6. noch die Gleichung

$$7. \quad P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist diese Gleichung eine Folge der Gleichungen 4., 5., und 6. enthält also keine neue Bedingung für P, Q, R, S .

6. Wenn die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 erfüllt sind, so wird der Gleichung

$$1. \quad Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch ein einziges Integral genügt. Nimmt man zunächst t als constant an, so geht die Differentialgleichung über in

$$2. \quad Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Da No. 5, 7 erfüllt ist, so lässt diese Gleichung ein einziges Integral zu

$$3. \quad f(x, y, z, t) = c,$$

wobei t als Parameter auftritt, sofern es in P, Q, R enthalten ist, und c die Integrationsconstante bezeichnet. Man kann nun c als Function der Variablen t so bestimmen, dass 3. der gegebenen Differentialgleichung genügt. Denn aus 3. folgt

$$4. \quad f_x dx + f_y dy + f_z dz + f_t dt - \frac{dc}{dt} dt = 0.$$

Da nun 3. das Integral von 2. ist, so ist für einen bestimmten Faktor v

$$5. \quad f_x = vP, \quad f_y = vQ, \quad f_z = vR;$$

ferner ist zufolge 1.

$$Pdx + Qdy + Rdz = -Sdt.$$

Führt man dies in 4. ein, so erhält man

$$-vS + f_t - \frac{dc}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dc}{dt} = -vS + f_t.$$

Soll nun c als Function von t allein bestimmbar sein, so muss die rechte Seite dieser Gleichung eine Function von t und c allein sein, sobald man in derselben z gemäss 3. durch x, y, c, t ausgedrückt substituirt. Dies tritt ein, wenn nach der Substitution der Differentialquotienten der rechten Seite, genommen nach x und y , verschwinden.

Daher hat man, wenn man den Erfolg der Substitution durch die Buchstaben f, v, S andeutet, die Bedingungen

$$6. \quad \frac{\partial}{\partial x}(vS - f_t) = 0,$$

$$7. \quad \frac{\partial}{\partial y}(vS - f_t) = 0.$$

Die Ausführung der Differentiation in 6. ergibt

$$8. \quad v_x S + v S_x + (v_z S + v S_z) z_x - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} z_x = 0.$$

Nun ist zunächst

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = v P_t + v_t P, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = v R_t + v_t R, \\ z_x = -P:R.$$

Führt man dies in 8. ein und multiplicirt mit R , so erhält man

$$S(Rv_x - Pv_z) + v(RS_x - PS_z - RP_t + PR_t) = 0.$$

$$\text{Aus } \frac{\partial v R}{\partial x} = \frac{\partial v P}{\partial z} \text{ folgt}$$

$$Rv_x - Pv_z = v(P_z - R_x);$$

benutzt man dies, so erhält man schliesslich

$$S(P_z - R_x) + P(R_t - S_z) + R(S_x - P_t) = 0,$$

d. i. die Gleichung No. 5, 5. Als ausreichende Bedingung für 7. erhält man ebenso die Gleichung No. 5, 6.

Wenn daher die Bedingungen No. 5, 4. bis 7 erfüllt sind, so ermittele man das Integral

$$9. \quad f(x, y, z, t) = c$$

der Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

und bestimme hierauf c als Function von z aus der Differentialgleichung I. O.

$$\frac{dc}{dt} = vS - f_t;$$

führt man diese Function in 9. ein, so ist 9. das Integral der Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0.$$

7. Bestimmte Systeme simultaner Differentialgleichungen. Unter einem bestimmten Systeme simultaner Differentialgleichungen versteht man ein System von n Gleichungen welche $(n+1)$ Variable und Differentialquotienten von n derselben in Bezug auf eine — die unabhängige Variable — enthalten.

Wir werden zeigen, wie ein solches System durch Differentiation und successive Elimination auf ein System von n Differentialgleichungen reducirt wird, deren jede ausser der unabhängigen Variablen nur eine abhängige und ihre Differentialquotienten enthält.

Sind sämtliche Gleichungen von der ersten Ordnung, so können sie auf die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \quad \frac{dx_3}{dx} \dots \frac{dx_n}{dx}$$

der abhängigen Variablen $x_1, x_2, x_3 \dots, x_n$ reducirt werden; bringt man diese Gleichungen in die Form

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \quad \dots \quad \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X},$$

so kann man sie durch die Proportion ersetzen

$$1. \quad dx_1 : dx_2 : dx_3 : \dots : dx = X_1 : X_2 : X_3 : \dots : X,$$

wo nun keine der n Variablen vor der andern bevorzugt erscheint.

Nach JACOBI werden die Integralgleichungen dieses Systems auf folgendem Wege erhalten:

Man differenzire die Gleichung

$$2. \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}$$

$(n-1)$ mal nach x und ersetze nach jeder Differentiation die Differentialquotienten $dx_k : dx$ durch $X_k : X$; alsdann erhält man mit 2. zusammen n Gleichungen, welche die n Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{d^2x_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3x_1}{dx^3}, \quad \dots \quad \frac{d^nx_1}{dx^n}$$

durch die Variablen x, x_1, \dots, x_n ausdrücken. Eliminiert man hieraus die Variablen x_2, x_3, \dots, x_n , so bleibt eine Differentialgleichung n ter Ordnung, welche nur die Variablen x_1 und x enthält,

$$\varphi\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \dots, \frac{d^nx_1}{dx^n}\right).$$

Die n ersten Integrale dieser Gleichung seien

$$F_1\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_1,$$

$$F_2\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_2,$$

$$F_n\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right) = C_n.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der $(n-1)$ Differentialquotienten von x_1 ausgedrückt durch x, x_1, \dots, x_n ein, so erhält man n Gleichungen mit n willkürlichen Constanten C_1, C_2, \dots, C_n , die Integralgleichungen des Problems.

8. Ehe wir die Betrachtung bestimmter Systeme fortsetzen, ergänzen wir, gestützt auf das in No. 7 Entwickelte, die in No. 1 bis 6 enthaltenen Untersuchungen, indem wir nachweisen:

Wenn die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 nicht erfüllt sind, so wird der Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

durch den Verein zweier Gleichungen genügt, welche eine willkürliche Function enthalten.

Werden die linken Seiten der Gleichungen No. 5, 4 bis 7 der Reihe nach mit $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{P}, \mathfrak{S}$ bezeichnet, so erkennt man die Identität

$$1. \quad -P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S} = 0;$$

daher wird der gegebenen Differentialgleichung durch die Proportion genügt

$$dx : dy : dz : dt = -\mathfrak{P} : \mathfrak{Q} : \mathfrak{R} : \mathfrak{S}.$$

Diese Proportion ist gleichbedeutend mit dem simultanen Systeme

$$\frac{dx}{\mathfrak{P}} = -\frac{dt}{\mathfrak{S}},$$

$$\frac{dy}{\mathfrak{Q}} = \frac{dt}{\mathfrak{S}},$$

$$\frac{dz}{\mathfrak{R}} = \frac{dt}{\mathfrak{S}}.$$

Die Integrale dieser drei Gleichungen seien

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, a, b, c), \\ 3. \quad y &= \psi(t, a, b, c), \\ z &= \chi(t, a, b, c), \end{aligned}$$

wobei a, b, c die Integrationsconstanten bezeichnen.

Durch 3. wird die gegebene Gleichung integriert; diese Lösung des Problems ist aber nur eine particuläre; wir werden zeigen, wie man von ihr zur allgemeinen Lösung übergehen kann, indem man statt der Constanten a, b, c geeignete gewählte Functionen der Variablen setzt.

9. Differenzirt man No. 8, 3. nach allen darin enthaltenen Grössen, so erhält man

$$\begin{aligned} dx &= \varphi_t dt + \varphi_a da + \varphi_b db + \varphi_c dc, \\ 1. \quad dy &= \psi_t dt + \psi_a da + \psi_b db + \psi_c dc, \\ dz &= \chi_t dt + \chi_a da + \chi_b db + \chi_c dc. \end{aligned}$$

Führt man dies in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2. \quad (P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S)dt + \alpha da + \beta db + \gamma dc = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} 3. \quad \alpha &= P\varphi_a + Q\psi_a + R\chi_a, \\ \beta &= P\varphi_b + Q\psi_b + R\chi_b, \\ \gamma &= P\varphi_c + Q\psi_c + R\chi_c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen No. 8, 3 genügen unter Voraussetzung constanter a, b, c den Gleichungen No. 8, 2; folglich ist

$$4. \quad \varphi_t = -\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{E}}, \quad \psi_t = \frac{\Omega}{\mathfrak{E}}, \quad \chi_t = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}},$$

$$P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t + S = \frac{1}{\mathfrak{E}} (-P\mathfrak{P} + Q\Omega + R\mathfrak{N} + S\mathfrak{E}) = 0.$$

Die Gleichung 2. reducirt sich hiernach auf

$$5. \quad \alpha da + \beta db + \gamma dc = 0.$$

Ersetzt man in P, Q, R die Variablen x, y, z gemäss der Gleichungen No. 8, 3 durch t, a, b, c , so enthalten α, β, γ nur noch die Variable t ; diese Variable kommt in α, β, γ nur in einem gemeinsamen Faktor vor.

Wenn in P, Q, R, S die Variablen x, y, z durch t, a, b, c ersetzt sind, so deuten wir dies durch die Buchstaben P, Q, R, S an. Alsdann ist

$$\begin{aligned} 6. \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (P\varphi_a + Q\psi_a + R\chi_a). \\ &= P \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial t} + Q \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial t} + R \frac{\partial^2 \chi}{\partial a \partial t} \\ &\quad + (P_t + P_x \varphi_t + P_y \psi_t + P_z \chi_t) \varphi_a \\ &\quad + (Q_t + Q_x \varphi_t + Q_y \psi_t + Q_z \chi_t) \psi_a \\ &\quad + (R_t + R_x \varphi_t + R_y \psi_t + R_z \chi_t) \chi_a. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$$

wird identisch erfüllt, wenn die Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} x &= \varphi, \quad y = \psi, \quad z = \chi, \\ dx : dy : dz : dt &= \varphi_t : \psi_t : \chi_t : 1. \end{aligned}$$

Wenn man aus diesen Gleichungen x, y, z durch t, a, b, c ausdrückt und in die Differentialgleichung substituirt, so erhält man daher die Identität

$$P\varphi_t + Q\psi_t + R\chi_t = -S.$$

Diese Gleichung ergiebt

$$\begin{aligned}
 & P \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial t} + Q \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial t} + R \frac{\partial^2 \chi}{\partial a \partial t} = -S_a - P_a \varphi_t - Q_a \psi_t - R_a \chi_t \\
 7. \quad & = -S_a - \varphi_t (P_x \varphi_a + P_y \psi_a + Q_z \chi_a) \\
 & \quad - \psi_t (Q_x \varphi_a + Q_y \psi_a + Q_z \chi_a) \\
 & \quad - \chi_t (R_x \varphi_a + R_y \psi_a + R_z \chi_a).
 \end{aligned}$$

Durch Addition von 6. und 7. folgt

$$\begin{aligned}
 8. \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= -S_a + \varphi_a [P_t + \psi_t (P_y - Q_x) + \chi_t (P_z - R_x)] \\
 & \quad + \psi_a [Q_t + \chi_t (Q_z - R_y) + \varphi_t (Q_x - P_y)] \\
 & \quad + \chi_a [R_t + \varphi_t (R_x - P_z) + \psi_t (R_y - Q_z)].
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man 4., sowie die Werthe von \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{S} , so erhält man

$$\begin{aligned}
 P_t + \psi_t (P_y - Q_x) + \chi_t (P_z - R_x) &= \frac{1}{\mathfrak{S}} [\mathfrak{S} P_t + \mathfrak{Q} (P_y - Q_x) + \mathfrak{R} (P_z - R_x)] \\
 &= \frac{1}{\mathfrak{S}} (\mathfrak{S} P_t + (S_x - P_t) [R (P_y - Q_x) + Q (R_x - P_z)] \\
 & \quad + P [(R_t - R_z) (P_y - Q_x) + (S_y - Q_t) (P_z - R_x)]).
 \end{aligned}$$

Benutzt man hierin

$$R (P_y - Q_x) + Q (R_x - P_z) = \mathfrak{S} - P (Q_z - R_y),$$

und setzt zur Abkürzung

$$(P_y - Q_x) (R_t - S_z) + (P_z - R_x) (S_y - Q_t) + (Q_z - R_y) (P_t - S_x) = \Delta,$$

so erhält man

$$P_t + \psi_t (P_y - Q_x) + \chi_t (P_z - R_x) = S_x + \frac{P}{\mathfrak{S}} \Delta.$$

Ebenso folgt

$$Q_t + \chi_t (Q_z - R_y) + \varphi_t (Q_x - P_y) = S_y + \frac{Q}{\mathfrak{S}} \Delta.$$

$$R_t + \varphi_t (R_x - P_z) + \psi_t (R_y - Q_z) = S_z + \frac{R}{\mathfrak{S}} \Delta.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen ergibt sich aus 8.

$$9. \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -S_a + S_x \varphi_a + S_y \psi_a + S_z \chi_a + \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} \alpha.$$

Da nun

$$S_a = S_x \varphi_a + S_y \psi_a + S_z \chi_a,$$

wobei man ebenso wie in 9. nach erfolgter Differentiation x, y, z durch t, a, b, c zu ersetzen hat, so erhält man schliesslich

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\Delta}{\mathfrak{S}}.$$

Integriert man diese Gleichung nach t , so folgt

$$\alpha = \mathfrak{A} e^{\int \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} dt}.$$

Hierbei ist \mathfrak{A} die von t freie Integrationsconstante.

In derselben Weise ergibt sich

$$\beta = \mathfrak{B} e^{\int \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} dt}, \quad \gamma = \mathfrak{C} e^{\int \frac{\Delta}{\mathfrak{S}} dt}.$$

Setzt man diese Werthe für α, β, γ in die Differentialgleichung 5, und unterdrückt den gemeinschaftlichen die Variable t enthaltenden Faktor, so bleibt die Gleichung

$$10. \quad \mathfrak{A} da + \mathfrak{B} db + \mathfrak{C} dc = 0,$$

welche nur a, b, c enthält.

Diese Gleichung lässt nicht ein e
Fall wäre, so könnte man a, b, c aus

$$x = \varphi t$$

$$y = \psi t$$

$$z = \chi t$$

als Functionen von x, y, z, t berechnen und in die ursprüngliche Gleichung einsetzen, man hätte dann die gegebene Differentialgleichung durch ein einziges Integral integrirt, entgegen der Voraussetzung, dass die Bedingungen No. 5, 4 bis 7 nicht erfüllt sind.

Hat man 10. durch zwei Gleichungen integrirt, die eine willkürliche Function enthalten, und substituirt darin a, b, c als Functionen der Variablen, so erhält man die Integralgleichungen der gegebenen Differentialgleichung*).

10. Die in No. 7 entwickelte allgemeine Methode kann man in besonderen Fällen durch einfachere, den besonderen Umständen angepasste Wege ersetzen es gelingt mitunter die Integration einer Differentialgleichung n ter Ordnung durch Integrationen von Gleichungen niederer Ordnung zu ersetzen.

Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + cz + d,$$

$$1. \quad \frac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z + d_1,$$

$$\frac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$

multipliciren wir der Reihe nach mit 1, m, n und addiren; wir erhalten dadurch

$$2. \quad \frac{dx + mdy + ndz}{dt} = Ax + By + Cz + D,$$

worin $A = a + ma_1 + na_2, \quad B = b + mb_1 + nb_2,$
 $C = c + mc_1 + nc_2, \quad D = d + md_1 + nd_2.$

Wir bestimmen nun m und n so, dass

$$A : B : C = 1 : m : n.$$

Alsdann giebt es eine Zahl λ , so dass

$$3. \quad A = \lambda, \quad B = m\lambda, \quad C = n\lambda.$$

Der Verein dieser drei Gleichungen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & a_1 & a_2 \\ b & b_1 - \lambda & b_2 \\ c & c_1 & c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln dieser cubischen Gleichung, so erhält man aus 3. drei zusammengehörige Werthepaare $m_1, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3$. Jedes dieser Paare führen wir in 2. ein und erhalten z. B. für m_1, n_1

$$\frac{dx + m_1 dy + n_1 dz}{dt} = \lambda_1 \left(x + m_1 y + n_1 z + \frac{d + m_1 d_1 + n_1 d_2}{\lambda_1} \right).$$

Hieraus folgt sofort die Integralgleichung

$$\int \left(x + m_1 y + n_1 z + \frac{d + m_1 d_1 + n_1 d_2}{\lambda_1} \right) dt = \lambda_1 t + C_1.$$

*) RAABE, Ueber die Integration der Differentialgleichungen von der Form

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr \quad \text{u. s. w.}$$

CRELLE's Journal, Bd. 14, pag. 123, 1825. Die allgemeine Auflösung des Problems gab PFAFF in den Denkschriften der Berliner Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1814 und 1815.

Vertauscht man hier m_1, n_1, λ_1, C_1 mit m_2, n_2, λ_2, C_2 , bez. m_3, n_3, λ_3, C_3 , so erhält man die drei Integralgleichungen des Problems.

Wenn zwei Wurzeln λ gleich sind, so erhält man auf diesem Wege nicht alle Integralgleichungen; man kann sich in diesem Falle der allgemeinen Methode bedienen.

11. Das Problem, die Gleichungen zu integrieren

$$1. \quad dx:dy:dz = (ax + by + cz + d):(a_1x + b_1y + c_1z + d_1):(a_2x + b_2y + c_2z + d_2),$$

lässt sich auf das soeben behandelte zurückführen. Bezeichnet man die rechts stehenden Polynome der Reihe nach mit M, M_1, M_2 und fügt eine neue Variable t hinzu, welche der Proportion genügt

$$dx:dy:dz:dt = M:M_1:M_2:1,$$

so hat man für x, y, z, t dieselben Gleichungen, wie in No. 10. Hat man diese integriert, und eliminirt dann aus zwei Paaren der drei Integralgleichungen die Hilfsvariable t , so erhält man die beiden Integralgleichungen des Problems.

Macht man in den Gleichungen

$$2. \quad \frac{a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau}{d\xi + b\eta + c\zeta + d\tau} = \frac{d\eta}{a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau} = \frac{d\zeta}{a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau} = \frac{d\tau}{a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau}$$

die Substitutionen

$$\xi = x\tau, \quad \eta = y\tau, \quad \zeta = z\tau,$$

worin x, y, z neue Variable sind, so erhält man zunächst

$$\frac{\tau dx + x d\tau}{A} = \frac{\tau dy + y d\tau}{B} = \frac{\tau dz + z d\tau}{C} = \frac{d\tau}{D},$$

$$\text{wobei } A = ax + by + cz + d, \quad B = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ C = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \quad D = a_3x + b_3y + c_3z + d_3.$$

Aus den vorigen Gleichungen erhält man

$$\frac{\tau dx}{A - xD} = \frac{\tau dy}{B - yD} = \frac{\tau dz}{C - zD},$$

und hieraus durch Division mit τ das System

$$3. \quad \frac{dx}{A - xD} = \frac{dy}{B - yD} = \frac{dz}{C - zD}.$$

Die Integralgleichungen dieses Systems werden somit erhalten, indem man das System 2. integriert und alsdann ξ, η, ζ durch $x\tau, y\tau, z\tau$ ersetzt, und τ zwischen zwei unabhängigen Paaren der drei Integralgleichungen von 2. eliminirt.

Auf demselben Wege kommt man zum Ziele, wenn die Differentialgleichungen ebenso gebaut sind, wie in No. 6 und 7, aber mehr Variable enthalten.

12. Um die Gleichungen zu integrieren*)

$$\frac{dx}{dt} + Px + Qy = V,$$

$$\frac{dy}{dt} + P'y + Q'y = V',$$

in denen P, P', Q, Q', V, V' nur die unabhängige Variable t enthalten, multipliciren wir die zweite mit einer noch unbestimmten Function z der unabhängigen Variablen und addiren dann beide Gleichungen; dies ergibt

$$1. \quad \frac{dx}{dt} + z \frac{dy}{dt} + (P + zP')x + (Q + zQ')y = V + zV'.$$

*) STURM, Cours d'Analyse, No. 633; LACROIX, Traité, Bd. II. pag. 383.

Setzen wir nun $r = x + zy$, so

$$\frac{dx}{dt} + z \frac{dz}{dt}$$

und aus 1. wird

$$2. \quad \frac{dr}{dt} - y \frac{dz}{dt} + (P + zP')(r -$$

Bestimmen wir nun z so, dass

$$3. \quad \frac{dz}{dt} + (P + zP')$$

so geht die Gleichung 2. über in

$$4. \quad \frac{dr}{dt} + (P + zP')$$

Die Gleichung 3. enthält nur z und t und ist erster Ordnung. Sind z_1 und z_2 zwei particuläre Integrale dieser Gleichung, so setze man jedes derselben in 4. ein; man erhält dann zwei lineare Differentialgleichungen I. O. für r , und gewinnt daraus zwei Integrale $r = r_1$ und $r = r_2$, jede mit einer willkürlichen Constanten; hieraus ergeben sich schliesslich die Integralgleichungen des Problems

$$x + z_1 y = r_1, \quad x + z_2 y = r_2.$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} x' + 5x + y &= t, \\ y' - x + 3y &= t^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung für z ist

$$z' + 2z - z^2 - 1 = 0,$$

und ergibt das allgemeine Integral

$$z = \frac{1}{e^{-t} - 1} + 1.$$

Für $e = \infty$ und $e = 0$ erhält man die particulären Integrale

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{t-1}{t};$$

daher ergeben sich für die zugehörigen r_1 und r_2

$$\begin{aligned} r_1' + 4r_1 &= t + t^2, \\ r_2' + \frac{4t+1}{t} r_2 &= t^3. \end{aligned}$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind

$$\begin{aligned} r_1 &= e^{-4t} [C_1 + \int (t + t^2) e^{4t} dt], \\ r_2 &= \frac{1}{t} e^{-4t} (C_2 + \int t^3 e^{4t} dt). \end{aligned}$$

Beide Integrale lassen sich nach früher mitgetheilten Regeln (§ 5, No. 2) leicht ausführen.

Die Endgleichungen des Problems sind

$$x + y = r_1, \quad tx + (t-1)y = tr_2,$$

aus welcher man noch, wenn erwünscht, jede der beiden abhängigen Variablen x und y durch t allein ausdrücken kann.

13. Simultane Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung werden durch einen sehr einfachen Kunstgriff auf Systeme von Gleichungen erster Ordnung reducirt.

Um die höheren Differentialquotienten z. B. der abhängigen Variablen x in Bezug auf die unabhängige t zu beseitigen, fügt man neue Variable $x_1, x_2, x_3 \dots$ durch die Gleichungen erster Ordnung hinzu

$$1. \quad \frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^3x}{dt^3} = x_3, \dots$$

Statt der Differentialquotienten x'' , x''' , . . . $x^{(n)}$ des ursprünglichen Systems hat man in dem neuen Systeme, das aus den durch die Substitutionen 1. modifizierten gegebenen Gleichungen und den Gleichungen 1. besteht, die Variablen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} und deren erste Differentialquotienten. In gleicher Weise beseitigt man die höheren Differentialquotienten der übrigen abhängigen Variablen.

Hierauf integriert man das neue System, und eliminirt dann die neu eingeführten Variablen.

Hat man z. B. zwei Gleichungen zwischen den abhängigen Variablen x, y und der unabhängigen t , und sind die höchsten Differentialquotienten die in beiden Gleichungen vorkommen

$$\frac{d^m x}{dt^m} \quad \text{und} \quad \frac{d^n y}{dt^n},$$

so erhält man auf dem angegebenen Wege

$$2 + (m-1) + (n-1) = m + n$$

Gleichungen erster Ordnung zwischen $(m+n+1)$ Variablen; hieraus erhält man $(m+n)$ Integralgleichungen, mit zusammen $(m+n)$ willkürlichen Constanten. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die neu eingeführten Variablen, deren Anzahl $(m+n-2)$ ist, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y , und t , die Lösungen des Problems.

Wie immer, wird man auch hier in jedem gegebenen Falle die allgemeine Methode zu vermeiden und kürzere Wege zu entdecken suchen. Man wird sich bemühen, durch geschickte Combination der Differentialgleichungen neue Gleichungen zu erhalten, deren Integrale bekannt sind.

14. Wir geben hierzu ein Beispiel aus der theoretischen Mechanik. Die Theorie der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes oder eines Systems von Massenpunkten (z. B. eines starren Körpers) ist nur ein Theil der Theorie simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung; und umgekehrt hat die Theorie von Systemen gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch das Interesse, welches die theoretische Mechanik an ihnen nahm, wesentlich an Ausbau gewonnen. Wir ziehen es vor, ohne auf die Feststellung der mechanischen Begriffe und die Begründung der Differentialgleichungen an dieser Stelle einzugehen, letzteren ihre mechanische Einkleidung vollständig zu belassen; losgelöst von derselben würden die Untersuchungen und Resultate an Anschaulichkeit sehr verlieren und zu abstract erscheinen.

Wenn ein freibeweglicher Massenpunkt P , dessen Coordinaten x, y, z sind, von einem festen Centrum O , dem Nullpunkte des Coordinatensystems, angezogen oder abgestossen wird, und zwar so, dass die Anziehungskraft nur von der Entfernung $OP = r$ abhängt, und wenn dieselbe beim Abstände r die Grösse $f(r)$ hat, so gelten für die Coordinaten des Punktes die Differentialgleichungen

$$1. \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{x}{r},$$

$$2. \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{y}{r},$$

$$3. \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = f(r) \cdot \frac{z}{r}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz , so erhält man, wenn man $dx:dt, dy:dt, dz:dt$, die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes, mit x', y', z' bezeichnet,

$$\left(x' \frac{dx'}{dt} + y' \frac{dy'}{dt} + z' \frac{dz'}{dt} \right) dt = \frac{f(r)}{r} (x dx + y dy + z dz).$$

Die linke Seite ist das vollständige Differential von

$$\frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

die rechte Seite ist ebenfalls ein vollständiges Differential, denn man hat

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ also } x dx + y dy + z dz = r dr.$$

Hieraus erhält man folgendes erste Integral des Systems

$$4. \quad (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2 \int f(r) dr + h,$$

wobei h die willkürliche Constante ist.

Bezeichnen v die Geschwindigkeit des Punktes und φ, ψ, χ die Winkel, die sie augenblicklich mit den Achsen bildet, so ist

$x' = v \cos \varphi, y' = v \cos \psi, z' = v \cos \chi$, also $x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2$; daher kann man 4. ersetzen durch

$$5. \quad v = 2 \int f(r) dr + h.$$

Nach welchem Gesetze daher auch die Einwirkung des Centrums auf den bewegten Punkt P erfolgen, und in welcher Richtung und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit derselbe seinen Lauf beginnen mag, immer ist die Geschwindigkeit nur eine Function des Radius vector r ; wenn sich der Punkt im Laufe der Bewegung wiederholt in demselben Abstände von O befindet, so hat er in allen diesen Momenten dieselbe Geschwindigkeit.

Man kann noch auf anderem Wege zu ersten Integralen des Systems gelangen. Multiplicirt man 1. mit y , 2. mit x und subtrahirt, so ergibt sich

$$6. \quad xy'' - yx' = 0.$$

Da nun

$$\frac{d}{dt}(xy' - yx') = xy'' + x'y' - yx'' - y'x' = xy'' - yx'',$$

so folgt aus 6. durch Integration

$$7. \quad xy' - yx' = c;$$

ebenso erhält man die Integrale

$$8. \quad yz' - zy' = c_1,$$

$$9. \quad zx' - xz' = c_2,$$

wobei c, c_1, c_2 willkürliche Constante sind.

Multiplicirt man die Gleichungen 7., 8., 9. der Reihe nach z, x, y und addirt, so erhält man links identisch Null; daher folgt die Gleichung

$$c_1 x + c_2 y + cz = 0.$$

Dies ergibt: Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, die durch das Anziehungscentrum geht.

Wählt man diese Ebene zur XY -Ebene, so bleiben für das Problem nur die beiden Differentialgleichungen

$$10. \quad x'' = f(r) \cdot \frac{x}{r}, \quad y'' = f(r) \cdot \frac{y}{r},$$

wobei

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

und die beiden ersten Integrale

$$11. \quad v^2 = 2 \int f(r) dr + h,$$

$$12. \quad xy' - yx' = c.$$

Die letzte Gleichung vereinfacht sich durch Einführung von Polarcoordinaten. Man hat

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & x' &= r' \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi' \\ y &= r \sin \varphi, & y' &= r' \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi'. \end{aligned}$$

Daher ist

$$v^2 = r'^2 + r^2 \varphi'^2,$$

$$x y' - y x' = r^2 \varphi'.$$

Ist df der verschwindend kleine Sector, den der Radius r in der Zeit dt beschreibt, so ist $2df = r^2 d\varphi$, daher folgt aus 13.

$$\frac{df}{dt} = \frac{c}{2}, \quad f = \frac{c}{2}t + C.$$

Die vom Radius vector des Punktes beschriebenen Flächen sind daher den hierbei verflossenen Zeiten proportional.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int f(r) dr = U,$$

und führt auch in 11. Polarcoordinaten ein, so entsteht

$$13. \quad r'^2 + r^2 \varphi'^2 = 2U + h.$$

Nach 12. hat man $r^2 \varphi'^2 = c^2 : r^2$, daher folgt aus 12.

$$r'^2 = 2U + h - \frac{c^2}{r^2};$$

hieraus ergibt sich

$$14. \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}, \quad t = \int \frac{dr}{\sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_1,$$

und aus 14. und 12,

$$15. \quad d\varphi = \frac{c dt}{r^2} = \frac{c dr}{r^2 \sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}}, \quad \varphi = c \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2U + h - \left(\frac{c}{r}\right)^2}} + \gamma_2.$$

Durch diese Gleichungen ist das Problem vollständig gelöst; insbesondere giebt die letzte Gleichung die Bahn, welche der Punkt beschreibt; die Constanten h , c , γ_1 und γ_2 bestimmen sich in jedem gegebenen Falle aus der Anfangslage, der Anfangsgeschwindigkeit und der Anfangsrichtung des Punktes, Setzt man nämlich fest, dass zur Zeit $t = 0$ die Grössen r , φ , v die Werthe r_0 , φ_0 , v_0 haben sollen, und dass zu dieser Zeit die Bahn mit dem Radius r_0 den Winkel α bilden soll, so erhält man durch Einführung der Werthe r_0 und v_0 in 11. und 14. die Constanten h und γ_1 . Berechnet man aus der Bahngleichung 15. den Winkel σ der Bahntangente gegen den Radius vector, für welchen man hat

$$16. \quad \text{tang} \sigma = r : \frac{dr}{d\varphi},$$

und setzt in 15. und 16. $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\sigma = \alpha$, sowie den vorher gefundenen Werth von h , so erhält man c und γ_2 durch die Anfangszustände ausgedrückt.

§ 27. Partiale Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Unter einer partialen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen unabhängigen Variablen, abhängigen Variablen und den partialen Differentialquotienten der letzteren. Wir beschränken uns auf Gleichungen mit einer abhängigen Variablen.

2. Wenn eine partiale Differentialgleichung nur partiale Differentialquotienten rücksichtlich einer unabhängigen Veränderlichen enthält, so bietet sie nichts wesentlich Neues; sie ist zu integrieren, als ob die übrigen Variablen Constante wären; die Integrationsconstanten sind durch willkürliche Functionen der übrigen unabhängigen Variablen zu ersetzen.

Beispiele. A.

Die Gleichung

liefert

wobei die Function f unbestimmt

$$B. \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Setzt man hier $z = e$ welche die Wurzeln $m_1 =$

es enthält zwei willkürliche

3. Ehe wir an die I
herantreten, werfen wir ein
den einfachsten Fall, eine
wir x und y als unabhängige

Eine partielle Differentialgleichung
zweier willkürlichen
 $f(x, y, z, a, b) = 0$ und

Eliminirt man a und

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

so erhält man in der That
 $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ enthält

Enthält eine Gleichung
 $g(a, b, c) = 0$ verbunden
indem man a, b, c aus der

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} +$$

eliminiert.

Beispiele: A. Eine
Ebene, die die Gleichung

$$f =$$

wobei die Constanten A, B, C

$$g = Ax + By + Cz - 1 = 0.$$

Um die zugehörige partielle Differentialgleichung zu erhalten, hat man A, B, C
aus den Gleichungen zu eliminieren

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz - 1 &= 0, \\ A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma &= 0, \\ A + Cp &= 0, \\ B + Cq &= 0, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt wird.

Die Elimination ergibt die Gleichung

$$\cos \alpha \cdot p + \cos \beta \cdot q - \cos \gamma = 0.$$

B. Eine Ebene, die einen gegebenen Punkt l, m, n enthält, hat die Gleichung

$$f = Ax + By + Cz - 1 = 0,$$

wobei für die Constanten A, B, C die Gleichung besteht

$$g = Al + Bm + Cn - 1 = 0.$$

Die Elimination erfolgt aus diesen beiden Gleichungen und aus

$$A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0.$$

Da $f - g \equiv A(x - l) + B(y - m) + C(z - n) = 0$, so hat man, um die resultirende Gleichung zu gewinnen, nur in der Schlussgleichung des vorigen Beispiels $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ der Reihe nach durch $x - l$, $y - m$, $z - n$ zu ersetzen; man erhält

$$(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0.$$

C. Für Ebenen, die eine Kugel berühren, deren Halbmesser e ist, und dessen Centrum die Coordinaten a , b , c hat, erhält man das System

$$Ax + By + Cz - 1 = 0, \quad A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0;$$

$$Aa + Bb + Cc - 1 = e \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt

$$C = 1 : (z - xp - yq), \quad A = -p : (z - xp - yq), \quad B = -q : (z - xp - yq).$$

Setzt man dies in die letzte ein, so entsteht

$$(x - a)p + (y - b)q - (z - c) = e \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

D. Die Gleichung einer Kugel

$$1. \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

enthält vier Constante a , b , c , r . Liegt das Centrum auf einer gegebenen Geraden, so sind a , b , c durch zwei lineare Gleichungen verbunden

$$2. \quad a = mc + n, \quad b = \mu c + \nu.$$

Durch Differentiation der Kugelgleichung folgt

$$3. \quad x - a + (z - c)p = 0,$$

$$y - b + (z - c)q = 0.$$

Setzt man hier für a und b die Werthe aus 3. ein und vergleicht die resultirenden Werthe für c , so erhält man schliesslich

$$(\mu z - y + \nu)p - (mz - x + n)q + \mu(x - \nu) - m(y - \nu) = 0.$$

4. Eine partielle Differentialgleichung I. O. entsteht ferner, wenn man aus einer Gleichung $F[x, y, z, \varphi(\psi)] = 0$, — worin F und ψ bekannte Functionen sind und φ eine willkürliche Function von ψ bezeichnet, — sowie aus ihren partialen Ableitungen die willkürliche Function φ eliminirt.

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) p = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) q = 0,$$

oder besser geordnet

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q \right) = 0.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\psi}$, so erhält man

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) q + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) p + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

oder in Determinantenform

$$1. \quad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist bemerkenswerth, dass diese Gleichung in Bezug auf p und q linear ist.

5. Die willkürliche Function kann auch in anderer Verbindung auftreten. Aus der Gleichung

$$\Phi(f, g) = 0,$$

worin f und g bekannte Functionen von x, y und z sind, während Φ eine willkürliche Function ist, folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} p \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} q \right) = 0.$$

Die Elimination von Φ giebt die partielle Differentialgleichung

$$2. \quad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die gegebene Function g einer willkürlichen Function φ der gegebenen f gleich, so dass also $g = \varphi(f)$, so kommt man zu dem vorigen Falle zurück; denn aus $\Phi(f, g) = 0$ folgt, dass g eine willkürliche Function von f ist.

6. Partiale Differentialgleichung der Cylinderflächen. Sind α, β, γ die Richtungswinkel der Mantellinien, so ist die Gleichung des Cylinders von der Form (Differentialrechn. § 6, 2)

$$\Phi(x \cos \gamma - z \cos \alpha, y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0.$$

Setzt man in No. 5, 2.

$$f = x \cos \gamma - z \cos \alpha, \quad g = y \cos \gamma - z \cos \beta,$$

so erhält man

$$\frac{1}{\cos \gamma} \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \cos \gamma & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & \cos \gamma & -\cos \beta \end{vmatrix} = \cos \alpha \cdot p + \cos \beta \cdot q - \cos \gamma = 0.$$

7. Partiale Differentialgleichung der Kegelflächen. Es seien l, m, n die Coordinaten der Kegelspitze, so ist die allgemeine Form der Kegelgleichung (Differentialrechnung § 6, 3)

$$\Phi \left(\frac{lz - nx}{z - n}, \frac{mz - ny}{z - n} \right) = 0.$$

Setzt man in 2.

$$f = \frac{lz - nx}{z - n}, \quad g = \frac{mz - ny}{z - n},$$

also $\frac{\partial f}{\partial z} = n \frac{x - l}{(z - n)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = n \frac{y - m}{(z - n)^2},$ so entsteht

$$\frac{(z - n)^3}{n^2} \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ -\frac{n}{z - n} & 0 & \frac{n(x - l)}{(z - n)^2} \\ 0 & -\frac{n}{z - n} & \frac{n(y - m)}{(z - n)^2} \end{vmatrix} = (x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0.$$

8. Partiale Differentialgleichung der Rotationsflächen. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass die Achse der Fläche durch den Nullpunkt des Coordinatensystems geht. Construiert man um den Nullpunkt Kugeln, und normal zur Rotationsachse Ebenen, und setzt irgend eine Abhängigkeit zwischen dem Kugelradius a und dem Abstände b einer Normalebene zur Achse vom Nullpunkte voraus, so erfüllen die gemeinsamen Punkte der Kugeln und der zugehörigen

Ebenen eine Rotationsfläche. Die Gleichung einer Kugel um den Nullpunkt ist $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, und die Gleichung einer Normalebene zur Achse $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = b$, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Achse sind; daher ist die allgemeinste Form der Gleichung einer Rotationsfläche

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2, x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = 0.$$

Wir haben daher in No. 5, 2.

$$f = x^2 + y^2 + z^2, \quad g = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

zu setzen und erhalten

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

9. Wenn eine Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ zwei willkürliche Constante enthält, und wenn diese Gleichung im Verein mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$$

durch Elimination von a und b auf die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

führt, so wird $f = 0$ als vollständiges Integral der partialen Differentialgleichung I. O. $F = 0$ bezeichnet.

Wir wollen nun zunächst sehen, ob ähnlich wie die singulären Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen so auch neue Lösungen der Gleichung $F = 0$ dadurch erhalten werden, dass man die Constanten a und b durch passend gewählte Functionen von x und y ersetzt.

Wir denken uns für diese Untersuchung das vollständige Integral auf z reducirt, also von der Form

$$1. \quad z = f(x, y, a, b).$$

Sind a und b variabel, so erhält man durch Differentiation

$$2. \quad \begin{aligned} p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x}, \\ q &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y}. \end{aligned}$$

Sollen diese Gleichungen mit denen übereinstimmen, die aus 1. unter Voraussetzung constanter a und b hervorgehen, so müssen a und b den Bedingungen genügen

$$3. \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$4. \quad \frac{\partial f}{\partial a} \cdot D = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} \cdot D = 0,$$

wobei

$$D = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Um den Gleichungen 3. zu genügen, hat man zu setzen: entweder

$$5. \quad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

oder

$$6. \quad D = 0,$$

wobei die Gleichungen 3. sich auf eine reduciren, die mit 6. zu combiniren ist; oder

$$7. \quad \frac{\partial f}{\partial a} =$$

Die Annahme 5. führt auf constante Werthe von a und b , also auf das vollständige Integral zurück.

Wenn die Bedingung $D = 0$ erfüllt ist, so ist b eine Function von a ; setzen wir $b = \varphi(a)$, so ist

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \varphi'(a) \cdot \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \varphi'(a) \frac{\partial a}{\partial y},$$

daher gehen beide Gleichungen 3. in die Gleichung über

$$8. \quad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \varphi'(a) = 0,$$

in welcher b durch $\varphi(a)$ zu ersetzen ist.

Die Elimination von a aus den Gleichungen 8. und 1. kann nur in seltenen Fällen ohne eine bestimmte Annahme über die willkürliche Function φ erfolgen.

Das Integral der partialen Differentialgleichung, welches aus dem Verein der Gleichungen 1., $b = \varphi(a)$ und 8. besteht, und welches durch das Auftreten einer willkürlichen Function φ charakterisirt ist, heisst das allgemeine Integral der Gleichung.

Durch Elimination von a und b aus den Gleichungen 1. und 7. erhält man ein singuläres Integral der Differentialgleichung

Beispiel. Nach No. 6 hat die Gleichung

$$9. \quad \cos \alpha \cdot p + \cos \beta \cdot q - \cos \gamma = 0$$

das vollständige Integral

$$10. \quad Ax + By + Cz - 1 = 0,$$

wobei die Constanten A, B, C durch die Gleichung verbunden sind

$$11. \quad A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0.$$

Durch Elimination von C aus 10. und 11. entsteht

$$12. \quad (Ax + By) \cos \gamma - (A \cos \alpha + B \cos \beta) z - \cos \gamma = 0,$$

also ist

$$z = \frac{Ax + By - 1}{A \cos \alpha + B \cos \beta} \cdot \cos \gamma.$$

Setzt man hier

$$\frac{1}{A \cos \alpha + B \cos \beta} = a, \quad \frac{A}{A \cos \alpha + B \cos \beta} = b,$$

so erhält man

$$\frac{B}{A \cos \alpha + B \cos \beta} = \frac{1 - b \cos \alpha}{\cos \beta},$$

und daher

$$\frac{1}{\cos \gamma} \cdot z = -a + bx + \frac{1 - b \cos \alpha}{\cos \beta} y.$$

Für die Gleichung 8. erhält man hier

$$-1 + \frac{x \cos \beta - y \cos \alpha}{\cos \beta} \varphi'(a) = 0.$$

Denkt man sich für φ irgend eine Function gesetzt und die Gleichung nach a aufgelöst, so erhält man jedenfalls a in der Form

$$a = \psi(x \cos \beta - y \cos \alpha),$$

wo nun ψ ebenso willkürlich ist wie φ ; setzt man dies in $\varphi(a)$ ein, so erfolgt für b

$$b = \chi(x \cos \beta - y \cos \alpha),$$

wobei aber χ durch ψ bestimmt ist. Beide Werthe für a und b setzen wir in das vollständige Integral und erhalten

$$\frac{z}{\cos \gamma} = -\psi + \frac{1}{\cos \beta} (x \cos \beta - y \cos \alpha) \gamma + \frac{y}{\cos \beta}.$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite sind zusammen eine willkürliche Function von $(x \cos \beta - y \cos \alpha)$; daher hat man

$$13. \quad z \cos \beta - y \cos \gamma = f(x \cos \beta - y \cos \alpha),$$

wobei f eine willkürliche Function bezeichnet. Aus

$$x \cos \beta - y \cos \alpha = \frac{1}{\cos \gamma} [(x \cos \gamma - z \cos \alpha) \cos \beta + (z \cos \beta - y \cos \gamma) \cos \alpha]$$

erkennt man, dass man 13 ersetzen kann durch

$$\Phi(x \cos \gamma - z \cos \alpha, z \cos \beta - y \cos \gamma) = 0,$$

wobei Φ eine willkürliche Function ist, in Uebereinstimmung mit No. 6.

Da in unserm Beispiele

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\cos \gamma,$$

so kann es kein singuläres Integral geben.

10. Wenn eine Gleichung $z = g(x, y)$ die partiale Differentialgleichung I. O. $F(x, y, z, p, q) = 0$ befriedigt, und nicht durch besondere Werthe für a und b aus einem vollständigen Integrale $z = f(x, y, a, b)$ hervorgeht, so gehört diese Gleichung zu dem vollständigen Integrale entweder als allgemeines oder als singuläres Integral.

Denn wenn man $f(x, y, a, b)$ nicht durch Specialisirung der Constanten a und b in $g(x, y)$ verwandeln kann, so kann man doch jedenfalls für a und b solche Functionen von x und y setzen, dass $f(x, y, a, b) = g(x, y)$ wird.

Aus den Untersuchungen in No. 5. folgt hieraus sofort, dass $g(x, y)$ entweder ein zu f gehöriges allgemeines oder singuläres Integral ist.

Ein vollständiges Integral, das dazu gehörige allgemeine sowie das zugehörige singuläre Integral bilden also ein vollständiges Lösungs-System einer partialen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen.

11. Wir wenden uns nun zur Integration der linearen partialen Differentialgleichungen I. O.; und zwar zunächst zu Gleichungen mit zwei unabhängigen Variablen. Unter einer linearen Gleichung versteht man eine solche, in welcher die partialen Differentialquotienten der abhängigen Variablen nur in der ersten Potenz vorkommen; bei drei Variablen also eine Gleichung von der Form

$$1. \quad P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

wobei P, Q, R constant oder Functionen von x, y, z sind.

Die Integration dieser Gleichung hängt auf's Engste mit der Integration de Systems zusammen

$$2. \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Hat man nämlich ein Integral $f(x, y, z) = a$ dieses Systems gefunden, wobei a eine willkürliche Constante bezeichnet, so ist für alle Werthe, die dieser Gleichung genügen

$$3. \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Da nun f ein Integral von 2. ist, so erfüllen die x, y, z, dx, dy, dz , die der Gleichung 3. genügen, auch die Gleichungen 2., man kann daher in 3. die Differentiale dx, dy, dz der Reihe nach durch die Functionen P, Q, R ersetzen, denen sie nach 2. proportional sind; folglich hat man

$$4. \quad P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Da nun

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z},$$

so kann man 4. ersetzen durch

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} - R = 0.$$

Hieraus folgt, dass $f(x, y, z) = a$ ein particuläres Integral von 1 ist.

Dieselbe Schlussweise kann auch rückwärts durchlaufen werden: Ist $f(x, y, z) = a$ ein Integral der Gleichung $Pp + Qq - R = 0$, so ist es auch ein Integral des Systems 2.

Sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale des Systems 2., so ist das allgemeine Integral der Gleichung 1.

$$\Phi(f, g) = 0,$$

wobei Φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass Φ der Differentialgleichung genügt

$$5. \quad P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

die an die Stelle von 1. tritt, wenn z durch die Gleichung $\Phi = 0$ als unentwickelte Function von y und x bestimmt ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}, \end{aligned}$$

folglich hat man

$$\begin{aligned} P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f} \left(P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} \right) &+ \frac{\partial \Phi}{\partial g} \left(P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \frac{\partial g}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Da nun nach der Voraussetzung die beiden rechts stehenden eingeklammerten Polynome verschwinden, so folgt, dass in der That die Gleichung 5. erfüllt ist.

Wir haben somit folgende Regel: Um die Gleichung zu integrieren

$$Pp + Qq = R,$$

bilde man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R};$$

sind $f(x, y, z) = a$ und $g(x, y, z) = b$ zwei Integrale dieses Systems, so ist

$$\Phi(f, g) = 0$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

12. Sind $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$, und $h(x, y, z) = c$ particuläre Integrale von

$$Pp + Qq = R,$$

so ist h eine Function von f und g .

Nach der Voraussetzung gelten die Gleichungen

$$P \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{\partial h}{\partial y} + R \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned} P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} &= 0, \\ P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \frac{\partial g}{\partial z} &= 0; \end{aligned}$$

daher verschwindet die Determinante derselben

$$1. \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

folglich ist h eine Function von f und g (Differentialrechnung § 4, No. 5).

Die Gleichung $h(f, g) = c$ fällt unter $\Phi(f, g) = 0$; es ist also jede Lösung der partialen linearen Differentialgleichung in der Form $\Phi(f, g) = 0$ enthalten.

13. Wir geben hierzu einige Beispiele.

A. Um die Gleichung zu integrieren

$$\cos \alpha \cdot p + \cos \beta \cdot q - \cos \gamma = 0$$

bilde man das System

$$dx : dy : dz = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma.$$

Zwei Integralgleichungen desselben sind

$$x \cos \gamma - z \cos \alpha = c_1, \quad y \cos \gamma - z \cos \beta = c_2;$$

daher ist das allgemeine Integral der partialen Gleichung

$$\Phi(x \cos \gamma - z \cos \alpha, y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0.$$

B. $(x - l)p + (y - m)q - (z - n) = 0.$

Hierzu gehört das System

$$dx : dy : dz = (x - l) : (y - m) : (z - n),$$

mit den Integralgleichungen

$$\frac{x - l}{z - n} = c_1, \quad \frac{y - m}{z - n} = c_2.$$

Das allgemeine Integral ist daher

$$\Psi\left(\frac{x - l}{z - n}, \frac{y - m}{z - n}\right) = 0.$$

Aus den Identitäten

$$n \frac{x - l}{z - n} - l = \frac{nx - lz}{z - n}, \quad n \frac{y - m}{z - n} - m = \frac{ny - mz}{z - n}$$

folgt, dass man dafür auch schreiben kann

$$\Phi\left(\frac{nx - lz}{z - n}, \frac{ny - mz}{z - n}\right) = 0,$$

in Uebereinstimmung mit No. 7.

C. Integration von

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x & y & z \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Das Hülffsystem ist hier

$$\frac{dx}{y \cos \gamma - z \cos \beta} = \frac{dy}{z \cos \alpha - x \cos \gamma} = \frac{dz}{x \cos \beta - y \cos \alpha}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Werth dieser drei Verhältnisse mit dt , so erhält man

$$dx =$$

$$dy =$$

$$dz =$$

n diese Gleichu

, und addirt, s

$$+ z dz = 0,$$

beiden Integral

$$y^2 + z^2 = c_1,$$

Integral der 1

$$+ y^2 + z^2,$$

lineare parti

u integrieren

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial}$$

ystem von ge

$$dx_1 : dx_2 :$$

Integralgleichun

$$f_1(x, z)$$

$$f_2(x, z)$$

$$\vdots$$

$$f_n(x, z)$$

eine Integra

$$\Phi(f_1, f_2, \dots)$$

n Differentiation

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 -$$

$$i =$$

$$x_1, \dots, dx_n, d$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2}$$

en, ob 4. die Gl

$$\frac{\partial x}{\partial x_k}$$

. ein; dadurch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$$

tegrirt werden,

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} -$$

in 7. ein, so

$$\zeta_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2$$

nach 4. der Kl

t diese Gleichu

e Ausführung eines Beispiels unterlassen; es genüge, darauf

edes integrable System

$$dx : dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \dots : X_n$$

sogleich eine integrable lineare partiale Differentialgleichung liefert.

15. Integration nicht linearer partialer Differentialgleichungen I. O.

Die Differentialgleichung sei

$$1. \quad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Die Grösse p ist eine Function von x und y ; sie kann indess auch als Function von x, y und z aufgefasst werden, wobei z als unbekannte Function von x und y zu betrachten ist; q wird durch 1. als Function von x, y, z, p definit.

Sucht man nun unter diesen Voraussetzungen p und q als Functionen von x, y, z , so zu bestimmen, dass

$$2. \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right),$$

wobei durch die Klammern angedeutet wird, dass die Differentialquotienten unter der Voraussetzung gebildet sind, dass z durch x und y ersetzt ist, so wird der Ausdruck

$$dz = p dx + q dy$$

integral und liefert durch Integration z als Function von x und y . Nun ist

$$3. \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) &= \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p + \frac{\partial q}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} p \right). \end{aligned}$$

Setzt man dies in 2. ein, so entsteht

$$4. \quad - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(q - \frac{\partial q}{\partial p} p \right) \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p.$$

Ersetzt man hierin q aus 1. durch p , so enthält diese Gleichung nur x, y, z, p , ist also eine lineare partiale Differentialgleichung für p als abhängige und x, y, z als unabhängige Variable. Gelingt es, ein particuläres Integral herzustellen, durch welches p von x, y, z abhängig gemacht wird und das eine willkürliche Constante a enthält, so hat man dies in 1. einzusetzen, und erhält dann aus 1. q durch x, y, z, a ausgedrückt. Beide Werthe hat man in $z = p dx + q dy$ einzusetzen und dann zu integrieren. Das Integral enthält ausser a noch eine willkürliche Constante, ist also ein vollständiges Integral; in bekannter Weise kann man dann das zugehörige allgemeine und das singuläre Integral herstellen.

16. Beispiele. A. Aus der Gleichung

$$pq - z = 0$$

folgt

$$q = \frac{z}{p},$$

daher ist

$$- \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{z}{p^2}, \quad q - \frac{\partial q}{\partial p} p = \frac{2z}{p}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p = 1.$$

Die partiale Differentialgleichung für p ergibt sich zu

$$\frac{z}{p^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2z}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 1.$$

Dieselbe hat die particuläre Lösung

$$p = y + a.$$

Substituirt man dies in die Differentialgleichung, so folgt

$$q = \frac{z}{y + a}.$$

Wenn man diese Werthe für p und q in $z = p dx + q dy$ einsetzt, so erhält man

$$dz = (y + a) dx + \frac{z}{y + a} dy.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + a,$$

$$z = (y + a)x + f(y),$$

wobei $f(y)$ eine unbestimmte Function von y bezeichnet. Führt man diesen Werth von z ein in

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y + a},$$

so ergibt sich

$$f'(y) = \frac{f(y)}{y + a},$$

woraus durch Integration hervorgeht

$$f(y) = b(y + a).$$

Das vollständige Integral der partialen Differentialgleichung ist daher

$$z = (y + a)(x + b);$$

das allgemeine Integral geht durch Elimination von a aus den Gleichungen hervor

$$z = (y + a)(x + \varphi(a))$$

$$x + \varphi(a) + (y + a)\varphi'(a) = 0,$$

worin φ eine willkürliche Function bezeichnet.

B.

$$px + qy + pq - z = 0.$$

Hieraus folgt

$$q = \frac{z - px}{y + p}, \quad \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{xy + z}{(y + p)^2},$$

$$q - \frac{\partial q}{\partial p} p = \frac{1}{(y + p)^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} dp = 0.$$

Die partiale Differentialgleichung für p ist

$$\frac{xy + z}{(y + p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{(y + p)^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Derselben wird durch die Annahme $p = a$ genügt; hieraus folgt

$$q = (z - ax) : (y + a),$$

und aus beiden Werthen

$$dz = a dx + \frac{z - ax}{y + a} dy.$$

Nach dieser Gleichung ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \text{also} \quad z = ax + f(y),$$

wobei f eine noch unbestimmte Function bezeichnet. Aus diesem Werthe von z ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(y);$$

und daher zur Bestimmung von f

$$f'(y) = \frac{(ax + f) - ax}{y + a} = \frac{f}{y + a}.$$

also

$$f = b(y + a).$$

Daher ergibt sich das vollständige Integral

$$z = ax + by + ab.$$

Das allgemeine Integral besteht aus den beiden Gleichungen

$$z = ax + (y + a)\varphi(a),$$

$$x + \varphi(a) + (y + a)\varphi'(a) = 0,$$

worin φ willkürlich ist.

Für ein singuläres Integral hat man die Gleichungen

$$x + b = 0, \quad y + a = 0;$$

werden die hieraus folgenden Werthe von a und b in das vollständige Integral eingesetzt, so erhält man das singuläre Integral

$$z = -xy,$$

das, wie man sich leicht überzeugt, der gegebenen Differentialgleichung genügt.

Das singuläre Integral stellt ein hyperbolisches Paraboloid dar; das vollständige für bestimmte Werthe von a und b eine Tangentenebene dieser Fläche; das allgemeine irgend eine abwickelbare Fläche, die der singulären Lösung umgeschrieben ist, deren Tangentenebenen alsq eine Auswahl aus den dem vollständigen Integrale entspringenden bilden.

17. Die Integration einer nicht linearen Differentialgleichung mit drei Variablen kann auch mit der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Form

$$1. \quad Pdx + Qdy + Rdz + Sdp = 0$$

in Zusammenhang gebracht werden.

Der gegebenen Differentialgleichung entnimmt man den Werth von q und substituirt ihn in

$$2. \quad dz = pdx + qdy.$$

Die Gleichung 2. geht hierdurch in eine Gleichung von der Form 1. über. Man integrirt dieselbe durch zwei Gleichungen, die eine willkürliche Function enthalten und eliminirt dann p aus diesen Gleichungen.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$pq - z = 0$$

$$\text{gibt} \quad p^2 dx + z dy - p dz = 0.$$

Daher ist, wenn man in § 26, No. 8 t durch p ersetzt,

$$P = p^2, \quad Q = z, \quad R = p, \quad S = 0,$$

$$P_x = 0, \quad Q_x = 0, \quad R_x = 0, \quad S_x = 0,$$

$$P_y = 0, \quad Q_y = 0, \quad R_y = 0, \quad S_y = 0,$$

$$P_z = 0, \quad Q_z = 1, \quad R_z = 0, \quad S_z = 0,$$

$$P_p = 2p, \quad Q_p = 0, \quad R_p = -1, \quad S_p = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{P} = -z, \quad \mathfrak{Q} = p^2, \quad \mathfrak{R} = 2pz, \quad \mathfrak{S} = p^2.$$

Das System simultaner Gleichungen § 26, No. 8, 2 ist daher

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{p^2} = \frac{dz}{2pz} = \frac{dp}{p^2}.$$

Die Integralgleichungen hierzu sind

$$z = ap^2, \quad x = ap + b, \quad y = p + c.$$

Aus denselben folgt

$$\alpha = 0, \quad \beta = p^2, \quad \gamma = ap^2.$$

Unterdrückt man den Faktor p^2 , so erhält man daher für a, b, c die Differentialgleichung (§ 26, No. 9, 10)

$$db + a dc = 0.$$

Diese wird durch das System integrirt

$$b + ac = \varphi(a),$$

$$c = \varphi'(a).$$

Ersetzt man hierin a, b, c dur

$$x + xy$$

$$y -$$

Durch Elimination von p aus 1
Integral der gegebenen partialen I

Denselben Gedankengang kan.
Differentialgleichung mit mehr als
einer partialen Differentialgleichung
und der abhängigen x auf eine Di

$$dx = p_1 dx_1 + p_2$$

wobei $p_i = \partial x : \partial x_i$, und für e
Differentialgleichung folgender Wei

§ 28. Partiale Differen

1. In der Differentialgleichung

$$1. \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

substituieren wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} =$$

Hierdurch geht dieselbe über

$$2. \quad \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

Da nun

3.

so erhält man anstatt 2.

$$4. \quad \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

Hieraus folgt (Differentialrech
 p ist; und umgekehrt, sobald dies
Wir setzen daher

5.

wobei φ eine willkürliche Function bezeichnet. Durch Differentiation nach x |
erhält man hieraus

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi'(p) \frac{\partial p}{\partial x},$$

folglich nach 3.

$$6. \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varphi'(p) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dies ist eine lineare partiale Differentialgleichung I. O. für p . Der Vergleich
mit § 27, No. 11. ergibt

$$P = \varphi'(p), \quad Q = -1, \quad R = 0.$$

Folglich ist das System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integrieren

$$dx + \varphi'(p) dy = 0, \quad dp = 0.$$

*) Eine Zusammenstellung der Integrationsmethoden für partiale Differentialgleichungen I. O.
mit ausführlichen Literaturnachweisen enthält MANSION, Théorie des équations aux dérivées par-
tielles du premier ordre. Paris, 1875.

§ 28. Partiale Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Aus der letzten Gleichung folgt das Integral

$$p = a,$$

und mit Hülfe dessen aus der ersten

$$x + \varphi'(p)y = b,$$

wobei a und b willkürliche Constante bezeichnen. Das Integra.

$$7. \quad x + \varphi'(p) \cdot y = \psi(p),$$

wobei ψ eine willkürliche Function ist. Ersetzt man in dieser

$$\varphi'(p)dp = dq,$$

so erhält man

$$8. \quad xdp + ydq = \psi(p)dp.$$

Da nun

$$\begin{aligned} d(xp + yq - z) &= xdp + pdx + ydq + qdy - \frac{\partial z}{\partial x} dx \\ &= xdp + ydq, \end{aligned}$$

so folgt aus 8. durch Integration

$$9. \quad xp + yq - z = \int \psi(p)dp.$$

Setzt man

$$\int \psi(p)dp = \chi(p),$$

wobei χ ebenso willkürlich ist, wie ψ , so erhält man das Integri-
Differentialgleichung durch Elimination von p und q aus den

$$q = \varphi(p),$$

$$10. \quad \begin{aligned} xp + yq - z &= \chi(p), \\ x + \varphi'(p)y &= \chi'(p). \end{aligned}$$

Das Integral enthält zwei willkürliche Functionen.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass das Integral eine abwic-
darstellt. Denn aus der Gleichung der Tangentenebene

$$T = \frac{\partial z}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (\eta - y) - (z - \zeta) =$$

folgen die Coordinaten von T

$$\begin{aligned} u &= \frac{p}{xp + yq - z}, & v &= \frac{q}{xp + yq - z}, \\ w &= \frac{1}{xp + yq - z}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$p = \frac{u}{w}, \quad q = \frac{v}{w}, \quad xp + yq - z = \frac{1}{w}$$

Setzt man dies in die ersten beiden Gleichungen 10., so
Ebenencoordinaten der eine Integralfläche berührenden Tan-
beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$11. \quad \frac{v}{w} = \varphi\left(\frac{u}{w}\right),$$

$$12. \quad \frac{1}{w} = \chi\left(\frac{u}{w}\right).$$

Die Tangentenebenen der den willkürlichen Functionen φ
Integralfläche berühren daher die beiden Flächen 11. und 12.
Integralfläche als abwickelbare Fläche charakterisirt (Analyt. C
§ 10, No. 1 u. f.).

2. Um u als Function der unabhängigen Variablen x
stimmen, dass

1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

setzen wir

2.

wobei F eine willkürliche, w eine noch zu bestimmende Function von x und t bezeichnet. Substituirt man 2. in 1. so erhält man

$$F''(w) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + F'(w) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 F''(w) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + a^2 F'(w) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Dieser Gleichung wird unabhängig von der willkürlichen Function F genügt, wenn man w so bestimmt, dass

3.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

4.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

5.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \pm a \frac{\partial w}{\partial x},$$

Aus 3. folgt

$$w = \mu t + \nu,$$

wobei μ und ν die Variable x enthalten können.

Setzt man dies in 4. ein, so erhält man

$$\mu'' t + \nu'' = 0,$$

woraus folgt

$$\mu'' = \nu'' = 0;$$

also ist

$$\mu = \alpha x + \beta, \quad \nu = \gamma x + \delta,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constante bezeichnen. Hiernach ergibt sich

$$w = \alpha x t + \beta t + \gamma x + \delta.$$

Substituirt man dies in 5., so erhält man

$$\alpha x + \beta = \pm a (\alpha t + \gamma).$$

Da diese Gleichung unabhängig von x und t erfüllt sein soll, so folgt

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm a \gamma.$$

Man erhält daher

$$w = \beta (x \pm a t) + \delta.$$

Man kann wegen der Unbestimmtheit der Function F den Faktor β und das Glied δ in w unterdrücken. Bedenkt man ferner, dass, wenn

$$u = u_0 \text{ und } u = u_1$$

particuläre Lösungen von 1. sind, alsdann auch 1. durch

$$u = u_0 + u_1$$

genügt wird, so erkennt man, dass das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung durch die Gleichung dargestellt wird

$$u = F(x + a t) + G(x - a t).$$

Man kann die willkürlichen Functionen F und G immer so bestimmen, dass für $t = 0$ die Functionen u und $\partial u / \partial t$ sich in gegebene Functionen von x verwandeln.**)

Verlangt man, dass

*) In der mathematischen Physik wird gezeigt, dass dies die Differentialgleichung welche die Gestalt einer schwingenden elastischen Linie bestimmt, wobei x die Abscisse, u Ordinate eines Punkts der Linie und t die Zeit bezeichnet.

**) d. i. so, dass für den Anfang der Bewegung die Form der gespannten Linie sowie Anfangsgeschwindigkeiten aller ihrer Punkte gegebene Werthe haben.

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x), \quad \text{für } t = 0.$$

so kann man zunächst u_0 so bestimmen, dass es der ersteren, und u_1 so, dass es der anderen dieser beiden Bedingungen genügt, und dass

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad u_1 = 0, \quad \text{für } t = 0.$$

Man sieht sofort, dass man für u_0 zu nehmen hat

$$u_0 = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)].$$

Denn es ist

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{2} a [f'(x+at) - f'(x-at)],$$

für $t = 0$ hat man daher

$$u_0 = f(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0.$$

Ebenso erkennt man sogleich, dass die für u_1 gegebenen Bedingungen von der Function erfüllt werden

$$u_1 = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\lambda) d\lambda.$$

Durch Addition von u_0 und u_1 erhält man das allgemeine, den gegebenen Bedingungen genügende Integral

$$u = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\lambda) d\lambda,$$

4. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

geht aus der soeben integrierten hervor, wenn man in der letzteren t , x , a der Reihe nach durch x , y , i ersetzt; das allgemeine Integral derselben ist daher

$$u = F(x+iy) + G(x-iy).$$

5. In die Differentialgleichung

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} *$$

substituieren wir versuchsweise

$$u = e^{\alpha x + \beta t};$$

wir erhalten für α und β die Bedingung

$$\beta = a^2 \alpha^2.$$

Daher hat 1. das particuläre Integral

$$u = e^{\alpha x + a^2 \alpha^2 t}.$$

Ersetzen wir hierin α durch $\pm i\alpha$, so entstehen die beiden Lösungen

$$e^{-a^2 \alpha^2 t + i \cdot \alpha x}, \quad e^{-a^2 \alpha^2 t - i \cdot \alpha x}.$$

Man erhält hieraus neue Lösungen, wenn man diese Grössen mit beliebigen Faktoren multiplicirt und addirt. Nimmt man die Faktoren $\frac{1}{2} e^{-i \cdot \alpha \lambda}$ und $\frac{1}{2} e^{i \cdot \alpha \lambda}$, so erhält man

$$e^{-a^2 \alpha^2 t} \cos \alpha (x - \lambda).$$

Ertheilt man hierin α und λ der Reihe nach alle möglichen Werthe, multi-

*) Von dieser Gleichung hängt die Temperatur u der Punkte eines Körpers ab, wenn vorausgesetzt wird, dass dieselbe sich nur parallel der X -Achse ändert; t ist die Zeit.

Ausgleichsrechnung

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Einleitung.

1. Zu zwei gegebenen realen Zahlen a und b kann man die Zahl μ suchen, die a und b möglichst nahe liegt. Als Lösung dieser Aufgabe betrachten wir das arithmetische Mittel von a und b

$$1. \quad \mu = \frac{1}{2}(a + b),$$

weil dasselbe um Differenzen von gleichem absoluten Werthe von a und b abweicht. Ebenso wird das arithmetische Mittel μ von n gegebenen Zahlen $a_1, a_2 \dots a_n$ allgemein als die Zahl betrachtet, die den Zahlen $a_1, a_2 \dots a_n$ möglichst nahe liegt, denn bei der Gleichung

$$2. \quad \mu = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

sind die gegebenen Zahlen gleichmässig betheiligt und für den Fall $n = 2$ kommt man auf 1. zurück.

Sollen die gegebenen Zahlen einen verschiedenen grossen Einfluss auf die Zahl μ haben, so kann man denselben derart abschätzen, dass man sich in den Zahlpunkten $a_1, a_2, a_3 \dots$ der Reihe nach $p_1, p_2, p_3 \dots$ Zahlpunkte von gleichem Einflusse vereinigt denkt; alsdann erhält man

$$3. \quad \mu = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}.$$

Wirken an einem Hebel gleiche Gewichte in den Abständen $a_1, a_2, a_3 \dots$ vom Unterstützungspunkte, so können dieselben durch ein Gewicht von n facher Grösse ersetzt werden, das am Hebelarme 2. wirkt. Sind die Gewichte ungleich $p_1, p_2, p_3 \dots$, so werden sie durch ein Gewicht ersetzt, das ihrer Summe gleich ist und den Hebelarm 3. hat

In Rücksicht auf diese mechanische Anwendung bezeichnet man die Faktoren $p_1, p_2, p_3 \dots$ als die Gewichte der Zahlen $a_1, a_2, a_3 \dots$

2. Um die Gerade

$$y = ax + b$$

zu bestimmen, die n willkürlich gegebenen Punkten $P_1, P_2, \dots P_n$ möglichst nahe liegt, bilden wir die Differenzen λ_1, λ_2 der zu den Abscissen $x_1, x_2 \dots$ der gegebenen Punkte gehörigen Ordinaten der Geraden und der Ordinaten $y_1, y_2 \dots$

Die Forderung, dass die Gerade den Punkten möglichst nahe liegen soll, wird ihren mathematischen Ausdruck darin finden, dass eine bestimmte Function F

der Differenzen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$,
 von P_1, P_2, \dots dient, einen möglichst kleinen Werth erreichen soll. Wenn, wie wir zunächst voraussetzen, die Punkte alle dasselbe Gewicht haben, so wird eine symmetrische Function der λ zu wählen sein. Nehmen wir fern Grundsatz an, dass nur der absolute Werth, nicht das Vorzeichen der scheidend sein soll, so darf F nur gerade Potenzen der λ enthalten.

Die Bedingungen für das Minimum von

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots), \quad \lambda_r = ax_r + b - y_r$$

sind

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \text{d. i.}$$

$$1. \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot x_r = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = 0.$$

Wir stellen nun noch die Forderung, dass die Coefficienten a und b die Gleichungen 1. linear bestimmt sein sollen.

Hieraus folgt, dass $\partial F : \partial \lambda_r$ eine lineare Function der λ_r sein muss.

Wir erhalten daher für F eine symmetrische quadratische Function die nur die Quadrate der λ_r enthält. Da ein gemeinsamer Faktor oder den λ_r unabhängiges Glied ohne Einfluss auf den Eintritt eines Minimums so ergibt sich für F die Function

$$2. \quad F = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Bezeichnen wir λ_r als die Abweichung der Geraden vom Punkte liegt hiernach diejenige Gerade den Punkten P_1, P_2, \dots, P_n möglichst nahe, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen v Punkten P_1, P_2, \dots ein Minimum wird.

Aus 2. folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = \lambda_r = ax_r + b - y_r.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n = [pq],$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = [p],$$

so ergeben sich zur Bestimmung von a und b die Gleichungen

$$3. \quad [xx] a + [x] b = [xy],$$

$$4. \quad [x] a + n b = [y].$$

Aus 4. folgt, dass die durch 3. und 4. bestimmte Gerade den Punkt der die Coordinaten hat

$$x = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots), \quad y = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots);$$

dies ist der Schwerpunkt der gegebenen Punkte.

3. Zur Bestimmung der Ebene T , welche n gegebenen P_1, P_2, \dots, P_n möglichst nahe liegt, genügen die zur Lösung der Aufgabe getroffenen Bestimmungen. Die Ebene T wird durch die Folgende definiert

$$1. \quad F = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{Minimum},$$

$$\lambda_r = ax_r + by_r + c - z_r,$$

wenn T die Gleichung hat

$$z = ax + by + c.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial a} &= \sum \lambda_r x_r = 0, \\ \frac{1}{2} \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial b} &= \sum \lambda_r y_r = 0, \\ \frac{1}{2} \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial \lambda_r}{\partial c} &= \sum \lambda_r = 0.\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von a, b, c hat man daher das lineare System

$$\begin{aligned}[xx]a + [xy]b + [x]c &= [xs], \\ [xy]a + [yy]b + [y]c &= [ys], \\ [x]a + [y]b + nc &= [s].\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass T den Schwerpunkt von P_1, P_2, \dots, P_n enthält.

4. Die lineare Function

1. $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} + a_m$
kann für die gegebenen Werthsysteme

$$\begin{aligned}x_{11}, x_{21}, x_{31} \dots \\ x_{12}, x_{22}, x_{32} \dots \\ 2. \quad x_{13}, x_{23}, x_{33} \dots \\ \dots \dots \dots \\ x_{1n}, x_{2n}, x_{3n} \dots \\ n > m\end{aligned}$$

im Allgemeinen nicht die gegebenen Werthe

3. $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$

annehmen. Die Function 1., welche für das System 2. solche Werthe annimmt, die den Zahlen 3. möglichst nahe liegen, kann durch geeignete Erweiterung der in No. 2 durchgeführten Betrachtungen ohne neue Annahmen bestimmt werden; nämlich aus der Forderung

4. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{Minimum},$

$$\lambda_r = a_1 x_{1r} + a_2 x_{2r} + \dots + a_{m-1} x_{m-1,r} + a_m - y_r.$$

Aus 4. ergibt sich zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten a_1, a_2, \dots, a_m das lineare System

$$\begin{aligned}[x_1 x_1] a_1 + [x_1 x_2] a_2 + \dots + [x_1 x_{m-1}] a_{m-1} + [x_1] a_m &= [x_1 y_1], \\ [x_1 x_2] a_1 + [x_2 x_2] a_2 + \dots + [x_2 x_{m-1}] a_{m-1} + [x_2] a_m &= [x_2 y_1],\end{aligned}$$

5. $[x_1 x_{m-1}] a_1 + [x_2 x_{m-1}] a_2 + \dots + [x_{m-1} x_{m-1}] a_{m-1} + [x_{m-1}] a_m = [x_{m-1} y_1],$
 $[x_1] a_1 + [x_2] a_2 + \dots + [x_{m-1}] a_{m-1} + n a_m = [y_1].$

Zufolge der letzten dieser Gleichungen wird die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} + a_m = y$$

befriedigt, wenn man statt x_1, x_2, x_3, \dots, y die Werthe

$$\frac{1}{n}(x_{11} + x_{12} + \dots), \quad \frac{1}{n}(x_{21} + x_{22} + \dots), \quad \dots \quad \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots),$$

- d. i. die arithmetischen Mittel der für die x_1, x_2, \dots, y gegebenen Zahlen setzt.

5. Durch $(m+1)$ Punkte ist eine Curve C von der Gleichung

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

unzweideutig bestimmt. Sind n Punkte gegeben und ist $n > m+1$, so kann man nach der Curve C fragen, welcher die gegebenen Punkte möglichst nahe liegen.

Da die Curvengleichung die zu bestimmenden Constanten a_0, a_1, \dots, a_m linear enthält, so wird man die bisher angewandte Methode auch auf den vor-

ehn

+
a₀

Diffe
lt n

+
+
+

x^m+

che

'₀ -
-

unk

geben ($n > 2m + 1$) und bestimmt man eine diesen Punkten
anschliessende Curve C wieder durch die Bedingung

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{Minimum},$$

$$a_0 + a_1 \cos x_r + \dots + b_1 \sin x_r, \dots = y_r,$$

ie Coefficienten $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots$ die Gleichungen

$$[x \cos px] a_1 + [\cos 2x \cos px] a_2 + \dots + [\cos mx \cos px] a_m$$

$$[x \cos px] b_1 + [\sin 2x \cos px] b_2 + \dots + [\sin mx \cos px] b_m$$

$$= [y \cos px],$$

$$[x \sin px] a_1 + [\cos 2x \sin px] a_2 + \dots + [\cos mx \sin px] a_m$$

$$[x \sin px] b_1 + [\sin 2x \sin px] b_2 + \dots + [\sin mx \sin px] b_m$$

$$= [y \sin px],$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \dots, m.$$

gen lassen in einem besonderen: Falle eine einfache Lösung
die x so gewählt, dass

$$x_{r+1} = r\varphi, \quad \varphi = 2\pi:n,$$

chungen Coefficienten von der Form

$$\cos p\varphi \cos q\varphi + \cos 2p\varphi \cos 2q\varphi + \dots + \cos(n-1)p\varphi \cos(n-1)q\varphi,$$

$$p\varphi \sin q\varphi + \cos 2p\varphi \sin 2q\varphi + \dots + \cos(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi,$$

$$p\varphi \sin q\varphi + \sin 2p\varphi \sin 2q\varphi + \dots + \sin(n-1)p\varphi \sin(n-1)q\varphi.$$

in setzen wir

$$- \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)],$$

$$[x \cos px] = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} \cos k(p-q)\varphi + \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} \cos k(p+q)\varphi,$$

$$[x \sin px] = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \sin k(p+q)\varphi - \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \sin k(p-q)\varphi,$$

$$[x \cos px] = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} \cos k(p-q)\varphi - \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} \cos k(p+q)\varphi.$$

$$\therefore (1-z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}$$

Zahl

$$z = \cos(p \pm q)\varphi + i \sin(p \pm q)\varphi,$$

so ist, wenn die ganzen Zahlen p und q nicht gleich sind, $1 - z$ von Null verschieden und $z^n = 1$; daher ist

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0.$$

Die Sonderung des Realen und Imaginären giebt

$$3. \quad \sum_0^{n-1} \cos k(p \pm q) \varphi = 0, \quad \sum_1^{n-1} \sin k(p \pm q) \varphi = 0.$$

Für den Fall $p = q$ erhält man aus 2. unter Rücksicht auf 3.

$$4. \quad [\cos^2 px] = \frac{1}{2}n, \quad [\sin^2 px] = \frac{1}{2}n.$$

Mit Hülfe von 2., 3., 4. ergeben die Gleichungen 1. die Auflösungen

$$a_0 = \frac{1}{n}[y], \quad a_k = \frac{2}{n}[y \cos kx], \quad b_k = \frac{2}{n}[y \sin kx].^*)$$

6. Die Methode der kleinsten Quadrate (Quadratsummen), die wir in den Abschnitten No. 2 bis 5 angewandt haben, lässt sich auch in den Fällen No. 1 verwenden. Wird zu den gegebenen Zahlen $a_1, a_2 \dots a_n$ eine Zahl μ so bestimmt, dass

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{Minimum},$$

$$\lambda_r = \mu - a_r,$$

so folgt zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$(\mu - a_1) + (\mu - a_2) + (\mu - a_3) + \dots + (\mu - a_n) = 0,$$

aus welcher man erhält

$$\mu = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n).$$

§ 2. Beobachtungsfehler.

1. Bei keiner Messung kann man mit Sicherheit behaupten, dass das durch sie gewonnene Resultat vollkommen genau sei. Auch das sorgfältigst gearbeitete Instrument hat Fehler; auch der vortrefflichste Beobachter, dessen Sinne und Urtheil auf's Beste beanlagt und geschult sind, gelangt an Grenzen, an welchen sein Urtheil anfängt, unsicher zu werden.

Die Fehler einer Messung theilt man ein in constante und in zufällige Fehler. Unter constanten Fehlern versteht man Fehler, die durch solche Abweichungen vom idealen Baue des Instruments herrühren, welche während einer hinlänglich grossen Zeit sich nicht merklich ändern, sowie die von der Individualität des Beobachters abhängigen Fehler, sofern sie sich immer in einem bestimmten Sinne geltend machen. Alle übrigen Fehler, die von den wechselnden äusseren Umständen (Handhabung, gegenseitiger Lage der Theile des Instruments, Temperatur der Luft, Bestrahlung durch die Sonne u. s. w.) in einer Weise abhängen, dass sich die Bestimmung ihres Einflusses der Beurtheilung entzieht, werden als zufällige bezeichnet.

Die constanten Instrumentfehler, sowie die constanten Fehler des Beobachters müssen zunächst möglichst scharf bestimmt werden; dies erfolgt durch Messungen, die genaue Prüfungen der Resultate zulassen; diese Messungen werden unter möglichst günstigen Umständen und mit der grössten Sorgfalt ausgeführt, so dass man sicher sein kann, dass dabei die zufälligen Fehler auf ein Minimum herab-

*) Weitere Ausführungen, auch in Bezug auf Curven von gegebenem Charakter, die zwischen gegebenen Abscissen einer gegebenen Curve möglichst nahe liegen, sowie historische und kritische Bemerkungen über die verschiedenen Methoden, die Ausgleichungsrechnung zu begründen, findet man bei HENKE, Die Methode der kleinsten Quadrate. Inauguraldissertation. Leipzig 1868.

gedrückt sind. Die zufälligen Instrumentfehler Beobachters fassen wir unter der Bezeichnung zusammen.

Wir nehmen in allen folgenden Betrachtungen an, dass die constanten Fehler ermittelt und die Beobachtungen verbessert worden sind; so dass nur noch die zufälligen Fehler erübrigt.

2. Hat man eine Grösse direkt wiederholt gemessen, so kann die Bestimmung mehrerer Unbekannten mehr Gleichungen als zur Ermittlung der Unbekannten nöthig sind, aufstellen. Die bekannten direkt erhaltenen Werthe, bez. die verschiedenen Combinationen der Gleichungen, liefern zufällige Messungsfehler nicht vollständig übereinstimmend darauf an, für die Unbekannten solche Messungsergebnisse sich möglichst gut annehmen zu lassen.

Die Berechnung dieser Werthe führt den Namen Ausgleichungsrechnung.

Dieselben Gründe, welche uns bei den Betrachtungen über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichungsrechnung maassgebend waren, führen auch hier zur Ausgleichungsrechnung den Satz auf: Die Abweichungen sind so zu wählen, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen im Minimum wird, wobei w der Werthes einer Function, den sie für die Werthe der Unbekannten annimmt, und des Werthes der Function verstehen.

§ 3. Ausgleichung direkter Messungen

1. Hat man durch n direkte Messungen mit den zufälligen Fehlern behafteten Bestimmungswert x und hat man keine Veranlassung, diesen Beobachtungswert zu erkennen, so ist der ausgeglichene Werth der

$$x = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

Die Abweichungen sind

$$\lambda_1 = x - x_1, \quad \lambda_2 = x - x_2, \quad \dots, \quad \lambda_n = x - x_n$$

Unter der mittleren Abweichung λ versteht man das arithmetische Mittel der Quadrate der Abweichungen. Hiernach ist

$$\lambda^2 = \frac{1}{n} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)$$

Die mittelbare Abweichung dient dazu, die Genauigkeit der Beobachtungen x_1, x_2, \dots abzuschätzen; je kleiner die Abweichungen für dieselbe Unbekannte sich ergibt, desto grösser ist die Genauigkeit der Beobachtungen der betreffenden Grösse.

2. Beispiel.

Für die geographische Breite der Ofener Sternwarte sind 10 Resultate**)

*) Diese Begründung der Ausgleichungsrechnung.

**) LIAGRE, Calcul des probabilités et théorie des

No.	x_k	λ_k	λ_k^2
1	47° 29' 11'',5	+ 0,5	0,25
2	12'',2	— 0,2	0,04
3	12'',8	— 0,8	0,64
4	11'',2	+ 0,8	0,64
5	11'',7	+ 0,3	0,09
6	12'',3	— 0,3	0,09
7	11'',5	+ 0,5	0,25
8	11'',9	+ 0,1	0,01
9	12'',4	— 0,4	0,16
10	12'',5	— 0,5	0,25
$x = 47^\circ 29' 12'',0$			

Da die x_k nur in den Sekunden-Einern abweichen, so genügt es, zur Berechnung von x die Einer und Zehntel zu addiren (die Summe beträgt 20) und den zehnten Theil der Summe zu 47° 29' 10'' zu addiren.

Aus der letzten Columnne folgt

$$[\lambda^2] = 2,42.$$

Daher ist

$$\lambda = \sqrt{2,42 : 10} = \pm 0,49.$$

3. Wenn man Grund hat, einzelne Beobachtungen einer Reihe für wesentlich zuverlässiger (oder minder zuverlässig) zu halten als die anderen, so drückt man diesen Unterschied dadurch aus, dass man den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegt.

Haben die Beobachtungen x_1, x_2, x_3, \dots der Reihe nach die Gewichte p_1, p_2, p_3, \dots , so ist der ausgeglichene Werth

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}.$$

Die aus der Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}$$

bestimmte Zahl bezeichnet man in diesem Falle als die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit.

4. Beispiel.

Bei einem Repetitionstheodoliten ist ausser dem Fernrohre auch der horizontale Theilkreis um eine verticale Achse drehbar; man kann daher das Fernrohr für sich allein um die Verticale drehen, während der Theilkreis feststeht, kann aber auch den Theilkreis in fester Verbindung mit dem Fernrohre drehen. Um den Winkel zwischen den Verticalebenen zweier Objecte A und B zu bestimmen, richtet man das Fernrohr auf A und liest die Stellung des Nonius ab; dreht dann auf B , verbindet das Fernrohr mit dem Theilkreise und dreht beide zusammen zurück, bis ersteres auf A gerichtet ist u. s. f. Nachdem die Drehung des Fernrohrs von A nach B genügend oft wiederholt worden ist, liest man die Stellung des Nonius ab und addirt zur Ablesung die Anzahl ganzer Umdrehungen, die der Nonius während der Beobachtungen auf dem horizontalen Theilkreise zurückgelegt hat. Zieht man von der so gewonnenen Zahl die erste Stellung des Nonius ab und dividirt die Differenz durch die Zahl p , welche angiebt, wie oft das Fernrohr von A nach B gedreht worden ist, so erhält man den gesuchten Winkel. Durch eine grössere Anzahl von Repetitionen eliminirt man fast ganz den Einfluss des Theilungsfehlers des Instruments, so dass nur noch der Einfluss der

Visurfehler übrig bleibt; man kann ei Winkel als das arithmetische Mittel aus daher das Gewicht desselben der Zahl p

Man hat einen Winkel 14 mal du die Repetitionszahlen p als die Gewichte Messungsergebnisse, den ausgeglichenen W λ_k , λ_k^2 und $p_k \lambda_k^2$ sind in folgender Taf schriebene Columnne enthält der Kürze multiplicirt.

No.	p_k	x_k	$p_k x_k$
1	5	17° 56' 45",00	225,0
2	■	31,25	125,0
3	5	42,50	212,5
4	3	45,00	135,0
5	3	37,50	112,5
6	3	38,33	115,0
7	3	27,50	82,5
8	3	43,33	130,0
9	4	40,63	162,5
10	2	36,25	72,5
11	3	42,50	127,5
12	3	39,17	117,5
13	2	45,00	90,0
14	■	40,83	122,5
46			1830,0

Die letzte Zeile enthält die Summe $[p]$, $[px]$

Aus derselben ergibt sich

$$x = 17^\circ 56' + \frac{1830}{46}$$

$$\lambda = \pm$$

5. Man habe durch direkte Messu ausgeglichenen Werthe X_1, X_2, X_3, \dots weichungen $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$ erhalten; X_1, X_2, \dots und gegebener Coefficiente sammen

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2$$

so fragt es sich, wie gross die mitt Function ist, wenn man unter einer der mit Hülfe der ausgeglichenen Werth irgend einer Combination der Beob:

Ist $\lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\beta}, \lambda_{3\gamma}, \dots$ eine Combin X_1, X_2, \dots , so ist die dazu gehörige e

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\dots} = a_1 \lambda_{1\alpha} + a_2 \lambda_{2\beta} + \dots$$

Hieraus folgt

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\dots}^2 = a_1^2 \lambda_{1\alpha}^2 + a_2^2 \lambda_{2\beta}^2 + \dots + 2a_1 a_2 \lambda_{1\alpha} \lambda_{2\beta} + \dots$$

Wir ersetzen hierin $\lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\beta}, \dots$ der Reihe nach durch jede Combination der einzelnen Abweichungen und nehmen das arithmetische Mittel aller so entstehenden Werthe $\Delta_{\alpha\beta\gamma\dots}^2$.

Sind n_1, n_2, n_3, \dots Beobachtungen zur Bestimmung von X_1, X_2, X_3, \dots gemacht worden, so ist die Anzahl aller Combinationen

$$m = n_1 n_2 n_3 \dots n_k.$$

Für das arithmetische Mittel Δ^2 hat man

$$m\Delta^2 = a_1^2 \cdot \frac{m}{n_1} \Sigma \lambda_{1\alpha}^2 + a_2^2 \cdot \frac{m}{n_2} \Sigma \lambda_{2\beta}^2 + \dots \\ + 2a_1 a_2 \cdot \frac{m}{n_1 n_2} \Sigma \lambda_{1\alpha} \Sigma \lambda_{2\beta} + 2a_1 a_3 \cdot \frac{m}{n_1 n_3} \Sigma \lambda_{1\alpha} \Sigma \lambda_{3\gamma} + \dots$$

Aus dem Begriffe des arithmetischen Mittels folgt, dass die algebraische Summe der Abweichungen aller einzelnen Beobachtungen vom Mittel verschwindet, also ist

$$\Sigma \lambda_{1\alpha} = \Sigma \lambda_{2\beta} = \Sigma \lambda_{3\gamma} = \dots = 0.$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\Sigma \lambda_{1\alpha}^2 = n_1 \Lambda_1^2, \quad \Sigma \lambda_{2\beta}^2 = n_2 \Lambda_2^2 \dots,$$

so ergibt sich schliesslich

$$\Delta^2 = a_1^2 \Lambda_1^2 + a_2^2 \Lambda_2^2 + a_3^2 \Lambda_3^2 + \dots$$

6. Ist X keine lineare Function der X_k , so kann man unter den Voraussetzungen, dass der TAYLOR'sche Satz auf X für die Werthe der X_k , welche innerhalb der durch Beobachtung gewonnenen Zahlen liegen, anwendbar ist, und dass man nur die erste Potenz der Abweichungen zu berücksichtigen braucht, setzen

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\dots} = a_1 \lambda_{1\alpha} + a_2 \lambda_{2\beta} + a_3 \lambda_{3\gamma} + \dots$$

wobei

$$a_i = \frac{\partial X}{\partial X_i},$$

wenn man in diesen Differentialquotienten für X_1, X_2, \dots die ausgeglichenen Werthe setzt.

7. Beispiel. Man hat in einem Dreiecke ABC die Seiten $BC = a$ und die Winkel $CBA = \beta$ und $BCA = \gamma$ bestimmt; diese Werthe seien mit den mittleren Abweichungen $\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta, \Lambda_\gamma$ behaftet. Für den dritten Winkel α , den Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises und die beiden andern Seiten b und c hat man

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma,$$

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma.$$

Die mittlere Abweichung von α ist

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{\Lambda_\beta^2 + \Lambda_\gamma^2}.$$

Da man hat

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1}{2 \sin \alpha}, \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha} = -\frac{a \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha},$$

so ist

$$\Lambda_r = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha \cdot \Lambda_\alpha^2 + a^2 \cos^2 \alpha \cdot \Lambda_\alpha^2}.$$

Ferner ergeben sich

$$\Lambda_b = 2 \sqrt{\sin^2 \beta \cdot \Lambda_r^2 + r^2 \cos^2 \beta \cdot \Lambda_\beta^2},$$

$$\Lambda_c = 2 \sqrt{\sin^2 \gamma \cdot \Lambda_r^2 + r^2 \cos^2 \gamma \cdot \Lambda_\gamma^2}.$$

§ 4. Ausgleichung vermittels

1. Für die gegebenen Coefficienten

$$\begin{array}{ccc} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, \end{array}$$

habe man die Werthe

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3,$$

der linearen Functionen

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n z \end{array}$$

beobachtet; allen Beobachtungen sei

Die Anzahl der Unbekannten x, y, z, \dots sei k

Werthe der Unbekannten erhält man durch die

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_r^2$$

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z$$

aus dem linearen Systeme

$$\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Diese Gleichungen werden nach GAUSS bezeichnet. In der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

haben symmetrisch zur Hauptdiagonale stehend

Bezeichnet man den Coefficienten des k ten

folgen aus 1. die ausgeglichenen Werthe

$$x = \frac{1}{D} ([au] a_{11} + [bu] a_{21} +$$

$$2. \quad y = \frac{1}{D} ([au] a_{12} + [bu] a_{22} +$$

$$z = \frac{1}{D} ([au] a_{13} + [bu] a_{23} +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

2. Mit Hülfe der soeben berechneten Wert einer Beobachtung

$$\lambda_r = a_r x + b_r y + c_r z +$$

Für die mittlere Abweichung hat man

$$\lambda^2 = \frac{1}{n} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 +$$

Ersetzt man in den Lösungen No. 1, 2 die

$$u'_r = u_r + \lambda_r$$

Je schärfer die Bestimmung einer Unbekannten, je kleiner also die auf sie gemäss dieser Gleichungen entfallende mittlere Abweichung ist, ein um so grösseres Gewicht hat man derselben beizulegen.

Wir bezeichnen das Reciprocum vom Quadrate der mittleren Abweichung direkt als Gewicht der Unbekannten und haben daher, wenn die Gewichte mit p_x, p_y, p_z, \dots bezeichnet werden,

$$5. \quad p_x = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{D}{\alpha_{11}}, \quad p_y = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{D}{\alpha_{22}}, \quad \dots,$$

$$6. \quad p_x : p_y : p_z = \dots = \frac{1}{\alpha_{11}} : \frac{1}{\alpha_{22}} : \frac{1}{\alpha_{33}} : \dots$$

3. Numerische Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen.

Zur Berechnung der Coefficienten der Normalgleichungen bedient man sich mit Vortheil hinlänglich ausführlicher Quadrattafeln. Aus denselben entnimmt man zunächst direkt die Glieder der Summen

$$[aa], [bb], [cc], \dots$$

Um auch die übrigen Summen

$$[ab], [ac], [bc], \dots$$

zu erhalten, kann man von einer der Gleichungen Gebrauch machen

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - (a-b)^2],$$

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2],$$

$$ab = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a-b)^2].$$

Wenn man die Normalgleichungen auflösen und zugleich die Gewichte der einzelnen Unbekannten bestimmen will, so wird man am zweckmässigsten das folgende Verfahren zur Auflösung eines allgemeinen linearen Systems einschlagen.

Das System sei

$$(11 \cdot 1)x_1 + (12 \cdot 1)x_2 + (13 \cdot 1)x_3 + \dots + (1n \cdot 1)x_n = (1u \cdot 1),$$

$$(21 \cdot 1)x_1 + (22 \cdot 1)x_2 + (23 \cdot 1)x_3 + \dots + (2n \cdot 1)x_n = (2u \cdot 1),$$

$$(31 \cdot 1)x_1 + (32 \cdot 1)x_2 + (33 \cdot 1)x_3 + \dots + (3n \cdot 1)x_n = (3u \cdot 1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n1 \cdot 1)x_1 + (n2 \cdot 1)x_2 + (n3 \cdot 1)x_3 + \dots + (nn \cdot 1)x_n = (nu \cdot 1).$$

Hierin sind die Coefficienten der Einfachheit wegen durch in Klammern geschlossene Ziffernzusammenstellungen angedeutet; $(ik \cdot 1)$ bedeutet den Coefficienten von x_k in der i ten Gleichung des 1. Systems; letztere Unterscheidung ist nothwendig, weil noch mehrere Systeme behufs der Auflösung des gegebenen aufgestellt werden; $(iu \cdot 1)$ bedeutet die rechte Seite der i -ten Gleichung des 1. Systems.

Aus der Elemententafel

$$1. \quad \begin{array}{cccccc} (11 \cdot 1) & (12 \cdot 1) & (13 \cdot 1) & \dots & (1n \cdot 1) & (1u \cdot 1), \\ (21 \cdot 1) & (22 \cdot 1) & (23 \cdot 1) & \dots & (2n \cdot 1) & (2u \cdot 1), \\ (31 \cdot 1) & (32 \cdot 1) & (33 \cdot 1) & \dots & (3n \cdot 1) & (3u \cdot 1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1 \cdot 1) & (n2 \cdot 1) & (n3 \cdot 1) & \dots & (nn \cdot 1) & (nu \cdot 1) \end{array}$$

berechnen wir eine neue Tafel,

$$2. \quad \begin{array}{cccccc} (22 \cdot 2) & (23 \cdot 2) & \dots & (2n \cdot 2) & (2u \cdot 2), \\ (32 \cdot 2) & (33 \cdot 2) & \dots & (3n \cdot 2) & (3u \cdot 2), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n2 \cdot 2) & (n3 \cdot 2) & \dots & (nn \cdot 2) & (nu \cdot 2), \end{array}$$

bei welcher

3.

$$(ik \cdot 2) = (ik \cdot 1) - \frac{(i1 \cdot 1)}{(11 \cdot 1)} \cdot (1k \cdot 1),$$

$$(iu \cdot 2) = (iu \cdot 1) - \frac{(i1 \cdot 1)}{(11 \cdot 1)} \cdot (1u \cdot 1).$$

Während wir die $(ik \cdot 2)$ vollständig berechnen, wollen wir die $(iu \cdot 2)$ als lineare Functionen der $(iu \cdot 1)$ dargestellt lassen. Die Tafel 2. gehört zu dem Systeme, welches durch Elimination von x_1 aus der ersten Gleichung in Verbindung mit der zweiten, dritten, u. s. w. Gleichung hervorgeht.

In derselben Weise, wie man von 1. zu 2. übergeht, gelangt man von 2. zu einer neuen Coefficiententafel 3., von dieser zu einer vierten Tafel u. s. w. Wie man sofort sieht, erhält man durch genügend häufige Wiederholung dieses Verfahrens schliesslich die Gleichung

$$4. \quad (nn \cdot n) x_n = (nu \cdot n).$$

Hierbei ist die rechte Seite eine lineare Function der $(iu \cdot 1)$, in welcher $(nu \cdot 1)$ den Coefficienten 1. hat. Vergleicht man die aus 4. hervorgehende Auflösung

$$5. \quad x_n = \frac{(nu \cdot 1) + \dots}{(nn \cdot n)}$$

mit

$$x_n = \frac{a_{nn} \cdot (nu \cdot 1) + \dots}{D},$$

wobei D die Determinante des Systems 1. und a_{nn} den Coefficienten von $(nn \cdot 1)$ in dieser Determinante bezeichnet, so ergibt sich

$$6. \quad (nn \cdot n) = \frac{D}{a_{nn}}.$$

Dividirt man die Glieder der ersten Zeile der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (11 \cdot 1) & (12 \cdot 1) & \dots & (1n \cdot 1) \\ (21 \cdot 1) & (22 \cdot 1) & \dots & (2n \cdot 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1 \cdot 1) & (n2 \cdot 1) & \dots & (nn \cdot 1) \end{vmatrix}$$

durch $(11 \cdot 1)$, multiplicirt dann die Zeile der Reihe nach mit

$$(21 \cdot 1), (31 \cdot 1), \dots, (n1 \cdot 1)$$

und subtrahirt diese Zeilen von Produkten der Reihe nach von der 2., 3., ... n ten Zeile, so erhält man

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)} = \begin{vmatrix} (22 \cdot 2) & (23 \cdot 2) & \dots & (2n \cdot 2) \\ (32 \cdot 2) & (33 \cdot 2) & \dots & (3n \cdot 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n2 \cdot 2) & (n3 \cdot 2) & \dots & (nn \cdot 2) \end{vmatrix}.$$

Dividirt man hier wieder die Elemente der ersten Zeile mit dem ersten Elemente, multiplicirt dann mit den Anfangselementen der 2., 3., ... Zeile und subtrahirt diese Produkte nach einander von den Elementen der 2., 3., ... Zeile, so entsteht

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)(22 \cdot 2)} = \begin{vmatrix} (33 \cdot 3) & (34 \cdot 3) & \dots \\ (43 \cdot 3) & (44 \cdot 3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Wenn man dieses Verfahren genügend oft wiederholt, so erhält man schliesslich

$$\frac{D}{(11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \dots (n-1, n-1 \cdot n-1)} = (nn \cdot n);$$

also ist

7. $D = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \dots (nn \cdot n)$,
und daher mit Rücksicht auf 6.

8. $a_{nn} = (11 \cdot 1)(22 \cdot 2)(33 \cdot 3) \dots (n-1, n-1 \cdot n-1)$.

Ohne von dem numerischen Werthe der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch zu machen, substituirt man 5. in die erste Gleichung des $(n-1)$ ten Systems; diese Gleichung enthält ausser x_n noch x_{n-1} ; nach der Substitution erhält man x_{n-1} als lineare Function der $(iu \cdot 1)$.

In die erste Gleichung des $(n-2)$ ten Systems setzt man nun die aufgefundenen Werthe von x_n und x_{n-1} u. s. f., bis man endlich alle x als lineare Functionen der $(iu \cdot 1)$ ausgedrückt hat.

Multiplicirt man die Coefficienten, welche $(iu \cdot 1)$ in diesen Functionen haben, mit der unter 7. gefundenen Determinante D , so erhält man die Coefficienten α_{ik} , welche die Elemente $(ik \cdot 1)$ in D haben.

Handelt es sich um die Auflösung von Normalgleichungen, so sind die Coefficienten der $(iu \cdot i)$ den Gewichten p_i der Unbekannten proportional; die in No. 2 definirten Gewichte werden aus den Coefficienten der $(iu \cdot i)$ durch Division durch das Quadrat der mittleren Abweichung λ erhalten.

Setzt man schliesslich für die $(iu \cdot 1)$ die Werthe in die für x_k gefundenen Ausdrücke, so hat man die Auflösung des gegebenen Systems beendet.

Kommt es nur auf diese Auflösung an, und nicht auf die Bestimmung der α_{ik} , so kann bereits vom Beginne der Rechnung an von den numerischen Werthen der $(iu \cdot 1)$ Gebrauch machen.

4. Wenn die Beobachtungen ungleiche Gewichte haben, $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$, so hat man die Summe

$$p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \dots + p_n \lambda_n^2$$

zu einem Minimum zu machen. Aus dieser Bedingung ergeben sich die Normalgleichungen für den Fall ungleicher Gewichte zu

$$\begin{aligned} 1. \quad & [paa]x + [pab]y + [pac]z + \dots = [pua], \\ & [pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \dots = [p ub], \\ & [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \dots = [puc], \\ & \dots \end{aligned}$$

wobei z. B.

$$[pac] = p_1 a_1 c_1 + p_2 a_2 c_2 + p_3 a_3 c_3 + \dots$$

Hat man diese Gleichungen nach No. 3. aufgelöst und mit Hülfe dieser Auflösungen die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen bestimmt, so erhält man aus der Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 + p_3 \lambda_3^2 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}$$

die mittlere Abweichung λ der Gewichtseinheit.

Um die mittleren Abweichungen $\lambda_x, \lambda_y, \dots$ der ausgeglichenen Werthe der Unbekannten zu erhalten, hat man den vorliegenden Fall dadurch mit dem Falle gleicher Gewichte in Uebereinstimmung zu bringen, dass man annimmt, man habe anstatt lauter verschiedener Bestimmungen Gruppen von der Reihe nach $p_1, p_2, p_3 \dots$ identischen Bestimmungen erhalten. Alsdann kann man sofort die Gleichungen No. 2, 4 benutzen, indem man für D die Determinante des Systems 1. und für α_{ii} den Coefficienten des i ten Diagonalgliedes dieser Determinante setzt.

5. Beispiel.

Zwischen den vom Punkte M ausgehenden Strahlen MA , MB , MC , MD , wurden folgende Winkel gemessen

$$w_1 = A, B = 48^\circ 17' 1'', 4 \text{ mit dem Gewichte } p_1 = 30;$$

$$w_2 = A, C = 96 \ 52 \ 16,8 \text{ „ „ „ „ } p_2 = 20;$$

$$w_3 = A, D = 152 \ 54 \ 6,8 \text{ „ „ „ „ } p_3 = 26;$$

$$w_4 = B, C = 48 \ 35 \ 14,3 \text{ „ „ „ „ } p_4 = 25;$$

$$w_5 = B, D = 104 \ 37 \ 7,8 \text{ „ „ „ „ } p_5 = 28;$$

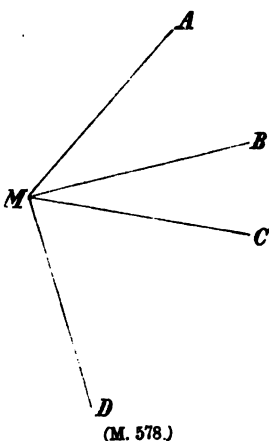
$$w_6 = C, D = 56 \ 1 \ 48,9 \text{ „ „ „ „ } p_6 = 44.$$

Werden die drei ersten Winkel mit ξ , η , ζ bezeichnet, so sind die sechs beobachteten Grössen durch sechs lineare Gleichungen

$$a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta = w_k$$

verbunden, wobei a_k , b_k , c_k die Werthe haben

No.	1	2	3	4	5	6
1.	a_k	1	0	0	-1	-1
	b_k	0	1	0	1	0
	c_k	0	0	1	0	1



(M. 578.)

Nimmt man als Unbekannte die Differenzen

$$\xi - w_1 = x, \quad \eta - w_2 = y, \quad \zeta - w_3 = z,$$

so erhält man Gleichungen von der Form

$$a_k x + b_k y + c_k z = u_k,$$

wobei die a_k , b_k , c_k die Werthe 1. haben, während die u_k sind

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0;$$

$$u_4 = +1, 1; \quad u_5 = -2, 4; \quad u_6 = +1, 1.$$

Die zur Aufstellung der Normalgleichungen nöthigen Zahlen sind

No.	a	b	c	u	paa	pab	pac	pbb	pbc	pcc	pau	pbu	pcu
1	+1	.	.	.	30
2	.	+1	20
3	.	.	+1	26
4	-1	+1	.	-1,1	25	-25	.	25	.	.	27,5	-27,5	.
5	-1	.	+1	+2,4	28	.	-28	.	.	28	-67,2	.	67,2
6	.	-1	+1	-1,1	.	.	.	44	-44	44	.	48,4	-48,4
Summen					83	-25	-28	89	-44	98	-39,7	20,9	18,8

Daher sind die Normalgleichungen

$$83x - 25y - 28z = -39,7$$

$$-25x + 89y - 44z = 20,9$$

$$-28x - 44y + 98z = 18,8.$$

Die Auflösungen dieses Systems sind

$$x = -0'',34, \quad y = 0'',24, \quad z = 0'',20.$$

Die ausgeglichenen Werthe der sechs Winkel sind daher

$$A, B = 48^\circ 17' 1'',06,$$

$$A, C = 96 \ 52 \ 17,04,$$

$$A, D = 152 \ 54 \ 7,00,$$

$$B, C = 48 \ 35 \ 15,98,$$

$$B, D = 104 \ 37 \ 5,94,$$

$$C, D = 56 \ 1 \ 49,96.$$

Die Summe $[\rho\lambda\lambda]$ ist 222,44; für das Verhältniss der Gewichte ergeben sich die abgerundeten Zahlen

$$\rho_x : \rho_y : \rho_z = 55 : 50 : 55,$$

also sind die Gewichte nahezu gleich gross.*)

6. Einige Schriftsteller empfehlen zur Erleichterung der Berechnung der Coefficienten der Normalgleichungen das gegebene auszugleichende System

$$\begin{aligned} 1. \quad & a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots = u_1, \\ & a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots = u_2, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

durch das folgende zu ersetzen

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{a_1}{u_1} x + \frac{b_1}{u_1} y + \frac{c_1}{u_1} z + \dots = 1, \\ & \frac{a_2}{u_2} x + \frac{b_2}{u_2} y + \frac{c_2}{u_2} z + \dots = 1, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Haben die Beobachtungen die Gewichte $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, so ist die Bedingung zur Bestimmung der Unbekannten aus dem Systeme 2.

$$\rho_1 \left(\frac{a_1}{u_1} x + \dots - 1 \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{a_2}{u_2} x + \dots - 1 \right)^2 + \dots = \text{Minimum}.$$

Hierfür kann man setzen

$$3. \quad \frac{\rho_1}{u_1^2} \cdot (a_1 x + \dots - u_1)^2 + \frac{\rho_2}{u_2^2} \cdot (a_2 x + \dots - u_2)^2 + \dots = \text{Minimum}.$$

Die Bedingung für die Ausgleichung des gegebenen Systems 1. ist

$$4. \quad \rho_1 (a_1 x + \dots - u_1)^2 + \rho_2 (a_2 x + \dots - u_2)^2 + \dots = \text{Minimum}.$$

Vergleicht man 3. und 4., so erkennt man, dass die Ersetzung des Systems 1. durch das System 2. gleichbedeutend damit ist, den Beobachtungen anstatt der gegebenen Gewichte

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$$

die Gewichte zuzuschreiben

$$\frac{\rho_1}{u_1^2}, \frac{\rho_2}{u_2^2}, \frac{\rho_3}{u_3^2}, \dots, \frac{\rho_n}{u_n^2}.$$

Hieraus folgt, dass es nicht statthaft ist, das System 1. durch 2. zu ersetzen; sowie, dass es überhaupt nicht statthaft ist, die durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen mit ungleichen Zahlen zu multipliciren.

Wenn man indess bedenkt, dass die Bestimmung der Gewichte niemals eine scharfe ist, sondern immer nur auf mehr oder minder unsicheren Abschätzungen beruht, so kann man, wenn man im Interesse einer Abkürzung der Zahlenrechnung es für sehr wünschenswerth halten sollte, die gegebenen Gleichungen 1. unbedenklich mit Zahlen multipliciren, deren Verhältnisse nicht viel von der Einheit abweichen; insbesondere kann man 2. für 1. setzen, wenn die $u_k : u_i$ für jedes k und i nahezu $= 1$ ist. Die auf diesem Wege berechneten ausgeglichenen Werthe werden dann nur sehr wenig von dem durch Verwendung des Systems 1. gewonnenen abweichen.

7. Wenn Functionen

deren Werthe $\varphi_1(x, y, z, \dots), \varphi_2(x, y, z, \dots), \varphi_3(x, y, z, \dots),$

*) MEYER, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von CZUBER, Leipzig 1859, pag. 305.

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

man beobachtet hat, nicht linear sind, so wähle aus den Gleichungen

$$\varphi_i(x, y, z, \dots) = u_i$$

so viele aus, als Unbekannte vorhanden sind und löse dieses System in geeigneter Weise auf. Es wird dabei genügen, solche Annäherungswerthe für die Unbekannten zu erhalten, für welche die Abweichungen der berechneten u_i von den beobachteten nicht mehr betragen wie die bei der Ausgleichung zu erwartende Abweichung dieser Grössen. Die so für x, y, z, \dots gefundenen Zahlen können als die angenähert richtigen Werthe gelten.

An denselben hat man geeignete Correctionen ξ, η, ζ, \dots anzubringen, um die ausgeglichenen Lösungen x', y', z', \dots zu erhalten. Unter den Voraussetzungen, dass innerhalb des Betrages dieser Correctionen der TAYLOR'sche Lehrsatz auf alle Functionen φ anwendbar ist, und dass die ξ, η, ζ, \dots so klein sind, dass man nur die erste Potenz dieser Correctionen zu berücksichtigen hat, ersetzt man jede Function φ durch

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \dots) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \zeta + \dots$$

Hierin hat man rechts für x, y, z, \dots die Annäherungswerthe zu setzen.

Hierdurch erhält man für ξ, η, ζ, \dots die linearen Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \xi + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \eta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \zeta + \dots = u_1 - \varphi_1,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \xi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \eta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \zeta + \dots = u_2 - \varphi_2,$$

aus denen man zur Bestimmung der ξ, η, ζ, \dots die Normalgleichungen ableitet.

8. Beispiel.

Um die Lage des Punktes K gegen die Basis AC zu bestimmen, misst man die Strecken AB und BC , sowie die Winkel PCK, PBK, PAK .

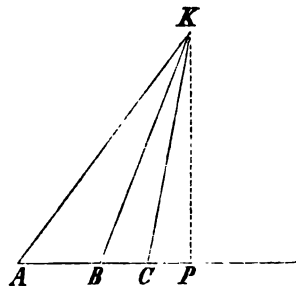
Setzt man

$\tan PCK = u_1, \tan PBK = u_2, \tan PAK = u_3,$
 $KP \perp AC, AC = d_1, AB = d_2, AP = x, PK = y,$
 so hat man zwischen den gesuchten und den beobachteten Grössen die Gleichungen

$$u_1 = \frac{y}{x - d_1},$$

$$u_2 = \frac{y}{x - d_2},$$

$$u_3 = \frac{y}{x}.$$



(M. 579.)

also eine überzählige Gleichung.

Sind x', y' Näherungswerthe der Unbekannten, so erhält man für die daran anzubringenden Correctionen ξ, η die Gleichungen

$$-\frac{y'}{(x' - d_1)^2} \cdot \xi + \frac{1}{x' - d_1} \cdot \eta = u_1 - \frac{y'}{x' - d_1}$$

$$-\frac{y'}{(x' - d_2)^2} \cdot \xi + \frac{1}{x' - d_2} \cdot \eta = u_2 - \frac{y'}{x' - d_2}$$

$$-\frac{y'}{x'^2} \cdot \xi + \frac{1}{x'} \cdot \eta = u_3 - \frac{y'}{x'};$$

nachdem man alle neun Coefficienten dieses Systems berechnet hat, leitet man die Normalgleichungen ab.

§ 5. Ausgleichung direkter und vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

1. Hat man durch einfache Messung für die Winkel x, y, z eines ebenen Dreiecks die Werthe ξ, η, ζ gefunden, so wird die Summe $\xi + \eta + \zeta$ nicht genau 180° betragen. Die Verbesserungen, welche man an den gemessenen Werthen anbringen muss, um die genaue Winkelsumme herzustellen, bestimmen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate in folgender Weise.

Sind x, y, z die verbesserten Winkel, so sind $x - \xi, y - \eta, z - \zeta$ die Abweichungen. Die Summe der Quadrate derselben muss ein Minimum werden unter der Bedingung

$$f = x + y + z - 180^\circ = 0.$$

Daher hat man (Differentialrechng., § 14, No. 14) das Minimum der Function

$$F = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + 2kf$$

zu bestimmen. Hierzu ergeben sich die Gleichungen

$$x - \xi + k = 0,$$

$$y - \eta + k = 0,$$

$$z - \zeta + k = 0,$$

$$x + y + z = 180^\circ.$$

Subtrahirt man die letzte von der Summe der andern, so folgt

$$k = \frac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ).$$

Hieraus folgen die gesuchten Winkel

$$x = \xi - \frac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ),$$

$$y = \eta - \frac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ),$$

$$z = \zeta - \frac{1}{3}(\xi + \eta + \zeta - 180^\circ).$$

Der Ueberschuss der gemessenen Winkelsumme über der theoretischen ist daher in drei gleiche Theile zu theilen und jeder der gemessenen Winkel um diesen Theil zu vermindern.

Kleinere Dreiecke auf der Erdoberfläche kann man als ebene und ihre Winkelsumme daher als nicht verschieden von 180° betrachten. Bei grösseren Dreiecken, wie sie bei Landesvermessungen vorkommen, bestimmt man den sphärischen Excess ε in Secunden mit hinlänglicher Genauigkeit, indem man den Flächeninhalt Δ nach den Formeln für ebene Dreiecke ermittelt, und alsdann von der Formel Gebrauch macht

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \cdot 206265.$$

Hierin ist R der Halbmesser der Kugel, für mittlere geographische Breiten und für Meter ist daher

$$\log R = 8,80484.$$

Bei der Ausgleichung der Winkel eines sphärischen Dreiecks hat man in 1. statt 180° zu setzen $180^\circ + \varepsilon$.

2. Hat man für jeden der Winkel eines ebenen Dreiecks n Messungen

$$x_1, x_2, \dots, x_n; \quad y_1, y_2, \dots, y_n; \quad z_1, z_2, \dots, z_n$$

gemacht, die gleiches Gewicht haben, so werden die ausgeglichenen Winkel aus den Bedingungen erhalten

$$\sum_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2] + 2k(x + y + z - 180^\circ) = \text{Min.}$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$x - \xi + \frac{1}{m}k = 0,$$

$$y - \eta + \frac{1}{n}k = 0,$$

$$z - \zeta + \frac{1}{r}k = 0,$$

$$x + y + z = 180^\circ,$$

wobei mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z beobachteten Winkel bezeichnet worden sind. Dieses System hat dieselben Lösungen, wie das entsprechende System in 1., wenn in 1. k durch $k:m$ ersetzt wird.

3. Hat man für x, y, z der Reihe nach m, n, r Beobachtungen gemacht, alle von demselben Gewichte, so erhält man zur Bestimmung der ausgeglichenen Werthe die Bedingung

$$\sum_1^m (x - x_i)^2 + \sum_1^n (y - y_i)^2 + \sum_1^r (z - z_i)^2 + 2k(x + y + z - 180^\circ) = \text{Min.}$$

Bezeichnet man wieder mit ξ, η, ζ die arithmetischen Mittel der für x, y, z durch Messung gefundenen Winkel und mit m, n, r die Reciproken von m, n, r , so folgen zur Bestimmung der ausgeglichenen Werthe die Gleichungen

$$x - \xi + mk = 0,$$

$$y - \eta + nk = 0,$$

$$z - \zeta + rk = 0,$$

$$x + y + z = 180^\circ.$$

Aus denselben erhält man, wenn man

$$m + n + r = s \quad \text{und} \quad \xi + \eta + \zeta - 180^\circ = d$$

setzt, die Lösungen

$$x = \xi - \frac{m}{s} \cdot d, \quad y = \eta - \frac{n}{s} \cdot d,$$

$$z = \zeta - \frac{r}{s} \cdot d.$$

4. Sind x, y, z nicht Winkel eines Dreiecks, sondern Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt für dieselben die Bedingung

$$1. \quad x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Die arithmetischen Mittel ξ, η, ζ kann man als Annäherungen betrachten, so dass man nur die erste Potenz der Correctionen zu beachten braucht; für dieselben folgt aus 1.

$$2\xi \cdot \lambda - 2\eta \cdot \mu - 2\zeta \cdot \nu = -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Die Unbekannten λ, μ, ν bestimmen sich aus der Bedingung

$$\begin{aligned} \sum_1^m (\xi + \lambda - x_i)^2 + \sum_1^n (\eta + \mu - y_i)^2 + \sum_1^r (\zeta + \nu - z_i)^2 \\ + 2k(2\xi\lambda - 2\eta\mu - 2\zeta\nu + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) = \text{Min.} \end{aligned}$$

Man erhält die Gleichungen

$$\lambda + 2m \cdot k\xi = 0,$$

$$\mu - 2n \cdot k\eta = 0,$$

$$\nu - 2r \cdot k\zeta = 0,$$

$$2\xi\lambda - 2\eta\mu - 2\zeta\nu = -\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Hieraus folgt

$$4k(m\xi^2 + n\eta^2 + r\zeta^2) = \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2.$$

Setzt man

$$\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 2d, \quad m\xi^2 + n\eta^2 + r\zeta^2 = s,$$

so ergeben sich die ausgeglichenen Werthe

$$x = \xi + \lambda = \xi \left(1 - \frac{m}{\delta} d \right),$$

$$y = \eta + \mu = \eta \left(1 + \frac{n}{\delta} d \right),$$

$$z = \zeta + \nu = \zeta \left(1 + \frac{r}{\delta} d \right).$$

5. Nach diesen Beispielen wenden wir uns zu einem allgemeineren Falle. Sind für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 durch direkte Beobachtung die Werthe $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ mit den Gewichten p_1, p_2, p_3, \dots gefunden worden und werden die x durch q lineare Bedingungen verbunden

$$f_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \dots - b_1 = 0,$$

$$1. \quad f_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \dots - b_2 = 0,$$

so hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$p_1(x_1 - \xi_1)^2 + p_2(x_2 - \xi_2)^2 + \dots + 2k_1f_1 + 2k_2f_2 + \dots = \text{Minimum}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2. \quad p_1x_1 - p_1\xi_1 + [ka_1] = 0,$$

$$p_2x_2 - p_2\xi_2 + [ka_2] = 0,$$

Die unbekannten Grössen k_1, k_2, \dots bezeichnet man nach GAUSS als Correlaten.

Aus 2. berechnet man die Grössen x_1, x_2, \dots und setzt dieselben in 1. ein. Dadurch erhält man q lineare Gleichungen zur Bestimmung der Correlaten. Nach Auflösung dieses Systems erhält man aus 2. die Unbekannten.

6. Sind einige unter den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0, \psi = 0, \dots$ nicht linear, so betrachtet man die beobachteten Werthe der Unbekannten als Annäherungen und bestimmt deren Verbesserungen; unter der Voraussetzung, dass nur erste Potenzen der Verbesserungen zu berücksichtigen sind und dass innerhalb der Werthe der Verbesserungen die Functionen und ihre ersten Differentialquotienten endlich und stetig sind, ersetzt man φ durch

$$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \lambda_2 + \dots = 0,$$

worin die Unbekannten x_1, x_2, \dots durch die beobachteten Werthe zu ersetzen sind. Hierdurch kommt man auf den Fall linearer Bedingungsgleichungen zurück (Vergl. das Beispiel in No. 4).

7. Beispiel.

A. Zur Bestimmung der Fläche eines Dreiecks hat man dessen Seiten x', y', z' , sowie die zugehörigen Höhen u', v', w' gemessen, und die Werthe erhalten

$$x, y, z, u, v, w.$$

Die zu bestimmenden Grössen sind durch die beiden Gleichungen verbunden

$$1. \quad x'u' - y'v' = 0,$$

$$x'u' - z'w' = 0.$$

Bezeichnet man die an x, y, \dots anzubringenden Verbesserungen mit

$$x, y, z, u, v, w,$$

so hat man für dieselben die aus 1. folgenden Gleichungen

$$2. \quad f = ux + xu - vy - yv + xv - yv = 0.$$

$$\varphi = ux + xu - wz - zw + xv - zw = 0.$$

Zur Bestimmung der Correctionen, sowie der Correlaten k_1 und k_2 , folgen aus der Bedingung

die Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2k_1f + 2k_2\varphi = \text{Minimum.}$

$$\begin{aligned} x + u(k_1 + k_2) &= 0, \\ y - vk_1 &= 0, \\ z - wk_2 &= 0, \\ u + x(k_1 + k_2) &= 0, \\ v - yk_1 &= 0, \\ w - zk_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die aus diesen Gleichungen folgenden Werthe von x, y, z, u, v, w setzt man in 2. ein; dadurch erhält man

$$\begin{aligned} (u^2 + x^2 + v^2 + y^2)k_1 + (u^2 + x^2)k_2 &= xu - yv, \\ (u^2 + x^2)k_1 + (u^2 + x^2 + w^2 + z^2)k_2 &= xu - zw. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnet man die Correlaten k_1, k_2 ; setzt die für dieselben gefundenen Werthe in 3. ein, so erhält man die Correctionen x, y, z, u, v, w .

Mit Hülfe derselben ergeben sich die ausgeglichenen Werthe

$$\begin{aligned} x' &= x + x, & y' &= y + y, & z' &= z + z, \\ u' &= u + u, & v' &= v + v, & w' &= w + w. \end{aligned}$$

Die aus denselben berechneten Produkte

$$x'u', \quad y'v', \quad z'w'$$

stimmen bis auf Grössen erster Ordnung in Bezug auf die Correctionen miteinander überein.

B. In einem Dreiecke hat man für die Seiten x', y', z' und die gegenüber liegenden Winkel u', v', w' durch direkte Beobachtungen von gleichem Gewichte die Grössen x, y, z, u, v, w gefunden.

Zwischen den zu bestimmenden Grössen bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} u' + v' + w' - 180^\circ &= 0, \\ x' \cos v' + y' \cos u' - z' &= 0, \\ x' \cos w' + z' \cos u' - y' &= 0, \end{aligned}$$

von denen nur die erste linear ist. Bezeichnet man die an den beobachteten Grössen anzubringenden kleinen Verbesserungen der Reihe nach wieder mit

$$x, y, z, u, v, w,$$

und setzt

$$\begin{aligned} u + v + w - 180 &= a, \\ x \cos v + y \cos u - z &= b, \\ x \cos w + z \cos u - y &= c, \end{aligned}$$

so erhält man für die Verbesserungen die Bedingungsgleichungen

$$f = u + v + w + a = 0,$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \varphi &= \cos v \cdot x - x \sin v \cdot u + \cos u \cdot y - y \sin u \cdot u - z + b = 0, \\ \psi &= \cos w \cdot x - x \sin w \cdot w + \cos u \cdot z - z \sin u \cdot u - y + c = 0. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2k_1f + 2k_2\varphi + 2k_3\psi = \text{Min.}$$

folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 5. \quad x + k_2 \cos v + k_3 \cos w &= 0, \\ y + k_2 \cos u - k_3 &= 0, \\ z - k_2 + k_3 \cos u &= 0, \\ u + k_1 - k_2 \cdot y \sin u - k_3 \cdot x \sin u &= 0, \\ v + k_1 - k_2 \cdot x \sin v &= 0, \\ w + k_1 - k_2 \cdot x \sin w &= 0. \end{aligned}$$

Substituiert man die aus 5. folgenden Werthe der Verbesserungen in 4., so

ergeben sich drei lineare Gleichungen für die Correlaten k_1, k_2, k_3 und nach Auflösung derselben aus 5. die Unbekannten.

8. Hat man zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \dots$$

die Werthe

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

der Functionen

$$\varphi_1(x, y, z, \dots),$$

$$\varphi_2(x, y, z, \dots),$$

$$\dots$$

$$\varphi_n(x, y, z, \dots)$$

beobachtet, und bestehen zwischen den u die Bedingungsgleichungen

$$f(u_1, u_2, u_3, \dots) = 0,$$

$$g(u_1, u_2, u_3, \dots) = 0,$$

$$h(u_1, u_2, u_3, \dots) = 0,$$

$$\dots$$

so hat man zunächst die Beobachtungen der u nach dem bisher Mitgetheilten auszugleichen und mit Benutzung dieser ausgeglichenen Werthe das in § 4 angegebene Verfahren einzuhalten.

9. Sind zur Bestimmung der Unbekannten

$$x, y, z, \dots$$

die Werthe

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

der linearen Functionen

$$a_1x + b_1y + c_1z + \dots$$

1.

$$a_2x + b_2y + c_2z + \dots$$

$$\dots$$

$$a_nx + b_ny + c_nz + \dots$$

beobachtet worden, haben diese Beobachtungen die Gewichte

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

und bestehen zwischen den Unbekannten die linearen Gleichungen

$$f_1 = a_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \dots = 0,$$

2.

$$f_2 = a_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \dots = 0,$$

$$\dots$$

so haben die Unbekannten die Werthe, für welche

3. $p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + p_3\lambda_3^2 + \dots + 2k_1f_1 + 2k_2f_2 + \dots = \text{Minimum},$

$$\lambda_r = a_rx + b_ry + \dots - u_r.$$

Aus 3. folgen für x, y, z, \dots und für die unbekannten Correlaten die Gleichungen

$$[paa]x + [pab]y + [pac]z + \dots + [\alpha k] = [ua],$$

$$[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \dots + [\beta k] = [ub],$$

$$[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \dots + [\gamma k] = [uc],$$

$$\dots$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der Unbekannten x, y, z, \dots ; im Verein mit den Bedingungsgleichungen, deren Anzahl mit der der Correlaten k_1, k_2, \dots übereinstimmt, genügen sie zur Bestimmung aller darin vorkommenden unbekannten Grössen.

10. Sind einige der Functionen $u_1, u_2, u_3, \dots, f_1, f_2, \dots$ nicht linear, so wählt man aus den Beobachtungen und den Bedingungsgleichungen so viele aus, als Unbekannte x, y, z, \dots zu bestimmen sind. Man wird dabei darauf achten, dass die Bestimmung der Unbekannten möglichst geringe Schwierig-

keiten macht. Man berechnet nun x, y, z, \dots aus den ausgewählten Gleichungen durch ein geeignetes Annäherungsverfahren bis zu einem genügenden Genauigkeitsgrade, und reducirt dann mit Hülfe des TAYLOR'schen Satzes die durch Beobachtung gefundenen Gleichungen sowie die Bedingungsgleichungen auf lineare Gleichungen für die an den berechneten Näherungswerthen anzubringenden Verbesserungen.

11. Die in den vorstehenden Abschnitten mitgetheilte Darstellung der Grundlinien der Ausgleichungsrechnung weicht von der üblichen Darstellungsweise insofern ab, als die meisten Schriftsteller nach GAUSS und LAPLACE die Ausgleichungsrechnung mit Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen verbinden.

Statt der von uns zu Grunde gelegten Forderung: Die Unbekannten so zu bestimmen, dass mit den Beobachtungen eine möglichst gute Uebereinstimmung erzielt und die Ausgleichung lediglich durch Auflösung linearer Gleichungen bewirkt wird, — geht man alsdann von der Forderung aus: Die **wahrscheinlichsten** Werthe der Unbekannten zu bestimmen. Um derselben zu genügen, muss man wissen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Beobachtung einen Fehler von gegebener Grösse zu machen, oder wenigstens, wie sich die Wahrscheinlichkeiten gegebener Fehler zu einander verhalten.

Eine aus allgemeinen Betrachtungen fließende, von nicht zu bestreitenden und auf alle vorkommenden Fälle passenden Voraussetzungen ausgehende Erledigung dieser Frage ist bis jetzt nicht gegeben worden und wird wohl nicht möglich sein; die werthvolle Arbeit HAGEN's*) geht von Voraussetzungen über die Zusammensetzung von Fehlern aus unzählig vielen unbemerkt kleinen Fehlern aus, die kaum jemals genau und in sehr vielen Fällen nicht einmal angenähert zutreffen.

Den entgegengesetzten Weg hat GAUSS, der Erfinder der Methode der kleinsten Quadrate**) eingeschlagen. GAUSS geht von der Annahme aus, dass bei direkten Beobachtungen von gleicher Genauigkeit das arithmetische Mittel unbestreitbar der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten sei; er zeigt, dass diese Annahme genügt, um das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu bestimmen, und findet für die Wahrscheinlichkeit $w dx$ einen Fehler vom Betrage x zu begehen, den Ausdruck

$$w dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2} dx,$$

wobei h eine von den besonderen Verhältnissen der Beobachtung abhängige von x aber unabhängige Zahl bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit $W dx_1, dx_2, dx_3, \dots$ dass bei einer Reihe von Beobachtungen die Fehler x_1, x_2, x_3, \dots zusammen treffen, ist das Produkt der für das Eintreffen von x_1, x_2, x_3, \dots einzeln geltenden Wahrscheinlichkeiten, also ist

$$W dx_1 dx_2 dx_3 \dots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots)} dx_1 dx_2 dx_3 \dots$$

W wird ein Minimum wenn

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots = \text{Minimum.}$$

Hiergegen kann eingewendet werden, dass man von Alters her zwar das arithmetische Mittel an die Stelle gleich guter von einander abweichender

*) HAGEN, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1837.

**) GAUSS, Theorie motus corporum coelestium, Hamburg 1809.

Messungen derselben Grösse gesetzt hat, gewiss aber ohne je dabei daran zu denken, dass man dadurch einen wahrscheinlichsten Werth gewinnen wollte, sondern wegen der Einfachheit der Rechnung. Man hat daher kein Recht, von der unbestrittenen Anwendung des arithmetischen Mittels aus einen Schluss auf das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu machen.

Zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit w hat man auch folgenden Weg eingeschlagen.

Unter allen Fehlern ist gewiss der Fehler $x = 0$ der wahrscheinlichste, die Function w hat daher für $x = 0$ ein Maximum.

Man darf ferner annehmen, dass entgegengesetzt gleiche Fehler gleich wahrscheinlich sind; hieraus folgt, dass w eine gerade Function ist. Für Fehler, die verhältnissmässig sehr klein sind, ist die Wahrscheinlichkeit nahezu $= 1$. Von einer gewissen, von den Besonderheiten jeder Beobachtungsreihe abhängigen Grösse x an nimmt die Wahrscheinlichkeit rasch ab, und verschwindet für Fehler, die eine gewisse Grenze überschreiten.

Die Wahrscheinlichkeit, irgend einen Fehler zu begehen, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dx;$$

da es nun gewiss ist, irgend einen Fehler (0 mit eingerechnet) zu machen, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dx = 1.$$

Diese Bedingungen genügen noch nicht, um die unbekannte Function w vollständig zu definiren. Da man mehr Eigenschaften nicht anzugeben vermag, so ergreift man das Auskunftsmittel, für w unter den bekannten Functionen, welche den Bedingungen genügen, die einfachste auszuwählen. Als solche empfiehlt sich

$$w = Ae^{-h^2 x^2};$$

sie hat für $x = 0$ das Maximum $w = A$; sie ist eine gerade Function; die Curve, deren Abscissen und Ordinaten x und w sind, hat die Wendepunkte

$$x = \pm \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{A}{\sqrt{e}},$$

und nähert sich von da an asymptotisch sehr rasch der Abscissenachse. Aus der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-h^2 x^2} dx = 1$$

folgt

$$A = 1 : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Da nun*)

*) Zur Bestimmung des Integrals

$$\gamma = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

bildet man nach CAUCHY

$$V = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy.$$

Die Ausführung der Integrationen ergibt

$$V = \gamma^2.$$

Substituirt man Polarcoordinaten, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

so ergibt sich

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Diese inductive Methode zur Bestimmung von w verdient vor jeder andern jedenfalls den Vorzug; die Willkür, welche bei der Bestimmung von w walte, tritt bei derselben ganz unverhüllt hervor.

Gegen alle Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in der Ausgleichungsrechnung ist der jedenfalls wesentliche Einwand zu erheben, dass es sich bei fast allen Fällen der Ausgleichungsrechnung nur um eine verhältnissmässig kleine Anzahl von Beobachtungen handelt, und dass es bedenklich ist, auf eine Gruppe von wenig Fällen Folgerungen aus den für grosse Zahlen geltenden Sätzen anzuwenden.

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r d\varphi dr.$$

Da nun

$$\int e^{-r^2} \cdot r dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} + \text{Const.},$$

so ist

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr = \frac{1}{2},$$

und daher

$$V = \frac{\pi}{4}.$$

Hieraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \mathcal{V} = \sqrt{\pi}.$$

Ersetzt man x durch hx , so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Renten-, Lebens- und Aussteuer-Versicherung

bearbeitet von

Dr. Richard Heger

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

§ 1. Lebenswahrscheinlichkeit.

1. Unter allen unserer Beobachtung zugänglichen Ereignissen sehen wir mit Recht diejenigen als von einer unübersehbaren grössten Mannigfaltigkeit von Ursachen bedingt an, die das Schicksal der Menschen ausmachen, insbesondere die, welche vom menschlichen Willen direkt abhängen. Wir begeben uns daher jedes Urtheils über unser eigenes Schicksal und über die Zukunft unserer Mitmenschen, und suchen das aus diesem Verzicht fliessende peinvolle Gefühl der Unsicherheit zu überwinden.

Wenn nun auch die Zukunft des Einzelnen sich unserem Urtheile entzieht, so hat sich doch ergeben, dass bei hinlänglich grossen Bevölkerungsgruppen in mehrfachen Beziehungen Regelmässigkeiten vorhanden sind, die einen ziemlich sicheren Schluss in die nächste oder selbst in die fernere Zukunft gestatten.

Bei einer einzelnen Familie ist z. B. die Anzahl der Todesfälle innerhalb bestimmter Zeitabschnitte scheinbar ganz regellos; bei einer Gemeinde von einigen Tausend Einwohnern ist diese Zahl schon von Jahr zu Jahr nahezu dieselbe, so dass gewisse, von dieser Zahl abhängende Einrichtungen mit Sicherheit vorher getroffen werden können; in einer grösseren Stadt von mehr als hunderttausend Einwohnern ist bereits die Zahl der wöchentlichen Todesfälle nahezu constant, oder doch insofern gleichmässig, dass auf dieselben Kalenderwochen mehrerer auf einander folgender Jahre dieselbe Anzahl von Sterbefällen kommt. Bei grösseren Bevölkerungsgruppen (Provinzen, Reichen), zeigen sich nicht bloss die Todesfälle selbst ihrer Zahl nach unveränderlich, sondern es sind auch die verschiedenen häufiger vorkommenden Todesursachen immer in nahezu demselben Verhältnisse an den Todesfällen betheiligt; ebenso bleibt bei der Zahl der jährlichen Todesfälle der Procentsatz derer, die ein bestimmtes Alter erreicht haben, wesentlich unverändert.

Auch bei den Ereignissen, die direkt vom Willen abhängig sind, zeigt sich eine unverkennbare Gleichmässigkeit. So kamen im Königreiche Preussen*) in den Jahren 1821—1875 jährlich auf das Tausend der Bevölkerung durchschnittlich 17,79 Eheschliessungen; von dieser Durchschnittszahl weichen die fünfzigjährigen

*) Preussische Statistik. (Amtliches Quellenwerk). Herausgegeben in zwanglosen Hefen vom Kgl. statistischen Bureau in Berlin. XLVIII. A. 1879. pag. 135.

Durchschnitte nur um ungefähr ± 1 ab; die grösste Ziffer (1871—1875) beträgt 18,06, die kleinste (1851—55) 16,75.

Auf 100000 zu Anfang eines Jahres Lebende kamen in Preussen im Laufe des nächsten Jahres in dem Zeitraume 1851—70 durchschnittlich 5 Personen durch Selbstmord um; die Durchschnittsziffer wird in 10 Jahren dieses Zeitraums erreicht; in 8 Jahren beträgt sie 4, in den beiden letzten 6. Vom Jahre 1830 bis 1853 war diese Ziffer unverändert in jedem Jahre 4*).

Nach QUETELET's mustergültigen Untersuchungen wurden in Frankreich von einer Million Bewohnern im Zeitraume 1826—30 jährlich durchschnittlich 135 wegen begangener Verbrechen verurtheilt, 1831—35 130, 1836—40 150, 1841—45 140, so dass selbst in diesen von Zufällen ganz besonders abhängigen Ereignissen eine auffällige Gleichmässigkeit sich ausspricht.

Seit der Erkenntniss der Gleichmässigkeit solcher Ereignisse ist erst eine wissenschaftliche Statistik möglich, ist dieselbe zugleich eine unentbehrliche Grundlage für jede auf das Ganze einer Bevölkerungsgruppe gerichtete Thätigkeit geworden.

2. Die statistischen Erhebungen haben insbesondere gezeigt, dass das Verhältniss der Anzahl derer, die das k te Lebensjahr erreichen, zu der Anzahl derer, die im Laufe des k ten Lebensjahres sterben, im Wesentlichen nur von der Zahl k abhängt. Man hat diese Verhältnisse durch mehrere in weit auseinander liegenden Zeiten angestellte Zählungen bestimmt und nur verhältnissmässig sehr geringe Aenderungen gefunden. Man hat daher das Recht, auf eine Reihe von Jahren hin für alle auf die Lebensdauer bezüglichen Rechnungen diese Verhältnisszahlen als nur von k abhängige, übrigens aber constante Zahlen anzusehen.

Auf Grund dieser Wahrnehmung hat man Tafeln construirt, welche angeben, wie Viele von einer gewissen Anzahl Geborener das 1., 2., 3., . . . Lebensjahr erfüllen. Die am Schlusse dieser Abhandlung angeführte Tafel giebt diese Zahlen für 100000 männliche und für 100000 weibliche Lebendgeborene für das Königreich Preussen an.**)

3. Bezeichnet a_k die in der Tafel enthaltene Anzahl der Personen, die das k te Lebensjahr erfüllen, so werden von a_x x jährigen Personen a_y y Jahre alt oder älter. Daher ist die Wahrscheinlichkeit w , dass eine x jährige Person das y te Lebensjahr erfüllt,

$$w = \frac{a_y}{a_x}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie vor Erfüllung des y ten Jahres stirbt, ist

$$1 - w = \frac{a_x - a_y}{a_x}.$$

Von a_y Personen, die das Ende des y ten Lebensjahres erreichen, sterben $a_y - a_x$ vor Erfüllung des x ten Jahres. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine

*) Preussische Statistik. XLVIII. A. Tabelle XLVII.

**) Mit von Seiten der Direction des Königlich Preussischen statistischen Bureaus gütigst gewährter Erlaubniss geben wir in dieser Tafel einen auszugswweisen Abdruck der im Jahrgang 1880 der Zeitschrift des Königlichen statistischen Bureaus veröffentlichten Tafel »Absterbeordnung, Mortalitätstafel, Tafel der Lebenserwartung und durchschnittliche Lebensdauer der Bevölkerung des Preussischen Staates.« Nach einer an den Verfasser ergangenen brieflichen Mittheilung besteht die Absicht, die Tafel im nächsten Jahre auf Grund des Materials aus anderweiten drei Beobachtungsjahren, sowie der durch die letzte Volkszählung ermittelten Altersvertheilung der Bevölkerung neu zu berechnen.

x jährige Person das y te Lebensjahr erfüllt, aber vor Erfüllung des z ten stirbt ist daher

$$w = \frac{a_y - a_z}{a_x},$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Personen P und Q die heute x und y Jahre alt sind, noch wenigstens p Jahre lang leben, ist das Produkt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P in p Jahren noch lebt, mit der, dass Q noch lebt, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{a_{x+p}}{a_x} \cdot \frac{a_{y+p}}{a_y}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P noch lebt, Q aber verstorben ist, ist

$$w_2 = \frac{a_{x+p}}{a_x} \left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_y}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide verstorben sind, ist

$$w_3 = \left(1 - \frac{a_{x+p}}{a_x}\right) \left(1 - \frac{a_{y+p}}{a_y}\right).$$

4. Halbirt man die Anzahl a_x der das x te Jahr vollendenden Personen und sucht das Lebensalter ξ auf, welches von $\frac{1}{2}a_x$ Personen erreicht wird, so ist die Wahrscheinlichkeit einer x jährigen Person, das ξ te Lebensjahr zu vollenden, gleich 1:2; man bezeichnet daher ξ als die wahrscheinliche Lebensdauer einer gegenwärtig x Jahre alten Person.

So ist z. B. für eine männliche Person

$$a_{35} = 51372, \quad \frac{1}{2}a_{35} = 25686.$$

Die letztere Zahl liegt zwischen den beiden zu 63 und 64 Jahren gehörigen

$$a_{63} = 26658, \quad a_{64} = 25378.$$

Man denkt sich nun die bei den a_{63} Personen im Laufe des 64. Lebensjahres eintretenden Todesfälle auf das Jahr gleichmässig vertheilt; unter dieser Voraussetzung würden

$$a_{63} - \frac{1}{2}a_{35} = 26658 - 25686 = 972$$

Personen vom 64. Lebensjahre noch den Bruchtheil

$$\frac{a_{63} - \frac{1}{2}a_{35}}{a_{63} - a_{64}} = \frac{972}{1280} = 0,76$$

verleben; daher ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer im 36. Lebensjahre stehenden Person

$$63,76.$$

5. Zum Zwecke einer vereinfachten Berechnung der Tafeln für Rentenversicherungen wurde bereits im Jahre 1724 von MOIVRE der Versuch gemacht, eine Formel aufzustellen, welche die Zahlen a_x als Function des Lebensalters angibt; gestützt auf die älteste von HALLEY 1693 entworfene Sterblichkeitstafel schlug MOIVRE die Formel vor

$$a_x = 86 - x,$$

durch welche die Zahl derer angegeben werden sollte, welche von 86 gleichzeitig Geborenen das x te Lebensjahr erfüllen.

Weder dieser Versuch, noch eine grössere Anzahl nachfolgende Versuche können als gelungen bezeichnet werden.

Von einer berechtigten theoretischen Grundlage ausgehend, kam GOMPERTZ zu einer Formel, die zwar noch nicht die Tabellen genügend deckte; es gelang aber im Anschlusse an GOMPERTZ's Grundgedanken MAKEHAM und LAZARUS, das GOMPERTZ'sche Gesetz so zu ergänzen, dass die Sterblichkeitstafeln mit völlig genügender Genauigkeit dadurch dargestellt werden.

6. Nach GOMPERTZ*) denkt man sich den Widerstand einer grossen Anzahl gleichaltriger menschlicher Organismen gegen die Zerstörung mit der Zeit dergestalt abnehmend, dass er im Verlaufe jedes verschwindend kleinen Zeitelementes sich auf denselben Bruchtheil des ursprünglichen Betrags vermindert. Setzt man den anfänglichen Betrag dieses Widerstandes w , und nimmt an, dass derselbe bis zum Ende des ersten Zeitelementes auf pw ($p < 1$) herabgesunken ist, so ist er am Ende des 2., 3., 4., . . . mten Zeitelementes

$$wp, wp^2, wp^3, \dots wp^m.$$

Nimmt man an, dass eine Zeiteinheit (Jahr) n Elemente enthalte, und dass am Ende eines Jahres der Widerstand den Betrag

$$wp_1$$

habe, so ist

$$p_1 = p^n,$$

und nach x Jahren ist der Widerstand

$$wp_1^x.$$

Das Reciproke der Widerstandskraft bezeichnet GOMPERTZ als Todeskraft, und nimmt an, dass die Anzahl derer von $a_x x$ jährigen Personen, die im nächsten Zeitelemente dx sterben, durch das Produkt von dx mit a_x und der Todeskraft gewonnen werde, also den Betrag habe

$$\frac{a_x}{wp_1^x} dx.$$

Ersetzt man hier $1:w$ und $1:p_1$ bez. durch b und q , so erhält man

$$a_x \cdot bq^x dx.$$

Diese Anzahl ist aber auch, wenn man die Sterblichkeitsliste für verschwindend kleine Intervalle dargestellt denkt, entgegengesetzt gleich dem Differentiale da_x . Daher hat man die Differentialgleichung

$$da_x = -a_x \cdot bq^x dx.$$

Aus derselben ergibt sich sofort

$$la_x = -\frac{b}{lq} \cdot q^x + \text{Const.}$$

und daher

$$1. \quad a_x = c \cdot Kq^x,$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$K = e^{-\frac{b}{lq}}.$$

Bei geeigneter Wahl der Constanten c , K und q verträgt sich das GOMPERTZ'sche Gesetz (1.) sehr gut mit den vorhandenen Sterblichkeitstafeln für die Lebensjahre 20 bis 60, ergibt aber stärkere Abweichungen für die Sterblichkeit im früheren und im späteren Alter.

7. Um diese Abweichungen zu beseitigen, nahm MAKEHAM neben der von GOMPERTZ eingeführten vom Alter abhängigen Todeskraft noch eine während des ganzen allmählichen Absterbens des Complexes von gleichaltrigen Personen beständig wirkende an.

Wird dieselbe mit β bezeichnet, so ergibt sich

$$-da_x = a_x \left(\beta dx + \frac{b}{lq} q^x \right) dx,$$

und hieraus folgt

$$a_x = c \cdot Kq^x h^x,$$

*) GOMPERTZ, On the nature of the function expressive of the law of human mortality and a new method of determining the value of life contingencies. Philos. Transact. 1825.

wenn man $e^{-\beta}$ durch h ersetzt. Dieses Gesetz ist als das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Sterblichkeitsgesetz bekannt. Dasselbe stellt sehr gut die Sterblichkeit vom 15. Lebensjahre an aufwärts dar.

Um auch für die ersten 15 Lebensjahre Uebereinstimmung zwischen dem Gesetze und den Tabellen zu erzielen, ergriff LAZARUS (1867) das Auskunftsmittel, zu der veränderlichen Todeskraft

$$a_1 q^x$$

noch andere mit abweichendem Dignanden zu nehmen, so dass die Todeskraft dargestellt wird durch die Summe

$$\beta + b_1 q^x + b_2 q_1^x + b_3 q_2^x + \dots$$

Es erwies sich als vollkommen genügend, diese Reihe auf die ersten drei Glieder zu beschränken. Wie man sieht, ergibt sich hieraus, wenn man $e^{-\frac{\beta_2}{l_1}}$ mit H bezeichnet

$$a^x = c \cdot h^x K q^x H q_1^x H q_2^x.$$

Diese letzte Formel stellt bei geschickter Wahl der darin enthaltenen sechs Constanten die Zahlen der Sterblichkeitslisten mit durchaus hinlänglicher Genauigkeit für alle Lebensalter dar.*)

§ 2. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Ein Kapital vermehrt sich durch Zinseszins, wenn die nach einem bestimmten Zeitraume fälligen Zinsen mit dem Kapitale vereinigt werden, so dass sie im nächsten Zeitabschnitte zu gleichem Zinsfusse sich verzinsen. Wir nehmen zunächst an, dass die Zinsen alljährlich kapitalisirt werden.

Ein Kapital c bringt in einem Jahre zu $p\%$ die Zinsen $cp : 100$, wächst also an auf

$$c \left(1 + \frac{p}{100} \right) = c \cdot r,$$

wenn man den Discontfaktor

$$1 + \frac{p}{100}$$

abkürzungsweise mit r bezeichnet. Das Endkapital cr des ersten Jahres ist das Anfangskapital des zweiten; daher ist das Endkapital am Ende des 2. Jahres

$$cr \cdot r = cr^2.$$

Mit jedem neuen Verzinsungsjahre tritt ein Faktor r hinzu; daher wächst das Kapital c durch jährlichen Zinseszins in n Jahren zu $p\%$ an auf das Endkapital

$$1. \quad k = c \cdot r^n.$$

Wenn das Kapital über n Jahre hinaus noch sich während eines echten Bruchtheils t eines Jahres verzinst, so wächst es auf den Betrag an

$$2. \quad k = c \cdot r^n \cdot \left(1 + \frac{tp}{100} \right), \quad t < 1.$$

Wie man sofort sieht, gelten diese Formeln auch dann, wenn die Zinsen nicht jährlich kapitalisirt werden, sondern wenn andere, kürzere oder längere Verzinsungsfristen gelten; nur hat man dann für p nicht die jährlichen Zinsen auf das Hundert, sondern die auf die Verzinsungsfrist entfallenden zu setzen und für n die Anzahl der Verzinsungsfristen. Wenn also z. B. die

*) AMTHOR, Das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Sterblichkeitsgesetz und seine Anwendung bei der Lebensversicherungs- und Rentenrechnung. Festschrift, Herrn Oberbürgermeister PFOTENHAUER u. s. w. gewidmet vom Lehrercollegium der Kreuzschule. Dresden, 1874. pag. 20.

Kapitalisirung vierteljährlich 20 Jahre lang erfolgt, und das Kapital sich zu 5% verzinst, so hat man in den Formeln 1. und 2.

$$r = 1 + \frac{1,25}{100}, \quad n = 80$$

zu setzen.

In dem Faktor $1 + tp:100$ hat man auch in diesem Falle für p die jährlichen Procente zu nehmen, da t die über eine ganze Anzahl von Verzinsungsfristen hieraus verzinste Zeit in Bruchtheilen eines ganzen Jahres angiebt.

2. Die Formel No. 1, 2 löst die Aufgabe, aus dem Anfangskapitale, dem Zinsfusse und der Zeit das Endkapital zu finden.

Beispiel. Verzinsen sich 8500 Mark durch halbjährlichen Zinseszins zu 4% 12 Jahre 8 Monate lang, so ist

$$c = 8500, \quad r = 1,02, \quad n = 25, \\ t = \frac{1}{6}, \quad 1 + \frac{tp}{100} = 1 + \frac{4}{600} = 1,0066 \dots;$$

daher ist

$$k = 8500 \cdot 1,02^{25} \cdot 1,00667 = 14038.$$

Das Anfangskapital ergibt sich zu

$$c = k : r^n \left(1 + \frac{tp}{100}\right).$$

3. Sind c , k und n gegeben und $t = 0$, so findet man den Discouttfaktor

$$1. \quad r = \sqrt[n]{\frac{k}{c}},$$

und hieraus den Zinsfuss.

Ist t von Null verschieden, so liefert die Gleichung 1. eine erste Annäherung p_1 zur Bestimmung des Zinsfusses. Da $\left(1 + \frac{pt}{100}\right)$ gegen r^n nur klein ist, so wird dieser Faktor ziemlich genau erhalten, wenn man p durch p_1 ersetzt. Man erhält mit Benutzung dieses Werthes eine zweite Annäherung p_2 aus

$$r_2 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_1}{100}\right)},$$

und in gleicher Weise weitere Näherungswerthe

$$r_3 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_2}{100}\right)},$$

$$r_4 = \sqrt[n]{\frac{k}{c} : \left(1 + \frac{tp_3}{100}\right)},$$

Dabei ist, wie man sofort sieht

$$p_1 > p_2, \\ p_2 < p_3 < p_1, \\ p_3 > p_4 > p_2,$$

Hieraus folgt, dass die Näherungswerthe

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$$

sich einer bestimmten Grenze nähern; auf so viele Decimalstellen zwei folgende Näherungswerthe übereinstimmen, auf ebenso viele Stellen stimmen sie mit dem gesuchten Zinsfusse p überein.

Beispiel. Wie gross ist der Zinsfuss, zu welchem 20000 Mark bei jährlichem Zinseszins in 18 Jahren 4 Monaten auf 43000 Mark anwachsen?

Hier ist $c = 20000$, $k = 43000$, $n = 18$, $t = \frac{1}{3}$. Man erhält

$$r_1 = \sqrt[3]{2,1500} = 1,0435,$$

$$1 + \frac{tp_1}{100} = 1,0145, \quad r_2 = r_1 : \sqrt[3]{1,0145} = 1,0426,$$

$$1 + \frac{tp_2}{100} = 1,0142, \quad r_3 = r_1 : \sqrt[3]{1,0142} = 1,0426.$$

Da r_2 und r_3 bis auf fünf Ziffern übereinstimmen, so folgt mit einer Genauigkeit bis auf die Hundertel

$$p = 4,26.$$

4. Zur Bestimmung der Zeit aus c , k und p bildet man die Gleichung

$$n \log r + \log \left(1 + \frac{tp}{100} \right) = \log k - \log c.$$

Da

$$1 + \frac{tp}{100} < r,$$

so ergibt sich n aus dieser Gleichung als die ganze Zahl des Quotienten

$$(\log k - \log c) : \log r,$$

der Divisionsrest ist

$$\log \left(1 + \frac{tp}{100} \right),$$

und liefert den Zeitrest t .

Beispiel. In wie viel Jahren wächst ein Kapital durch jährlichen Zinseszins zu $4\frac{1}{2}\%$ auf den 3fachen Betrag an?

Aus $\log(k:c) = 0,47712$, $\log r = 0,01912$ folgt

$$\log(k:c) = 24 \cdot \log r + 0,01824, \quad \text{also } n = 24.$$

Da nun

$$0,01824 = \log 1,0429,$$

und

$$4,29 : 4,5 = 0,95,$$

so ergibt sich als Antwort 24,95 Jahre.

5. Bezeichnet man mit p die Verzinsung auf Hundert und ein Jahr, und werden die Zinsen am Ende jedes m ten Theiles eines Jahres kapitalisirt, so ist nach n Jahren das Endkapital

$$k = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{nm} = c \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{\frac{100m}{p}} \right]^{\frac{pn}{100}}.$$

Wächst m unendlich, werden also die Zinsen continuirlich kapitalisirt, so erhält man

$$k = c \cdot e^{\frac{pn}{100}}.$$

Von der Annahme einer continuirlichen Kapitalisirung macht man bei einigen Aufgaben mit Vortheil Gebrauch.

6. Wenn man sich für n auf eine ganze Anzahl von Jahren, bez. auf eine ganze Anzahl solcher Zeitabschnitte beschränkt, nach deren Verlauf die Zinsen kapitalisirt werden, so giebt die Formel

$$k = c \cdot r^n$$

sowohl den Werth an, den ein Kapital c nach Verlauf von n Jahren erreicht, als den Werth, den ein vor n Jahren ausgeliehenes Kapital haben musste, um bis jetzt zu dem Betrage k anzuwachsen, wenn nur in diesem Falle die Zahl n — entsprechend einer Zeitbestimmung in der Richtung der Vergangenheit — negativ gerechnet wird.

Soweit es sich um Kapitalien handelt, bei denen für die in Frage kommenden Zeitabschnitte eine Vermehrung durch Zinseszins bei gleichbleibendem Zinsfusse

stattfindet, hat man sich den Werth eines Kapitals in stetiger Veränderung begriffen zu denken; der nach Ablauf einer ganzen positiven oder negativen Anzahl von Jahren erreichte Werth einer Summe, die heute c Mark beträgt, ist

$$k = c \cdot r^n$$

Diesen Werth k bezeichnet man als den Zeitwerth der Summe c , und zwar als den Vorwerth oder Nachwerth, je nachdem n positiv oder negativ ist.

7. Anstatt eine Zahlung c zu einer bestimmten Zeit zu leisten, kann man an einem um n (positive oder negative) Jahre davon entfernten Zeitpunkt den für diesen Zeitpunkt berechneten Zeitwerth von c , d. i. $c \cdot r^n$ zahlen; handelt es sich um einen Vorwerth, so kann der Gläubiger vom Schuldner billigerweise nicht mehr verlangen; im Falle eines Nachwerths muss der Gläubiger so viel verlangen, wenn er nicht Schaden haben soll.

Aus diesem Grundsatz ergibt sich sofort folgende Regel für die Aequivalenz von Zahlungen:

Eine Reihe Zahlungen, die zu bestimmten Zeiten zu leisten sind, kann durch eine andere Reihe von Zahlungen, die zu anderen bestimmten Zeiten geleistet werden, ersetzt werden, wenn nur für beide Reihen von Zahlungen die für einen beliebig gewählten Zeitpunkt berechneten Summen der Zeitwerthe einander gleich sind.

Hat man nach $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ Jahren die Summen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ zu bezahlen, so kann man dafür nach $t_1, t_2, t_3, \dots, t_s$ Jahren die Summen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$ zahlen, wenn die für das Ende des τ ten Jahres berechneten Zeitwerthe gleich sind

$$a_1 r^{\tau-t_1} + a_2 r^{\tau-t_2} + a_3 r^{\tau-t_3} + \dots = a_1 r^{\tau-t_1} + a_2 r^{\tau-t_2} + a_3 r^{\tau-t_3} + \dots$$

Wenn diese Gleichung für irgend einen Werth von τ identisch ist, so ist es auch für jeden andern; denn wenn man τ durch eine andere Zahl σ ersetzt, so ändern sich alle Glieder der Gleichung um denselben Faktor

$$r^{\sigma-\tau}.$$

8. Werden mehrere gleiche Zahlungen R (Renten) in jährlichen Zwischenräumen im Ganzen n mal geleistet, so ist deren Werth bei Auszahlung der letzten Rente

$$\begin{aligned} S &= R r^{n-1} + R r^{n-2} + \dots + R r + R, \\ &= R(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1), \\ &= R \frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

Da $r - 1 = p : 100$, so hat man schliesslich

$$S = \frac{100 R}{p} (r^n - 1).$$

Dieselbe Formel ist auch dann verwendbar, wenn die Rente nicht jährlich gezahlt wird, sobald dabei die Zinsen nicht jährlich kapitalisirt werden, sondern an denselben Terminen, an welchen die Renten zahlbar sind; der Zinsfuss p hat dann eine entsprechend veränderte Bedeutung.

Werden z. B. 20 Renten von je 1500 Mark in vierteljährlichen Abständen bezahlt, und die Zinsen zu 5% vierteljährlich kapitalisirt, so ist der Zeitwerth aller Renten bei der Auszahlung der 20ten

$$S = \frac{100 \cdot 1500}{1,25} \cdot (1,0125^{20} - 1).$$

9. Wird ein Kapital C (Mise) zu jährlichem Zinseszins zu $p\%$ angelegt, und

von demselben in jährlichen Abständen, beginnend ein Jahr nach Anlegung der Mise, eine Rente R bezogen, so ist der Kassenbestand K unmittelbar nach der Auszahlung der n ten Rente vermehrt um den Zeitwerth aller n Renten gleich dem Zeitwerthe der Mise, alles berechnet für die Auszahlung der letzten Rente. Daher hat man die Gleichung

$$C \cdot r^n = \frac{100R}{p} (r^n - 1) + K.$$

Je nachdem $R \geq \frac{100}{Cp}$, ist $K \geq C$.

10. In letzterem Falle kann eine vollständige Verzehung der Mise eintreten; aus der Bedingung $K = 0$ ergibt sich folgender, als Rentengleichung bezeichneter Zusammenhang zwischen C , R , p und n

$$C \cdot r^n = \frac{100R}{p} (r^n - 1).$$

Hieraus folgt

die Mise
$$C = \frac{100R}{p} \left(1 - \frac{1}{r^n}\right);$$

die Rente
$$R = \frac{Cp}{100} : \left(1 - \frac{1}{r^n}\right).$$

11. Eine gegebene Mise C kann durch eine gegebene Rente R bei gegebenem Zinsfusse p im Allgemeinen nicht vollständig aufgezehrt werden; die Auszahlung von Renten wird solange erfolgen, bis ein Kassenbestand K übrig ist, der mit den einjährigen Zinsen zusammen weniger als R beträgt. Man hat alsdann die Aufgabe zu lösen, die grösstmögliche Anzahl von Renten, sowie den nach Auszahlung der letzten Rente verbleibenden Kassenrest zu bestimmen.

Die Gleichung No. 9 ergibt

$$r^n \left(1 - \frac{Cp}{100R}\right) = 1 - \frac{Kp}{100R},$$

folglich ist

$$1. \quad n \log r + \log \left(1 - \frac{Cp}{100R}\right)^{-1} = \log \left(1 - \frac{Kp}{100R}\right)^{-1}.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$K < \frac{R}{r}.$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$\frac{Kp}{100R} < \frac{p}{100r}, \quad \text{d. i.} < \frac{p}{100 + p}.$$

Hieraus folgt

$$1 - \frac{Kp}{100r} > \frac{100}{100 + p}, \quad \text{d. i.} > \frac{1}{r}.$$

Nach Gleichung 1. wird daher n als die ganze Zahl des Quotienten

$$\log \left(1 - \frac{Cp}{100R}\right)^{-1} : \log r$$

gefunden; der Divisionsrest ist

$$\log \left(1 - \frac{Kp}{100R}\right)^{-1}$$

und dient zur Bestimmung des Kassenrestes K .

Beispiel. Eine Rentenanstalt gewährt für eine bei Vollendung des 18. Lebensjahres eingezahlte Summe von 344,28 Mk. vom Ende des 50. Lebensjahres an lebenslänglich jährlich 100 Mk. Rente; auf wie viele Jahre ist der

Genuss der Rente berechnet und wie gross ist nach Verlauf dieser Zeit der Kassenrest, wenn die Gesellschaft die Verzinsung zu $4\frac{1}{2}\%$ ansetzt?

Die Mise beträgt

$$344,28 \cdot 1,04^{31}.$$

Daher ist

$$\frac{Cp}{100R} = \frac{344,28 \cdot 1,04^{31} \cdot 4}{10000} = 0,46440.$$

Hieraus folgt

$$\log \left(1 - \frac{Cp}{100R} \right)^{-1} = 0,27116.$$

Die Division durch $\log r = 0,01703$ ergibt

$$n = 15, \quad \log \left(1 - \frac{Kp}{100R} \right)^{-1} = 0,01571,$$

also

$$K = 3,68 \cdot R : p = 92.$$

12. Um p zu bestimmen, ersetzt man in der Rentengleichung p durch $100(r-1)$ und erhält

$$Cr^n = \frac{R}{r-1} (r^n - 1),$$

woraus die Gleichung für r hervorgeht

$$Cr^{n+1} - (C+R)r^n + R = 0, \quad \text{oder}$$

$$1. \quad r^n \left[1 + \frac{R}{C} - r \right] - \frac{R}{C} = 0.$$

In diese Gleichung setzt man versuchsweise

$$p = 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5, \dots$$

also

$$r = 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05; \dots$$

und setzt diese Versuche so lange fort, bis man zu zwei auf einander folgenden Werthen p_1 und p_2 von p gelangt, für welche die linke Seite der Gleichung 1., die wir abkürzungsweise mit y bezeichnen wollen, entgegengesetzte Werthe erhält. Man kann r als Abscisse, y als Ordinate eines Punktes betrachten. Die Curve

$$y = r^n \left[1 + \frac{R}{C} - r \right] - \frac{R}{C}$$

schneidet alsdann die Abscissenachse in einem zwischen r_1 und r_2 gelegenen Punkte. Man erhält die Abscisse des Schnittpunktes angenähert, wenn man den zwischen den Abscissen r_1 und r_2 enthaltenen Curvenbogen mit der durch seine Enden bestimmten Sehne verwechselt. Die Abscisse r_3 des Schnittpunkts der Sehne mit Abscissenachse erhält man aus der Proportion

$$P_1'P_3':P_3'P_2' = P_1'P_1:P_2P_2',$$

$$\text{d. i. } (r_3 - r_1):(r_2 - r_3) = y_1:y_2.$$

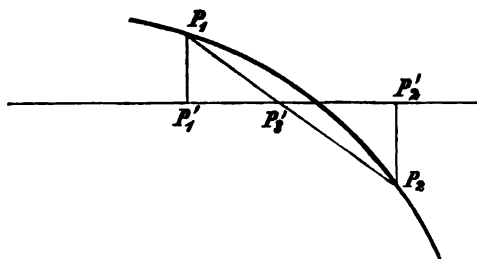
Hieraus folgt

$$r_3 = \frac{r_2 - r_1}{y_1 + y_2} \cdot y_1.$$

wenn y_2 den absoluten Werth von P_2P_2' bezeichnet.

Hierauf berechnet man die zu r_3 gehörige Ordinate y_3 , und wiederholt dann dasselbe Verfahren, indem man y_3 mit derjenigen der beiden Ordinaten

$P_1'P_1$ und $P_2'P_2$ zusammen nimmt, welche mit y_3 nicht dasselbe Vorzeichen hat u. s. w. bis man durch diese fortgesetzte Interpolation zu einem Werthe r gelangt ist, für welchen der zugehörige Werth von y hinlänglich genau mit Null übereinstimmt.



(M. 580.)

Beispiel. Für $C = 28000$, $R = 3000$, $n = 12$ erhält man

$$\frac{R}{C} = 0,10714;$$

für $p = 3; 4; 5;$
folgt $y = + 0,00299; + 0,00034; - 0,00349.$

Ersetzt man in der für r_3 gegebenen Interpolationsformel $r_2 - r_1$ durch $0,01$, y_1 durch $0,00034$, y_2 durch $0,00349$, so erhält man

$$r_3 = 1,0489.$$

Der zugehörige Werth von y ist $+ 0,00001$, also mit Null hinlänglich genau übereinstimmend. Daher ist

$$p = 4,89.$$

13. Wenn die am Ende jedes Jahres zahlbare Rente R durch m gleich grosse in gleichen Zwischenräumen zahlbare Renten R' ersetzt werden und die erste Zahlung $1:m$ Jahr nach Einlegung der Mise erfolgen soll, so hat man R' so zu wählen, dass die Summe aller Einzahlungen R' , jede vermehrt um die bis zum Jahresschlusse von ihr gebrachten Zinsen, gleich der jährlichen Rente R ist. Man hat daher die Gleichung

$$\begin{aligned} R &= \sum_0^{m-1} R' \left(1 + \frac{k}{m} \cdot \frac{p}{100} \right) \\ &= mR' + \frac{pR'}{100m} (1 + 2 + \dots + m-1), \\ &= R' \left(m + p \cdot \frac{m-1}{200} \right). \end{aligned}$$

Beispiel. Soll die Rente R' vierteljährlich bezahlt werden und ist $p=5$, so ist

$$R = 4 \frac{3}{40} \cdot R', \quad R' = 0,24540 \cdot R.$$

14. Für manche Aufgaben aus dem Versicherungswesen ist die Betrachtung einer continuirlichen Rente unter gleichzeitiger Anwendung continuirlicher Capitalisirung der Zinsen von Bedeutung. Bei continuirlicher Verzinsung (No. 5) wächst die Einheit des Kapitals in x Jahren an auf

$$e^{\frac{px}{100}} = v^x,$$

wenn $e^{p:100}$ mit v bezeichnet wird.

Bezeichnet ρ die Summe aller der Beträge (ohne Rücksicht auf Zeitwerth), die während einer Zeiteinheit als Rente gewährt werden, so ist die in dem Zeitelemente dx erfolgte Rentenzahlung

$$\rho dx,$$

und daher der Werth der in x Jahren bezahlten continuirlichen Rente, berechnet für den Zeitpunkt der Auszahlung der letzten Rente

$$S = \int_0^x v^x \rho dx = \frac{100\rho}{p} (v^x - 1).$$

Die Summe R der Zeitwerthe aller im Laufe eines Jahres gezahlten Renten, für das Ende des Jahres berechnet, entsteht hieraus, wenn man $x = 1$ setzt; man erhält

$$R = \frac{100\rho}{p} (v - 1).$$

Durch Division ergibt sich aus diesen beiden Gleichungen

$$S = R \cdot \frac{v^x - 1}{v - 1}.$$

Die unmittelbar vor Beginn der Auszahlung dieser Rente eingezahlte Misse C hat sich in x Jahren vermehrt auf

$$Cv^x.$$

Vergleicht man dies mit dem für S gegebenen Werthe, so erhält man die Rentengleichung für den Fall der continuirlichen Rente

$$Cv^x = R \cdot \frac{v^x - 1}{v - 1}.$$

15. Die Zurückzahlung (Tilgung, Amortisation) einer Anleihe C erfolgt in der Regel so, dass der Schuldner (Staat, Gemeinde, Actiengesellschaft u. s. w.) eine bestimmte, unveränderliche Summe R alljährlich auf Verzinsung und Zurückzahlung verwendet; was man von dieser Summe nicht zur Bezahlung der Zinsen auf den noch nicht zurückgezahlten Theil der Anleihe braucht, wird zur Zurückzahlung eines Theils der Schuld verwendet.

Der Zusammenhang zwischen C , R , dem Zinsfusse p und der Dauer n der Amortisation ergibt sich aus der Bemerkung, dass man die Gesamtheit der Gläubiger als einen Rentengläubiger ansehen kann, der jährlich die Summe R so lange erhält, bis das Kapital C aufgezehrt ist. So lange nur die Zinsen des Kapitals an die Gläubiger bezahlt werden, ändert sich die Schuld nicht; daher ist die Schuld C die Misse für die Rente R und man hat

$$C \cdot r^n = \frac{100R}{p} (r^n - 1).$$

Hat man ein System von zusammengehörigen Werthen C , R , p und n ermittelt, so gilt es nun, den Tilgungsplan zu entwerfen; in demselben ist anzugeben, wie viel jährlich zur Verzinsung des Anleiherestes und wie viel zur Tilgung zu verwenden ist. Hierbei setzen wir voraus, dass die Schuld in Abschnitte (Staatsschuldscheine, Prioritätsobligationen u. s. w.) zerlegt ist, von denen wir der Einfachheit wegen annehmen, dass sie alle auf den gleichen Betrag A lauten.

Man hat bei der ersten Tilgung noch die Zinsen der ganzen Anleihe zu bezahlen, also $pC:100$, und kann daher zur Tilgung verwenden

$$R - \frac{pC}{100}.$$

Ist q_1 die ganze Zahl des Quotienten

$$\left(R - \frac{pC}{100}\right) : A,$$

und ρ_1 der Rest, so werden q_1 Schuldscheine im Gesamtbetrage $q_1 A$ getilgt, und der Rest ρ_1 zu $p\%$ verzinslich angelegt. Am Ende des zweiten Jahres hat man die Zinsen auf

$$C - q_1 A$$

zu bezahlen; zur Tilgung ist daher verfügbar

$$R - (C - q_1 A)$$

und ausserdem noch der durch die Zinsen eines Jahres vermehrte Tilgungsrest ρ_1 , also zusammen

$$R - (C - q_1 A) + \rho_1 r.$$

Man tilgt hiernach am Ende des 2. Jahres so viele (q_2) Schuldscheine, als die ganze Zahl des Quotienten beträgt

$$[R - (C - q_1 A) + \rho_1 r] : A$$

und überträgt den Rest ρ_2 auf das nächste Jahr.

Dieses Verfahren ist bis zur vollständigen Tilgung der Anleihe zu wiederholen.

Den Tilgungsresten, die jedes Jahr in den Händen des Schuldners bleiben, stehen gleich grosse, noch ungetilgte Beträge in den Händen der Gläubiger gegenüber; die für die letzteren zu zahlenden Zinsen gleichen sich gegen die zu Gunsten des Schuldners verzinsten Tilgungsreste aus, so dass durch die Tilgungsreste der Abschluss der ganzen Tilgung nur insoweit beeinträchtigt werden kann, als durch die von Jahr zu Jahr zu berechneten Zinsen der Tilgungsreste eine Ungenauigkeit in den letzten Stellen hervorgerufen werden kann, die indess als unwesentlich zu betrachten ist.

Beispiel. Eine Anleihe von 50000 Mark soll durch 10 gleiche jährliche Zahlungen zu 4½ verzinst und getilgt werden; wie viel ist jährlich hierfür aufzuwenden und wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn die Schuld in 500 Abschnitte von 100 Mark eingetheilt ist?

Aus der Gleichung

$$R = \frac{Cp}{100} \left(1 - \frac{1}{r^n} \right)$$

folgt

$$R = 6164,6.$$

Die Zinsen der Anleihe betragen 2000 Mk.; aus der Differenz

$$6164,6 - 2000 = 4164,6$$

ergibt sich, dass 41 (q₁) Schuldscheine getilgt und 64,6 Mk. (p₁) Tilgungsrest auf das nächste Jahr übertragen werden. — Am Ende des 2. Jahres sind zu verzinsen 500 — 41 = 459 Schuldscheine, also an Zinsen auszugeben 1836,0 Mk.; da p₁ durch die Zinsen eines Jahres auf 67,2 Mk. anwächst, so verbleiben zur Tilgung

$$6164,6 + 67,2 - 1836,0 = 4395,8.$$

Folglich werden am Schlusse des zweiten Jahres 43 Schuldscheine getilgt und 95,8 Mk. auf das nächste Jahr übertragen.

Auf diese Weise ergibt sich der nachstehende Tilgungsplan. In der Spalte Kapitalrest ist angegeben, welches Kapital im nächsten Jahre zu verzinsen ist.

Ende des Jahres	Zinsen	Tilgung in Stücken zu 100 Mark	Kapitalrest	Tilgungsrest	
1	2000	41	459	64,6	1
2	1836	43	416	95,8	2
3	1664	46	370	0,2	3
4	1480	46	324	84,8	4
5	1296	49	275	56,8	5
6	1100	51	224	23,7	6
7	896	52	172	93,3	7
8	688	55	117	73,7	8
9	468	57	60	73,2	9
10	240	60		0,7	10

Der schliessliche Kapitalbestand (0,7 Mk.) lässt sich nur dadurch herabdrücken, dass man die Rechnung mit grösserer Genauigkeit, als hier, durchführt; ist aber praktisch ganz ohne Bedeutung.

16. Den in der ungleichmässigen Gütervertheilung wurzelnden sozialen Missständen kann man unter anderem dadurch entgegenarbeiten, dass man die Ansammlung grosser, milden Zwecken aller Art bestimmter Kapitalien in den Händen von Staats- oder Gemeindeverwaltungen oder von gemeinnützigen Vereinen möglichst befördert. Je mehr es die Staatsregierungen für eine ihrer

wesentlichen Aufgaben ansehen, die Nothstände in den untersten Volksschichten durch Ausdehnung der Haftpflicht der Arbeitgeber, durch Einführung obligatorischer Kranken- und Invalidenversicherung möglichst abzuschwächen, um so mehr werden dann die der Wohlthätigkeit zugewiesenen Stiftungsgelder zur Ausgleichung bei Nothlagen auch in den übrigen Bevölkerungsschichten, zur Unterstützung von Lernenden aller Art, zur Beihilfe in Krankheitsfällen, zur Gewährung von Asylen für vereinsamte oder der sittlichen Anleitung bedürftige Personen u. s. w. verwendbar sein.

Die Grundlagen zur Ansammlung grosser Kapitalien zu diesen Zwecken müssen nach wie vor durch Schenkungen und Vermächnisse erfolgen.

Es können leicht Mittel angegeben werden, durch welche solche Kapitalien, ohne wesentliche Beeinträchtigung des Zweckes, zu dem sie gestiftet worden sind, zur Kapitalvermehrung benutzt werden können.

Als einfachstes Mittel empfiehlt es sich, dass für die Verwaltungen von Stiftungen folgende Grundsätze angenommen werden:

A. Man behält sich bei der Uebernahme jedes für milde Zwecke gestifteten Kapitals vor, dessen Zinsen nicht sofort im Sinne der Stiftung zu verwenden, sondern es zuvor während einer Reihe von Jahren durch Zinseszins sich vermehren zu lassen.

Es würde sich empfehlen, diese Wartezeit der Kapitalien im Allgemeinen vorher zu bestimmen, etwa so, dass man 5 oder 10 Jahre wählt, je nachdem es mehr oder weniger dringend erwünscht ist, dass die Zinsen des Kapitals stiftungsgemäss verwendet werden.

B. Nach Ablauf der Wartezeit wird nicht der ganze Zinsertrag des Kapitals stiftungsgemäss verwendet, sondern nur ein bestimmter Bruchtheil desselben, etwa zwei Drittel; das letzte Drittel dient zur Kapitalvermehrung.

C. Der zur Kapitalvermehrung dienende Bruchtheil der Zinsen wird zunächst für eine bestimmte Reihe von Jahren der Stiftung zugewiesen, aus welcher er fliesst. Die Verwaltung behält sich das Recht vor, nach Ablauf dieser Zeit den genannten Betrag nach freiem Ermessen anderen milden Stiftungen zuzuführen.

Nimmt man an, dass Stiftungsgelder nach Abzug der Verwaltungskosten eine Verzinsung von 4,25% zulassen, so wächst ein Kapital C in 5 bez. in 10 Jahren an auf

$$K = 1,0425^5 \cdot C, \text{ bez. } 1,0425^{10} \cdot C,$$

d. i. auf den 1,23fachen, bez. 1,52fachen Betrag.

Hieraus ist ersichtlich, dass nach 5jähriger Wartezeit das Kapital bereits im 6. Jahre zu $\frac{2}{3} \cdot 4,25 = 2,83\%$ nur um den 10. Theil weniger stiftungsgemäss verwendbare Zinsen bringt, als wenn es ohne Wartezeit sofort die vollen Zinsen zu 4,25% für die Stiftung abgeworfen hätte; nach 10jähriger Wartezeit betragen die Zinsen im 11. Jahre zu 2,83% ebensoviel wie die des ursprünglich gestifteten Kapitals zu 4,3%.

Wird der dritte Theil des jährlichen Zinsbetrags zur Kapitalvermehrung verwendet, so wächst das Kapital durch Zinseszins zu $4,25 : 3 = 1,417\%$.

Nach Ablauf von $n + 5$ bez. $n + 10$ Jahren nach der Stiftung erreicht das Kapital bei 5. bez. 10jähriger Wartezeit den Betrag

$$1,0425^5 \cdot 1,01417^n \cdot C, \text{ bez. } 1,0425^{10} \cdot 1,01417^n \cdot C.$$

Die folgende Tafel enthält für einige Werthe von n die Faktoren, mit denen man C multipliciren muss, um den Endwerth nach n -jähriger stiftungsgemässer Verwendung, (d. i. $n + 5$ bez. $n + 10$ Jahre nachdem das Kapital gestiftet wurde) zu erhalten:

n	40	60	80	100	120	180
5 Jahre Wartezeit	2,229	2,864	3,795	5,028	6,666	15,50
10 Jahre „ „	2,662	3,527	4,673	6,192	8,203	19,08

Wenn man es nicht rathlich finden sollte, die vorgeschlagene auf Kapitalvermehrung gerichtete Verwaltung von Stiftungsgeldern ganz allgemein einzuführen, so könnte doch durch Gesetz eine solche Verwaltungsart als zulässig erkannt werden. Man könnte dann bestimmen, dass die zur Verwaltung einer Stiftung bestimmten Behörden nach der Uebernahme derselben bei einer Oberbehörde um die Erlaubniss nachsuchen können, das Kapital während einer bestimmten Zeit — vielleicht 60 bis 70 Jahre lang — auf Vermehrung verwalten und die durch die Vermehrung geschaffenen Kapitalien in bestimmter Weise auch für andere, verwandte, näher anzugebende Zwecke verwenden zu dürfen; nach Ablauf dieser Zeit hätte dann die Oberbehörde Gelegenheit zu prüfen, ob eine Fortsetzung der vermehrenden Verwaltung in dem vorliegenden Falle angezeigt erscheint oder nicht.

Dabei wäre als Grundsatz auszusprechen, dass man das Einverständniss des Stifters mit der vermehrenden Verwaltung voraussetzt, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil erklärt wird; hierdurch dürften alle juristischen Bedenken gehoben sein.

Bis zur gesetzlichen Regelung dieser Angelegenheit wäre es zu wünschen, dass Personen, die die Absicht haben eine Stiftung zu errichten, für die hier gemachten Vorschläge erwärmt werden, so dass sie die vermehrende Verwaltung für die zu begründende Stiftung ausdrücklich zulassen*).

§ 3. Berechnung der Prämien für Renten-, Lebens- und Aussteuerversicherung.

1. Wenn eine Summe R nach Verlauf von n Jahren unter der Voraussetzung zahlbar ist, dass ein Ereigniss eingetreten ist, dessen Eintritt die Wahrscheinlichkeit w hat, so ist der heutige Werth der Summe

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot w.$$

Denn ist z. B. jede von a_x heute x jährigen Personen verpflichtet, nach n Jahren, im Falle, dass die Person diesen Zeitpunkt erlebt, R zu zahlen, so wird die Summe nur von a_{x+n} Personen bezahlt; der auf heute berechnete Zeitwerth aller wirklich geleisteten Zahlungen beträgt daher

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot a_{x+n},$$

und der durchschnittlich auf eine Person entfallende Betrag ist

$$R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \frac{a_{x+n}}{a_x} = R \cdot \frac{1}{r^n} \cdot w,$$

wenn w die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine heute x Jahre alte Person noch n Jahre lebt.

*) Aehnliche Vorschläge macht MÖLLINGER, Das cyclische Verwaltungssystem. Zürich 1879.

2. Hat eine heute n jährige Person lebenslänglich eine Jahresrente vom Betrage 1 (Mark, Gulden, Franken) zu beziehen, und erfolgt die Zahlung am Ende jedes Jahres, so ist der auf heute berechnete Werth der lebenslänglichen Rente

$$1. \quad {}^n R_1 = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^3} + \dots$$

Diese Reihe hört auf, sobald in der Sterblichkeitstafel $a_{n+s} = 0$ ist.

Wird die Rente praenumerando gezahlt, so vermehrt sich die Reihe 1. um die heute zahlbare Rente; bezeichnet man die praenumerando zahlbare Rente mit

$${}_1 R,$$

so hat man daher

$$2. \quad {}_1 R = 1 + {}^n R_1.$$

Wenn eine $n - s$ jährige Person heute eine Summe C bezahlt, um damit eine nach Vollendung des n ten Lebensjahres beginnende lebenslängliche jährliche Rente 1 zu erwerben, so hat man durch Vergleichung der auf heute berechneten Zeitwerthe

$$C = \frac{1}{r^s} \cdot \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot {}^n R_1;$$

denn der heutige Werth der 1., 2., 3., ... Rente ist

$$\frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^s}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^{s+1}}, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^{s+2}}, \dots$$

Diese Grössen erhält man aus dem 1., 2., 3., ... Gliede der Reihe 2. durch Multiplication mit dem Faktor

$$\frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^s}.$$

3. Eine Person macht zu verschiedenen Zeiten ungleiche Einzahlungen, um dadurch eine am Ende des n ten Lebensjahres beginnende jährliche Rente zu erwerben; wie gross ist dieselbe?

Die gesuchte Rente wird gefunden, indem man nach No. 2, 3 für jede einzelne Einzahlung die Rente berechnet und alle diese Renten addirt. Die am Ende des $(n - s)$ ten Jahres geleistete Einzahlung C gewährt die jährliche Rente G , wenn

$$C = \frac{1}{r^s} \cdot \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot G \cdot {}^n R_1;$$

daher hat man

$$G = \frac{a_{n-s}}{a_n} \cdot r^s C : {}^n R_1.$$

Sind die Einzahlungen C, D, E, \dots am Ende der Lebensjahre $n - s, n - t, n - u, \dots$ erfolgt, so ist daher die dafür erworbene Rente

$$G = (a_{n-s} r^s C + a_{n-t} r^t D + a_{n-u} r^u E + \dots) : {}^n R_1 a_n.$$

4. Eine $n - s$ jährige Person will durch e gleiche jährliche Einzahlungen P ($e < s$), die am heutigen Tage beginnen sollen, eine jährliche Leibrente 1 erwerben, die nach s Jahren zum ersten Male ausbezahlt werden soll. Wie viel beträgt P (die Prämie)?

Wenn anstatt P die Zahlung 1 jährlich erfolgte, so würde der auf heute berechnete Werth der Zahlungen der Unterschied einer heute beginnenden lebenslänglichen Rente

$${}^{n-s}_1 R$$

und einer nach Vollendung des $(n - s + e)$ ten Jahres beginnenden sein. Der heutige Werth der letzteren ist

$${}_1R^{n-s+e} \cdot \frac{a_{n-s+e}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^e}.$$

Daher hat man zur Bestimmung von P die Gleichung

$$P \left({}_1R^{n-s} - \frac{a_{n-s+e}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^e} \cdot {}_1R^{n-s+e} \right) = \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^s} \cdot {}_1R^n.$$

5. Bei den in No. 2, 3, 4, angegebenen Formeln ist vorausgesetzt worden, dass beim Tode einer versicherten Person die Erben keinen Anspruch an die Bank machen, sondern die Bank der Erbe der an sie geleisteten Zahlungen ist. Wenn der Versicherte stirbt, ehe er in den Rentengenuss eingetreten ist, oder erst kurze Zeit nach Eintritt in denselben, nachdem er also auf seine Einzahlung hin sehr wenig an Rente zurtückerhalten hat, so werden die Erben offenbar benachtheiligt. Man hat daher solche Versicherungen eingerichtet, bei denen beim frühzeitigen Tode des Versicherten von der Bank eine entsprechende Zahlung an die Rechtsnachfolger geleistet wird. Wir wollen annehmen, dass sich die Bank verpflichtet, beim Tode des Versicherten die baar eingezahlten Prämien (ohne Zinsen) zurück zugewähren, wenn der Versicherte stirbt, ehe er in den Rentengenuss eingetreten ist; wenn er bereits einige Renten bezogen hatte, so soll der Unterschied der baar gezahlten Prämien und der Renten zurückgewährt werden.

Wir beschränken uns hier darauf, unter diesen Voraussetzungen die Zahlung C auszurechnen, die eine $(n-s)$ jährige Person zu leisten hat, um eine vom Ende des n ten Jahres beginnende Rente \mathfrak{R} zu erwerben.

Wenn die Person im 1, 2, 3, . . . s ten Jahre nach Abschluss des Versicherungsvertrags stirbt, so hat die Bank die volle Einzahlung C zurückzugeben; die auf heute berechneten Zeitwerthe aller dieser Zahlungen sind

$$\left[\left(1 - \frac{a_{n-s+1}}{a_{n-s}} \right) \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{a_{n-s+2}}{a_{n-s}} \right) \frac{1}{r^2} + \dots + \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-s}} \right) \frac{1}{r^s} \right] C.$$

Wenn die Person im $(n+i)$ ten Lebensjahre stirbt, so zahlt die Bank nur den Betrag C vermindert um die ersten i Renten, also $C - i\mathfrak{R}$ zurück. Der heutige Werth dieser Zahlung ist

$$\left(1 - \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}} \right) \cdot \frac{1}{r^{s+i}} \cdot (C - i\mathfrak{R}).$$

Der heutige Werth dieser letzteren Zahlungen zusammen genommen ist

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}} \right) \cdot \frac{1}{r^{s+1}} (C - \mathfrak{R}) + \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n-s}} \right) \frac{1}{r^{s+2}} (C - 2\mathfrak{R}) \\ & + \left(1 - \frac{a_{n+3}}{a_{n-s}} \right) \frac{1}{r^{s+3}} (C - 3\mathfrak{R}) + \left(1 - \frac{a_{n+4}}{a_{n-s}} \right) \frac{1}{r^{s+4}} (C - 4\mathfrak{R}) + \dots \end{aligned}$$

Diese Reihe ist nur soweit fortzusetzen, als die Differenz $C - i\mathfrak{R}$ positiv ist, denn die Bank zahlt nur so lange an die Erben, als die baar gezahlten Renten zusammen weniger betragen, als die Einlage C . Ist daher i die ganze Zahl des Quotienten $C : \mathfrak{R}$ (so dass also $C : \mathfrak{R}$ aus der ganzen Zahl i und einem echten Decimalbruche besteht), so ist die gesammte Leistung H der Bank an die Erben, reducirt auf den heutigen Tag,

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{1}{r^{s+i}} \right) C \\ &- \left(\frac{a_{n-s+1}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{n-s+2}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{a_{n-s+3}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}} \cdot \frac{1}{r^{s+i}} \right) C \\ &- \left[\frac{1}{r^{s+1}} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n-s}} \right) - \frac{2}{r^{s+2}} \left(1 - \frac{a_{n+2}}{a_{n-s}} \right) - \dots - \frac{i}{r^{s+i}} \left(1 - \frac{a_{n+i}}{a_{n-s}} \right) \right] \cdot \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$H = A \cdot C + B \cdot R,$$

so hat man daher zur Bestimmung von C die Gleichung

$$C = A \cdot C + B \cdot R + \frac{1}{r^s} \cdot \frac{a_n}{a_{n-s}} \cdot {}_1R \cdot R.$$

6. Zwei Personen A und B , die erste m Jahre alt, die andere n Jahre, beziehen vom Ende des nächsten Jahres an eine Rente 1, die so lange ausgezahlt wird, als beide Personen am Leben sind; wie gross ist der heutige Werth dieser Rente?

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen nach i Jahren noch leben, ist

$$\frac{a_{m+i}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+i}}{a_n};$$

folglich ist der gesuchte Werth

$${}^{m,n}R_1 = \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{m+2}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} + \dots$$

Soll die Rente praenumerando gezahlt werden, so ist der heutige Werth

$${}^{m,n}R = 1 + {}^{m,n}R_1,$$

da zu den obigen Zahlungen noch die heute fällige Zahlung 1 addirt werden muss.

Man kann das Paar A, B als ein Ganzes ansehen und sich eine Sterblichkeitstabelle für Paare, deren Theilnehmer heute m und n Jahre alt sind, entwerfen; wenn dieselbe mit dem Produkte

$$a_{m,n} = a_m a_n$$

beginnt, so würde, falls alle B am Leben blieben, nach i Jahren infolge Absterbens der Personen A die Anzahl der noch lebenden Paare

$$a_{m+i} a_n$$

sein; da aber von a_n Personen B nur noch a_{n+i} am Leben sind, so vermindert sich die Anzahl der lebenden Paare in demselben Verhältnisse, also erhält man für die Zahl der nach i Jahren noch lebenden Paare

$$a_{m+i, n+i} = a_{m+i} \cdot a_{n+i}.$$

Hieraus folgt sofort, dass alle in Bezug auf Rentenversicherung einer einzelnen Person geltenden Formeln auch auf Rentenversicherung für Paare gilt, wenn man nur statt der Zahlen a_{n+s} die Zahlen $a_{m+s, n+s}$ setzt.

7. Ist die Rente zahlbar, solange von den beiden Personen überhaupt noch eine lebt, also bis zum Tode der zuletzt sterbenden, so ist in nR_1 an Stelle der Zahlen $a_{n+s} : a_n$ die Wahrscheinlichkeit dafür einzuführen, dass nach s Jahren noch eine der beiden Personen am Leben ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right) \left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right) = \frac{a_{m+s}}{a_m} + \frac{a_{n+s}}{a_n} - \frac{a_{m+s, n+s}}{a_{m,n}}.$$

Daher ist der gesuchte heutige Werth der Rente

$${}^mR_1 + {}^nR_1 - {}^{m,n}R_1.$$

Ist die Rente zahlbar, so lange B lebt, beginnt aber die Zahlung erst, wenn A gestorben ist, so ist $a_{n+s} : a_n$ durch die Wahrscheinlichkeit dafür zu ersetzen, dass B lebt und A gestorben ist, also durch

$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right) \cdot \frac{a_{n+s}}{a_n}.$$

Hieraus ergibt sich sofort für den gesuchten Werth

$${}^mR_1 - {}^{m,n}R_1.$$

8. Drei Personen A, B, C im Alter von m, n, p Jahren versichern heute eine Rente 1, zahlbar vom Ende des nächsten Jahres an, so

lange noch alle drei Personen am Leben sind, also bis zum Tode der zuerst sterbenden. Um den heutigen Werth der Rente zu finden, hat man in $\overset{n}{R}_1$ die Lebenswahrscheinlichkeit $a_{n+s} : a_n$ zu ersetzen durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Gruppe A, B, C noch vollzählig ist, also durch

$$\frac{a_{m+s}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+s}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+s}}{a_p}.$$

Daher ist der gesuchte Werth

$$\overset{m,n,p}{R}_1 = \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{m+s}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+s}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+s}}{a_p} \cdot \frac{1}{r^2} + \dots$$

Derselbe kann ebenfalls angesehen werden wie eine auf das Leben einer einfachen Person versicherte Rente, wenn nur eine Sterblichkeitstafel zu Grunde gelegt wird, die statt der Zahlen a_{n+s} die Produkte

$$a_{m+s} \cdot a_{n+s} \cdot a_{p+s}$$

enthält. Man kann daher auch auf diesen Fall die übrigen in No. 2 bis 5 gegebenen Formeln übertragen. Beginnt die Rente erst, nachdem A und B gestorben sind und dauert bis zum Tode von C (Rentenversicherung für Kinder für den Fall ihrer gänzlichen Verwaisung), so hat man statt der Lebenswahrscheinlichkeit zu benutzen

$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right) \left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right) \frac{a_{p+s}}{a_p}.$$

Daher ergibt sich

$$\overset{p}{R}_1 - \overset{m,p}{R}_1 - \overset{n,p}{R}_1 + \overset{m,n,p}{R}_1.$$

Soll die Rente so lange gezahlt werden, als B und C leben, aber erst nach dem Ableben von A , so hat man statt der Lebenswahrscheinlichkeit zu setzen

$$\left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right) \frac{a_{n+s}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+s}}{a_p},$$

Daher erhält man

$$\overset{n,p}{R}_1 - \overset{m,n,p}{R}_1.$$

Wird die Rente so lange fortgezahlt, bis alle drei Personen gestorben sind, so benutzt man die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+s}}{a_m}\right) \left(1 - \frac{a_{n+s}}{a_n}\right) \left(1 - \frac{a_{p+s}}{a_p}\right)$$

und erhält

$$\overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 + \overset{p}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1 - \overset{m,p}{R}_1 - \overset{n,p}{R}_1 + \overset{m,n,p}{R}_1.$$

9. Wird die Jahresrente 1 ratenweise gezahlt, nämlich je $1:t$ nach Ablauf von $1:t$ Jahren, so bedarf man zur Berechnung des heutigen Werthes einer Sterblichkeitstafel, die nicht von Jahr zu Jahr fortschreitet, sondern für das Intervall $1:t$ construiert ist. Eine solche Tafel erhält man mit einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden Genauigkeit, wenn man die gegebenen Tafeln durch Interpolation unter der Annahme ergänzt, dass das Absterben im Laufe eines Jahres gleichmässig erfolgt.

Von a_m Personen, die das m te Lebensjahr erfüllen, sterben im Laufe des nächsten Jahres $a_m - a_{m+1}$ Personen, im t ten Theile des Jahres sterben daher

$$\frac{1}{t} (a_m - a_{m+1}),$$

und in $\lambda:t$ Jahren

$$\frac{\lambda}{t} (a_m - a_{m+1}).$$

Die Anzahl derer, die das

$$a_m = \frac{\lambda}{f} (a_m$$

Die Wahrscheinlichkeit e erfüllen, ist folglich

(

Da wir voraussetzen, dass schlüssen erfolgt, so muss eine zunächst durch den Faktor

auf den vorhergehenden Jahre heutigen Tag zurückdiscountierte jährige Person zahlbaren Renten

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda p}{100f}\right)^t}$$

Die Rechnung nach diesen

Divisors $1 + \frac{\lambda p}{100f}$ unbequem.

erhalten, wenn man die zur Zeit

auf das Ende des laufenden Jahres auf den heutigen Tag discountiert der im $(m+1)$ ten Lebensjahr

$$1. \quad \frac{1}{r^{m-n+1}} \cdot \frac{1}{f^2 a_n} \sum_{t=1}^t \left(\right)$$

Zur Bildung der Summe

$$\sum \lambda = \frac{t(t+1)}{2}$$

$$\sum (t-\lambda)^2 = \frac{1}{6} t(t+1)(2t+1)$$

Man erhält, wenn man die

$$2. \quad \frac{1}{f^2} \cdot S = \frac{t-1}{2t} \left[1 + \frac{t}{2} \right]$$

Aus 1. und 2. ergibt sich für eine n jährige Person nach jedem t Jahre Lauf von 1 : t Jahr beginnt,

$$\bar{R}_t = \frac{1}{r} \cdot \frac{t-1}{2t} \left[1 + \frac{t}{2} \right]$$

Ersetzt man hier \bar{R} durch die Rechnung

$$3. \quad \bar{R}_t = \left(1 + \frac{p^2}{30000r} \cdot \frac{t}{2} \right)$$

Man kann links im ersten Glied Faktor durch 1 ersetzen; im zweiten

ersetzen, das Produkt ausführen und darin das mit p^2 multiplicirte Glied ausdrücken. Hierdurch erhält man

$$4. \quad \bar{R}_t = \bar{R}_1 + \left(1 - \frac{p}{300} \cdot \frac{t+1}{t}\right) \cdot \frac{t-1}{2t}.$$

Hieraus kann man einen Annäherungswerth für eine continuirliche Rente \bar{R}_∞ erhalten, indem man $t = \infty$ setzt; vom genauen Werthe weicht der so berechnete infolge der Annahme gleichmässiger Vertheilung der Sterbefälle innerhalb eines Jahres ab; ferner ist zu bemerken, dass in dem so erhaltenen Werthe die Voraussetzung enthalten ist, dass die Verzinsung im Laufe eines Jahres nur einfach (ohne Zinseszins) erfolgt. Nimmt man neben der continuirlichen Rentenzahlung auch eine continuirliche Kapitalisirung der Zinsen an, so erhält man einen abweichenden Werth, für welchen man indess den Werth \bar{R}_∞ als genügende Annäherung betrachten kann. Durch die Substitution $t = \infty$ ergibt sich

$$5. \quad \bar{R}_\infty = \bar{R}_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{300}\right).$$

Dieselbe Formel ist auch auf die Renten

$$\bar{R}_\infty^{m,n}, \bar{R}_\infty^{m,n,p},$$

sowie auf die übrigen in No. 6 bis 9 betrachteten Fälle anwendbar, da alle diese Renten sich als Renten \bar{R}_1^n oder \bar{R}_1^n ansehen lassen, denen verschiedene Sterblichkeitstafeln zu Grunde liegen.

10. Der genaue heutige Werth einer an eine n jährige Person zahlbaren, sofort beginnenden, stetigen Rente ergibt sich (§ 2, 14), wenn die Summe der in einem Jahre baar gezahlten Beträge 1 ist, und stetige Kapitalisirung der Zinsen stattfindet, zu

$$1. \quad \bar{R}_\infty^n = \int_0^\infty \frac{a_{n-x}}{a_n} \cdot v^x dx;$$

ferner ist

$$2. \quad \bar{R}_\infty^{m,n} = \int_0^\infty \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot v^x dx,$$

$$3. \quad \bar{R}_\infty^{m,n,p} = \int_0^\infty \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{p+x}}{a_p} \cdot v^x dx.$$

Um diese Integrale berechnen zu können, muss a_{n+x} als Function von $n+x$ bekannt sein. Legt man das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Gesetz zu Grunde (§ 1, No. 7), so hat man

$$a_{n+x} = cKq^{n+x}h^{n+x}, \quad a_n = cKq^n h^n,$$

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} = \frac{B_n q^x}{B_n} \cdot h^x,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$Kq^n = B_n.$$

Hierdurch verwandeln sich die Formeln 1., 2. und 3. in

$$4. \quad \bar{R}_\infty^n = \frac{1}{B_n} \int_0^\infty B_n q^x (hv)^x dx,$$

$$5. \quad {}_{\infty}^{m,n}R = \frac{1}{B_m B_n} \int_0^{\infty} (B_m B_n)^{q^x} (h^2 v)^x dx,$$

$$6. \quad {}_{\infty}^{m,n,p}R = \frac{1}{B_m B_n B_p} \int_0^{\infty} (B_m B_n B_p)^{q^x} (h^3 v)^x dx.$$

Zur Berechnung der Renten

$${}_{\infty}^{m,n}R, \quad {}_{\infty}^{m,n,p}R$$

hat man nicht nöthig, die Rechnung für alle einzelnen Combinationen m, n und m, n, p zu führen. Bei Benutzung der soeben gegebenen Formeln genügt es, die Renten für Personen gleichen Alters zu berechnen. Hat man nämlich für jedes vorkommende Lebensjahr s die Tafeln der Werthe

$${}_{\infty}^{s,s}R, \quad {}_{\infty}^{s,s,s}R$$

berechnet, so bestimme man die Zahl s aus der Gleichung

$$7. \quad B_s^2 = B_m B_n, \text{ bez. } B_s^3 = B_m B_n B_p;$$

alsdann ist offenbar

$${}_{\infty}^{m,n}R = {}_{\infty}^{s,s}R, \text{ bez. } {}_{\infty}^{m,n,p}R = {}_{\infty}^{s,s,s}R.$$

Ergibt sich für s aus einer der Gleichungen 7. keine ganze Zahl, so hat man den zugehörigen Werth von

$${}_{\infty}^{s,s}R \text{ bez. } {}_{\infty}^{s,s,s}R$$

durch Interpolation aus der für die Reihe der ganzen Zahlen s berechneten Rententafel zu bestimmen.

11. Wenn man nach No. 10 die Berechnung der stetigen Renten durchgeführt hat, so ergeben sich hinlänglich gute Annäherungswerthe für die jährlichen Renten aus der Gleichung (No. 9, 5)

$$R_1 = R_{\infty} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{300} \right), \quad {}_1R = R_{\infty} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{300} \right).$$

Für die in Raten zahlbaren Renten hat man nach No. 9, 4

$$R_t = R_1 + \left(1 - \frac{p}{300} \cdot \frac{t+1}{t} \right) \frac{t-1}{2t}.$$

Werden die Raten praenumerando gezahlt, so ist der Werth der Rente

$${}_1R = R_t + \frac{1}{t}.$$

12. Einfache Lebensversicherung auf den Todesfall mit einmaliger Prämienzahlung. Eine n -jährige Person A zahlt bei der Versicherungsbank ein Kapital C ein; dafür zahlt die Bank beim Tode der versicherten Person eine Summe S an die Hinterlassenen aus.

Es wird angenommen, dass die versicherten Summen S für alle im Laufe eines Lebensjahres Verstorbenen am Ende dieses Jahres ausgezahlt werden. Alsdann hat die Bank am Ende des x ten Jahres (von heute an gerechnet) die Summe S unter der Voraussetzung zu zahlen, dass A im $(n+x)$ ten Lebensjahre stirbt; die Wahrscheinlichkeit hiervon ist

$$\frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n}.$$

Folglich ist der heutige Werth dieser Zahlung

$$\frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^x} \cdot S.$$

Die Gesamtleistung der Bank im Interesse dieser Versicherung ist die Summe dieser Glieder von $x = 1$ bis zur Grenze der Sterblichkeitstafel. Daher hat man die Gleichung

$$\begin{aligned} C &= S \left(\frac{a_n}{a_n} \cdot \frac{1}{r} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^3} + \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{r} - \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{1}{r^3} - \dots \right) \\ &= S \left({}_1\ddot{R} \cdot \frac{1}{r} - \ddot{R}_1 \right) = S \left[\frac{1}{r} (\ddot{R}_1 + 1) - \ddot{R}_1 \right]. \end{aligned}$$

Daher ist

$$C = S \left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r} \ddot{R}_1 \right).$$

13. Einfache Lebensversicherung mit jährlicher Prämienzahlung. Gewöhnlich erfolgt die Lebensversicherung nicht durch eine einzige Einzahlung, sondern durch jährliche Zahlung einer bestimmten Summe \ddot{P} (Prämie); die erste Zahlung wird sofort beim Abschlusse der Versicherung bezahlt.

Der heutige Werth aller an die Bank von dem Versicherten zu zahlenden Prämien ist das \ddot{P} fache der Rente ${}_1\ddot{R} = \ddot{R}_1 + 1$. Daher hat man, wenn C und S dieselbe Bedeutung haben wie in No. 12,

$$\ddot{P}(\ddot{R}_1 + 1) = C,$$

mithin

$$\ddot{P} = S \left(\frac{1}{r} - \frac{\ddot{R}_1}{\ddot{R}_1 + 1} \right).$$

14. Lebensversicherung für zwei verbundene Leben. Eine m jährige Person A und eine n jährige Person zahlen an die Bank ein Kapital C , und verlangen dafür die Auszahlung einer Summe S , zahlbar nach dem Tode der zuerst sterbenden Person an die Ueberlebende.

Nach No. 6 bestehen von $a_m \cdot a_n$ Paaren von Personen A, B nach x Jahren noch $a_{m+x} \cdot a_{n+x}$ Paare. Daher lösen sich im x Jahre, von heute an gerechnet,

$\frac{a_{m+x-1} a_{n+x-1} - a_{m+x} a_{n+x}}{a_m a_n}$ Paare auf; die Wahrscheinlichkeit, dass das Paar A, B sich im Laufe des x ten Jahres auflöst, ist hiernach

$$\frac{a_{m+x-1} a_{n+x-1} - a_{m+x} a_{n+x}}{a_m a_n}.$$

Hieraus folgt der heutige Werth der Leistungen der Bank zu

$$\begin{aligned} S \cdot \sum \frac{a_{m+x-1} a_{n+x-1} - a_{m+x} a_{n+x}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^x} \\ = S \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot {}^{m,n}_1\ddot{R} - \ddot{R}_1^{m,n} \right). \end{aligned}$$

Man erhält daher (vergl. No. 12 und 13)

$$C = S \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{r-1}{r} \ddot{R}_1^{m,n} \right).$$

Wird eine jährliche gleiche Prämie $\ddot{P}^{m,n}$ bezahlt, so ist

$$\ddot{P}^{m,n} = S \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\ddot{R}_1^{m,n}}{\ddot{R}_1^{m,n} + 1} \right).$$

15. Soll das vers-
sterbenden Person ε
Gunsten ihrer Kinder λ
kommt die Wahrscheinl-
gestorben sind; dieselbe

$$\left(1 - \frac{a_m}{a_n}\right) \left(1 - \frac{a_n}{a_m}\right).$$

Daher ist der auf heute reducirte Werth der Leistungen der Bank

$$S \cdot \sum \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right) \left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{r^x}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} C &= S \cdot \sum \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right) \left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{r^x} \\ &= S \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots - \overset{m}{R}_1 - \overset{n}{R}_1 + \overset{m,n}{R}_1 \right). \end{aligned}$$

Wird eine jährliche Prämie P bezahlt, so hat die Zahlung so lange zu dauern, als noch eine der Personen am Leben ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach x Jahren noch eine der beiden Personen lebt, ist

$$1 - \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right) \left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) = \frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}.$$

Der heutige Werth aller Prämienzahlungen P ist daher

$$P \cdot \sum \left(\frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \right) \frac{1}{r^x},$$

wobei die Summation mit dem Werthe $x = 0$ beginnt. Für diese Summe ergibt sich sofort

$$P \left(1 + \overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1 \right);$$

folglich ist

$$P = S \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots - \overset{m}{R}_1 - \overset{n}{R}_1 + \overset{m,n}{R}_1}{1 + \overset{m}{R}_1 + \overset{n}{R}_1 - \overset{m,n}{R}_1}.$$

16. Ueberlebensversicherung. Eine Person A versichert ein Kapital S zu Gunsten einer Person B ; das Kapital soll beim Tode von A an B ausbezahlt werden, wenn B A überlebt; stirbt B vor A , so fällt das von A eingezahlte Kapital, bez. die bis zum Tode von B eingezahlten Prämien, an die Bank.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Versicherung der Summe S durch eine einmalige Zahlung C erfolgt. Wir denken uns jedes Jahr in t gleiche Theile getheilt, und machen die Annahmen, dass das Absterben im Verlaufe eines Jahres gleichmässig erfolgt; in Bezug auf die Person A wollen wir ferner annehmen, dass das Absterben nicht an den Enden der kleinen Zeitabschnitte, sondern im Verlaufe derselben erfolgt; bezüglich des Absterbens der B setzen wir umgekehrt voraus, dass es nur am Ende der Zeitabschnitte erfolgt. Nehmen wir dann $t = \infty$, so weichen beide Voraussetzungen von der Wahrheit nicht ab. Alle Ausgaben, die die Bank im Laufe eines Jahres zu machen hat, discountiren wir vorwärts auf das Ende des nächsten Jahres und dann rückwärts auf heute.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A von heute an noch $x + \lambda : t$ Jahre lebt, aber nach $x + (\lambda + 1)t$ Jahren nicht mehr lebt, ist

$$\frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t a_m}.$$

denn von a_n heute lebenden n jährigen Personen sterben $(a_{m+x} - a_{m+x+1}) : t$ in jedem t ten Theile ihres $(n + x + 1)$ ten Lebensjahres. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B nach $x + \lambda : t$ Jahren noch lebt, ist

$$\frac{(t - \lambda) a_{n+x} + \lambda a_{n+x+1}}{t a_n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse ist das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Die auf diesen Zeitraum bezügliche Leistung der Bank ist daher

$$\frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t a_m} \cdot \frac{(t - \lambda) a_{n+x} + \lambda a_{n+x+1}}{t a_n} \left(1 + \frac{(t - \lambda)p}{100t}\right) \cdot \frac{1}{r^{x+1}}.$$

Die discountirte Leistung der Bank in Bezug auf das $(x + 1)$ te Jahr ergibt sich hieraus zu

$$1. \quad S \cdot \frac{a_{m+x} - a_{m+x+1}}{t^2 a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^{x+1}} \sum \left([t - \lambda] + \frac{p}{100t} [t - \lambda]^2 \right) a_{n+x} + \left(\lambda + \frac{p}{100t} \lambda [t - \lambda] \right) a_{n+x+1}.$$

Die Summe erstreckt sich über alle Werthe von λ von 1 bis t . Berechnet man die Summe und geht dann zur Grenze $t = \infty$ über, so erhält man

$$\frac{1}{t^2} \sum = \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300} \right) a_{n+x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600} \right) a_{n+x+1}.$$

Dieser Werth ist in 1. einzusetzen und die Summe aller so erhaltenen discountirten Jahresleistungen von $x = 0$ an zu bilden. Dies ergibt die Gleichung

$$C = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300} \right) \left({}^m_n R - \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}^{m+1}_n R \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600} \right) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} {}^m_{n+1} R - R_1 \right) \right] \cdot S.$$

Ersetzt man ${}^m_n R_1$ durch ${}_1 R - 1$, so erhält man

$$3. \quad C = \frac{1}{r} \left[\frac{p}{600} \cdot {}^m_n R - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300} \right) \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}^{m+1}_n R + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600} \right) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot {}^m_{n+1} R + 1 \right) \right] \cdot S.$$

Wird eine jährliche Prämie P entrichtet, so hat die Zahlung derselben so lange zu erfolgen, als beide Personen am Leben sind; daher ist der auf heute discountirte Werth aller dieser Zahlungen (No. 13)

$$P \cdot {}^m_n {}_1 R.$$

Hieraus und aus 3. folgt

$$P = \frac{1}{{}_1 R r} \left[\frac{p}{600} {}^m_n R - \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{300} \right) \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot {}^{m+1}_n R + \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{600} \right) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot {}^m_{n+1} R + 1 \right) \right].$$

In vielen Fällen kann man sich mit der Annäherung begnügen, die aus dieser Formel hervorgeht, wenn man die mit den Faktoren $p : 600$ und $p : 300$ versehenen Glieder weglässt. Man erhält dann einfacher

$$P = \frac{1}{2 {}^m_n {}_1 R \cdot r} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} {}^m_{n+1} R + 1 - \frac{a_{m+1}}{a_m} {}^{m+1}_n R \right).$$

Statt der praenumerando zahlbaren Renten kann man postnumerando zahlbare einführen

$${}_1 R = R_1 + 1, \quad {}_1 R + \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{m-1} a_n}{a_m a_{n+1}} R_1, \quad {}_1 R = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_m a_{n-1}}{a_{m+1} a_n} R_1,$$

und erhält

$$P = \frac{1}{2 ({}_1 R + 1)} \left(\frac{a_{m-1}}{a_m} {}^{m-1}_n R_1 + \frac{1}{r} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot {}^m_{n-1} R_1 \right).$$

Versicherung begreifen, bei welchen der Versicherte in den ersten Lebensjahren eines Kindes ein Kapital einzahlt, oder die Verpflichtung zu einer jährlichen Prämienzahlung eingeht, während die Bank sich verpflichtet, an einem bestimmten Termine ein bestimmtes Kapital S auszuzahlen, vorausgesetzt, dass das Kind diesen Termin erlebt.

Man hat diese Versicherungen verschieden eingerichtet; die Prämienzahlung hört entweder mit dem Tode des Versicherten auf, oder sie ist bis zum Jahre vor der Auszahlung des Kapitals zu entrichten; beim frühzeitigen Tode des Kindes fallen die eingezahlten Prämien und Kapitale der Bank anheim, oder sie werden vollständig (ohne Zinsen) oder verkürzt zurückbezahlt.

Versicherungen mit Prämienrückgewähr haben im Wesentlichen nur die Wirkung von Sparkassen; sie gewähren vor diesen nur den Vortheil, dass sie die Verwendung der versicherten Gelder zu einem anderen Zwecke ausschliessen; verbinden aber damit den Nachtheil, dass die eingezahlten Beträge die Verwaltungskosten und den Gewinn der Bank mit zu tragen haben.

Diese Art der Versicherung könnte sehr zweckmässig im Interesse der Tausende von Eltern und Erziehern, die sich ihrer bedienen wollen, durch eine sehr einfache Modification an Einlagebüchern der öffentlichen Sparkassen ersetzt werden.

Man treffe die Einrichtung, dass Eltern und Erzieher Sparbücher erwerben können, die sie auf den Namen eines Kindes ausstellen lassen, und welche den ausdrücklichen Vermerk enthalten, dass Auszahlungen vor einem bestimmten Tage nur dann erfolgen, wenn der Tod der Person, auf deren Namen das Buch lautet, urkundlich nachgewiesen wird.

Ein Vater, der für die Aussteuer seiner Tochter sparen will, würde ein solches Buch auf den Namen der Tochter ausstellen und als Auszahlungstermin z. B. den Tag eintragen lassen, an welchem die Tochter das 18. Lebensjahr vollendet. Alle auf das Buch gemachten Einzahlungen würden alsdann erst an diesem Tage erhoben werden können, ausgenommen, wenn die Tochter vorher stirbt.

Diese Art der Kinderversorgung würde sich alsdann von der bei Versicherungsanstalten mit Prämienrückgabe nur dadurch nachtheilig unterscheiden, dass bei letzterer der Zwang regelmässiger Prämienzahlung besteht; dagegen würde man den erheblichen Vortheil haben, zu jeder Zeit noch so kleine Beträge einzahlen zu können; unzweifelhaft würde die vorgeschlagene Einrichtung sehr stark verwendet werden und viel Nutzen stiften.

18. Wir betrachten hier nur die Form Aussteuerversicherung, welche das eigentliche Wesen der Versicherung — nämlich eine Sicherheit auch gegen die ungünstigsten Zufälle zu gewähren, — am deutlichsten zeigt. Wir nehmen an, eine n -jährige Person A (Vater) versichert zu Gunsten einer n -jährigen Person B (Kind) ein Kapital S , zahlbar nach k Jahren in dem Falle, dass B alsdann noch lebt; die Versicherung erfolgt durch jährliche Prämien, die längstens k mal gezahlt werden; die Prämienzahlung hört bereits früher auf, wenn während der nächsten $k - 1$ Jahren eine der beiden Personen stirbt; (der Vater zahlt also die Prämie so lange das Kind lebt längstens k mal, oder, wenn er vorher stirbt, bis zu seinem Tode).

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine n -jährige Person das Lebensalter $n + k$ erreicht, ist

$$\frac{a_{n+k}}{a_n}.$$

Daher ist die auf heute discountirte Leistung der Bank

$$\frac{1}{r^k} \cdot \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot S.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass A und B nach i Jahren noch leben, ist

$$\frac{a_{m+i}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+i}}{a_n}.$$

Daher ist der auf heute discountirte Werth aller Prämien

$$P \cdot \sum_0^{k-1} \frac{a_{m+i} a_{n+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^i} = P \cdot \sum_0^{\infty} \frac{a_{m+i} a_{n+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^i} - P \cdot \sum_0^{\infty} \frac{a_{m+k+i} a_{n+k+i}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^{k+i}} \\ = P \cdot \left({}_1R^{m,n} - \frac{a_{m+k} a_{n+k}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot {}_1R^{m+k,n+k} \right).$$

Folglich hat man für P die Gleichung

$$P \left({}_1R^{m,n} - \frac{a_{m+k} a_{n+k}}{a_m a_n} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot {}_1R^{m+k,n+k} \right) = \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot S.$$

19. Zur Deckung der Verwaltungskosten und bei Gesellschaften, welche Actienunternehmungen sind, zur Erzielung einer Dividende, setzt man die jährlichen oder einmaligen Prämien höher an, als sie sich durch die obigen Formeln ergeben, in welchen auf Verwaltung und Gewinn keine Rücksicht genommen worden ist. Dabei geht man von dem Grundsatz aus, den Beitrag, den man von jeder einen Versicherungsvertrag abschliessenden Person zu Kosten und Gewinn fordert, proportional den Leistungen der Bank an die Person zu bestimmen.

Setzt man fest, dass für Verwaltung etc. das μ fache der aus den Formeln folgenden Leistung zu zahlen ist ($\mu < 1$) und bezeichnet die wirkliche (einmalige oder jährliche) Prämie mit \mathfrak{P} , die reine (aus den Formeln folgende) wieder mit P , so ist bei allen Versicherungen ohne Prämienrückgewähr

$$\mathfrak{P} = (1 + \mu)P.$$

Denn wenn der auf heute discountirte Werth aller theoretischen Prämienzahlungen mit aP bezeichnet wird, so ist der Ueberschuss, den die Bank macht

$$a\mathfrak{P} - aP = \mu \cdot aP = \mu S,$$

wenn S die auf heute discountirte Leistung der Bank bezeichnet.

Anders verhält sich die Sache bei Versicherungen mit Prämienrückgewähr. Die Leistung der Bank setzt sich hier aus zwei Theilen zusammen: Ein Theil drückt den heutigen Werth der Prämienrückzahlungen, der andere den heutigen Werth der zu leistenden versicherten Summen (Kapitalien, Rente) aus. Man hat daher für die Leistung der Bank die Formel

$$bP + cS.$$

Bezeichnet man wieder den heutigen Werth der einzuzahlenden reinen Prämie mit aP , so ist

$$aP = bP + cS.$$

Wird statt der reinen Prämie die wirkliche Prämie

$$\mathfrak{P} = (1 + \nu)P$$

gefordert, so nimmt die Bank $a\nu P$ mehr ein, als nach 1., giebt aber dafür auch $b\nu P$ mehr aus; zur Deckung der Kosten etc. verbleibt also nur der Betrag

$$\nu(a - b)P.$$

Soll dies das μ fache der wirklichen Leistung der Bank sein, so hat man die Gleichung

$$\nu(a - b)P = \mu b(1 + \nu)P + \mu cS,$$

woraus für ν der Werth folgt

$$v = \frac{\mu (bP + cS)}{(a - b - b\mu) \cdot P}.$$

20. Bei der Beurtheilung des augenblicklichen Standes einer Versicherungskasse hat man zu beachten: a) die Verpflichtungen, welche die Versicherten gegen die Kasse zu erfüllen haben; b) die Verpflichtungen, welche die Kasse gegen die Versicherten zu erfüllen hat; c) den Aufwand für die Verwaltung; d) das Baarvermögen der Kasse.

Die Verpflichtungen, welche die Versicherten gegen die Kasse zu erfüllen haben, bestehen in wirklichen jährlichen Prämien; bei Berechnung derselben hat man das heutige Alter zu Grunde zu legen.

Da die Beiträge zu den Verwaltungskosten proportional den Leistungen der Bank erhoben werden, so lassen sich die Posten b) und c) zusammenfassen. Wird das ρ -fache der Leistungen für die Verwaltung berechnet (die obige Zahl μ bezieht sich auf Verwaltung und Gewinn), so hat man die aus den Verpflichtungen gegen die Versicherten folgenden Leistungen der Bank mit $(1 + \rho)$ zu multipliciren.

Der Vergleich der Zahlen a) und d) mit b) und c) ergibt den Gewinn der Bank.

Einen Theil dieses Gewinnes wird man zur Dotirung eines Reservefonds zur Sicherstellung der Bank gegen unvorhergesehene Verluste verwenden, insbesondere gegen die, welche aus ungünstigen Abweichungen der Sterbefälle der bei der Bank Versicherten von der den Rechnungen zu Grunde liegenden Sterblichkeitstafel folgen.

21. Für eine einfache Lebensversicherung ist die Verpflichtung der Bank, wenn der Versicherte heute q Jahre alt ist, einschliesslich des Aufwandes für Verwaltung,

$$(1 + \rho) S \left(\frac{1}{r} - \frac{r - 1}{r} \cdot \dot{K}_1 \right).$$

Bei jährlicher Prämienzahlung \mathfrak{P} beträgt die Verpflichtung des Versicherten gegen die Bank

$$\mathfrak{P} (\dot{K}_1 + 1).$$

Bei Rentenversicherungen bestehen Verpflichtungen gegen die Bank bei den Personen, die jährliche Prämien zahlen; die Personen, welche Rente gegen einmalige Prämie versichert haben, sowie die, welche schon in den Rentengenuss eingetreten sind oder mit dem Jahresschlusse in denselben eintreten werden, haben keine Verpflichtung gegen die Bank.

Wir müssen darauf verzichten, die Formeln zur Beurtheilung der Kassenlage ausführlich zu entwickeln. Nach den angegebenen Grundsätzen und mit Hilfe der entwickelten Formeln lassen sie sich ohne Schwierigkeit aufstellen.

Absterbeordnung und Tafel der Lebenserwartung der Bevölkerung des preussischen Staates,

berechnet aus dem Vergleiche der Anfangs 1867, 1868, 1872, 1875, 1876 und 1877
im preussischen Staate vorhandenen Lebenden und der daraus in denselben
Jahren Gestorbenen.

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebend- geborenen erlebten das neben- bezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
1 Jahr . .	77 154	80 115	50,9	54,2
2 „ . .	71 297	74 333	52,9	56,1
3 „ . .	68 483	71 469	53,3	56,6
4 „ . .	66 681	69 639	53,1	56,8
5 „ . .	65 433	68 338	52,7	55,9
6 „ . .	64 503	67 375	52,2	55,2
7 „ . .	63 757	66 600	51,4	54,6
8 „ . .	63 158	65 984	50,8	53,9
9 „ . .	62 688	65 493	50,0	53,0
10 „ . .	62 304	65 086	49,1	52,2
11 „ . .	61 975	64 740	48,4	51,3
12 „ . .	61 690	64 429	47,4	50,5
13 „ . .	61 432	64 139	46,5	49,6
14 „ . .	61 192	63 854	45,6	48,7
15 „ . .	60 948	63 565	44,7	47,8
16 „ . .	60 688	63 266	43,8	47,0
17 „ . .	60 383	62 942	43,0	46,1
18 „ . .	60 025	62 606	42,2	45,2
19 „ . .	59 625	62 262	41,3	44,3
20 „ . .	59 215	61 899	40,5	43,5
21 „ . .	58 733	61 511	39,7	42,6
22 „ . .	58 220	61 106	38,9	41,8
23 „ . .	57 683	60 678	38,1	40,9
24 „ . .	57 154	60 217	37,3	40,1
25 „ . .	56 641	59 731	36,6	39,3
26 „ . .	56 138	59 228	35,7	38,5
27 „ . .	55 637	58 715	35,0	37,7
28 „ . .	55 128	58 189	34,2	36,9
29 „ . .	54 614	57 631	33,4	36,1
30 „ . .	54 077	57 071	32,6	35,3

Alter.	Absterbeordnung. Von je 100000 Lebend- geborenen erlebten das neben- bezeichnete Alter		Lebenserwartung. Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
31 Jahr . .	53 547	56 485	31,8	34,5
32 „ . .	53 040	55 923	31,0	33,7
33 „ . .	52 503	55 340	30,2	32,9
34 „ . .	51 947	54 739	29,5	32,1
35 „ . .	51 372	54 130	28,7	31,3
36 „ . .	50 774	53 504	27,9	30,5
37 „ . .	50 170	52 874	27,2	29,7
38 „ . .	49 545	52 230	26,4	28,9
39 „ . .	48 897	51 578	25,7	28,2
40 „ . .	48 186	50 906	25,0	27,4
41 „ . .	47 445	50 221	24,2	26,6
42 „ . .	46 781	49 615	23,5	25,8
43 „ . .	46 047	48 963	22,8	25,0
44 „ . .	45 303	48 329	22,0	24,2
45 „ . .	44 511	47 677	21,3	23,4
46 „ . .	43 701	47 034	20,6	22,6
47 „ . .	42 933	46 426	19,9	21,8
48 „ . .	42 121	45 799	19,2	21,0
49 „ . .	41 270	45 139	18,5	20,3
50 „ . .	40 356	44 401	17,8	19,5
51 „ . .	39 403	43 620	17,2	18,7
52 „ . .	38 577	42 925	16,5	17,9
53 „ . .	37 640	42 135	15,8	17,1
54 „ . .	36 667	41 298	15,1	16,4
55 „ . .	35 649	40 416	14,5	15,6
56 „ . .	34 588	39 495	13,9	14,9
57 „ . .	33 540	38 564	13,2	14,2
58 „ . .	32 491	37 600	12,6	13,5
59 „ . .	31 381	36 556	12,0	12,9
60 „ . .	30 187	35 373	11,5	12,3
61 „ . .	28 937	34 121	11,0	11,7
62 „ . .	27 868	33 046	10,4	11,0
63 „ . .	26 658	31 801	9,9	10,4
64 „ . .	25 378	30 459	9,4	9,9
65 „ . .	24 051	29 025	8,9	9,4
66 „ . .	22 700	27 557	8,4	8,8
67 „ . .	21 360	26 123	7,9	8,3
68 „ . .	19 969	24 612	7,5	7,8
69 „ . .	18 557	23 017	7,0	7,3
70 „ . .	17 137	21 347	6,6	6,9

Alter.	Absterbeordnung.		Lebenserwartung.	
	Von je 100000 Lebend- geborenen erlebten das neben- bezeichnete Alter		Von den Ueberlebenden ist die halbe Anzahl verstorben nach . . . Jahren	
	m.	w.	m.	w.
71 Jahr . .	15 727	19 653	6,2	6,4
72 „ . .	14 486	18 229	5,8	6,0
73 „ . .	13 155	16 627	5,4	5,6
74 „ . .	11 853	15 055	5,0	5,2
75 „ . .	10 564	13 492	4,6	4,8
76 „ . .	9 300	11 924	4,3	4,4
77 „ . .	8 126	10 484	4,0	4,1
78 „ . .	7 004	9 141	3,8	3,9
79 „ . .	5 849	7 734	3,8	3,8
80 „ . .	4 886	6 452	3,6	3,7
81 „ . .	4 037	5 328	3,4	3,5
82 „ . .	3 406	4 529	3,0	3,1
83 „ . .	2 794	3 736	2,8	2,9
84 „ . .	2 227	2 979	2,7	2,8
85 „ . .	1 727	2 316	2,5	2,7
86 „ . .	1 311	1 788	2,4	2,6
87 „ . .	990	1 402	2,2	2,5
88 „ . .	738	1 076	1,9	2,2
89 „ . .	520	792	1,9	2,1
90 „ . .	359	566	2,2	2,2
91 „ . .	253	389	2,5	2,6
92 „ . .	192	304	2,2	2,4
93 „ . .	142	225	2,1	2,4
94 „ . .	101	161	2,1	2,6
95 „ . .	73	120	2,2	2,8
96 „ . .	51	87	2,2	2,9
97 „ . .	38	70	2,3	2,6
98 „ . .	28	56	1,9	2,0
99 „ . .	21	43	1,6	1,5
100 „ . .	15	32	1,5	1,4

Druckfehler-Verzeichniss des II. Bandes.

Seite	1,	Zeile	3 u. 4 v. u.	lies P' und P'' statt OP' und OP'' .
"	2,	"	1 v. o.	lies OP' und OP'' st. P' und P'' .
"	69,	"	6 v. u.	" \mathfrak{P}' st. \mathfrak{P}_1 .
"	70,	"	13 v. u.	" y^n st. y_n .
"	71,	"	14 v. u.	" ia' st. at' .
"	127,	"	29 v. o.	" $f \equiv$ st. $f_1 \equiv$.
"	129,	"	17 v. o.	" $a_{23}u_2u_3$ st. $a_{23}u_2u_1$.
"	168, No. 4,	Gleichung 6.	lies x_2 st. x_1 .	
"	168, No. 4,	Gleichung 7.	" B_0 st. B_2 .	
"	169, Zeile 12	v. o.	lies x_2 st. x_1 .	
"	176,	"	7 v. u.	" $2f_{12}(x)$ st. $2f_{11}(x)$.
"	185,	"	8 v. o.	" $f_1 = 2x_2x_3$ und $f_2 = 2x_1x_3$ st. $f = 2x_2x_3$ und $f = 2x_1x_3$.
"	193,	"	19 v. o.	" $3a_{232}x_2x_3^2$ st. $3a_{232}x_1x_3^2$.
"	241,	"	2 v. o.	" φ'_w st. φ_w .
"	261,	"	2 v. o.	" dy st. dy .
"	263,	"	8 v. u.	" gu st. yu .
"	280,	"	6 v. o.	" g_1 st. g .
"	286,	"	17 v. u.	" einer st. eine.
"	287,	"	9 v. o.	" Cylinder st. Kegel.
"	321,	"	5 v. u.	" φ_{31}' und φ_{41}' st. φ_{31} und φ_{41} .
"	345	in der letzten Gleichung	lies T_{22} st. T_{32} .	
"	408, Zeile 1	v. o.	lies a_{12} st. a_{22} .	
"	420,	"	15 u. 17 v. o.	lies δ^2v^2 st. δ^2u^2 .
"	537,	"	4 u. 5 v. o.	lies $\Delta z \frac{\partial}{\partial z}$ st. Δz .
"	537,	"	6 v. o.	lies r st. ρ .
"	692,	"	1 v. u.	" α st. a .
"	729,	"	9 v. u.	" $c_1\zeta^2$ st. $c_1\zeta$.
"	729,	"	3 v. u.	" z st. z_1 .
"	756,	"	7 v. o.	" φ_r st. φ^r .
"	808,	"	8 v. u.	" Z st. z .
"	824,	"	10 v. u.	" durch Elimination von st. wenn man.
"	829,	"	11 v. u.	" gebracht st. gedacht.
"	857,	"	16 v. u.	" c_{n-2} st. c_n .
"	942,	"	10 v. u.	" 6. Theil st. 10. Theil.

Literatur.

Lehrbücher der Elementarmathematik.

- ASCHENBORN, H., Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Geometrie. Berlin, Hofbuchdruckerei.
BALTZER, R., Die Elemente der Mathematik. Leipzig, Hirzel.
BECKER, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. Berlin, Weidmann.
GALLENKAMP, W., Die Elemente der Mathematik. Iserlohn, Bäderker.
REIDT, F., Die Elemente der Mathematik. Berlin, Grote.
SCHLEGEL, V., Lehrbuch der Elementarmathematik. Wolfenbüttel, Zwissler.

Logarithmentafeln.

- VEGA, G. v., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. (Siebenstellig.) Berlin, Weidmann.
SCHRÖN, L., Siebenstellige Logarithmentafeln. Braunschweig, Vieweg.
SCHLOEMILCH, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Braunschweig, Vieweg.

Aufgabensammlungen.

- HEIS, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Köln, Dumont-Schauberg.
MEIER-HIRSCH, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung etc. Berlin, Dunker.
BARDEY, E., Methodisch geordnete Aufgabensammlung über alle Theile der Elementararithmetik. Leipzig, Teubner.
BARDEY, E., Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Leipzig, Teubner.
LIEBER u. v. LÜHMANN, Geometrische Constructionsaufgaben. Berlin, Simion.
GANDTNER u. JUNGHANNS, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Berlin, Weidmann.
PETERSEN, J., Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben. Kopenhagen, Host & Sohn.
REIDT, F., Planimetrische Aufgaben. Breslau, Trewendt.
MÜTTRICH, A., Sammlung stereometrischer Aufgaben. Königsberg, Bon.
REIDT, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Stereometrie. Leipzig, Teubner.
HERMES, O., Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Berlin, Winkelmann & Sohn.
LIEBER u. v. LÜHMANN, Trigonometrische Aufgaben. Berlin, Simion.
GALLENKAMP, W., Sammlung trigonometrischer Aufgaben. Mülheim a. d. R., Bagel.
REIDT, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie. (Hierzu besonders das Resultatenheft.) Leipzig, Teubner.

Höhere Algebra.

- DRONKE, A., Einleitung in die höhere Algebra. Halle, Nebert.
MATTHIESSEN, L., Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, Teubner.
SCHLOEMILCH, Handbuch der Mathematik. Bd. II.

- PETERSEN, J., Theorie der algebraischen Gleichungen. Kopenhagen, Host & Sohn.
 SERRET, A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch von G. v. WERTHEIM. Leipzig, Teubner.
 HANKEL, H., Vorlesungen über die complexen Zahlen. Leipzig, Voss.
 BALTZER, R., Theorie und Anwendungen der Determinanten. Leipzig, Hirzel.
 GÜNTHER, S., Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen, Besold.
 CLEBSCH, H., Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, Teubner.
 SALMON, G., Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.

Zahlentheorie.

- MINDING, F., Anfangsgründe der höheren Arithmetik. Berlin, G. Reimer.
 LEJEUNE-DIRICHLET, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von DEDEKIND. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
 BACHMANN, P., Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig, Teubner.
 GAUSS, C. F., Disquisitiones arithmeticae. (Gesammelte Werke, Bd. I.) Leipzig, Fleischer.

Analytische, synthetische und descriptive Geometrie.

- JOACHIMSTHAL, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Berlin, G. Reimer.
 MAGNUS, L. J., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin, Duncker & Humblot.
 HEGER, R., Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
 SCHENDEL, L., Elemente der analytischen Geometrie in trilinearen Coordinaten. Jena, Costenoble.
 CLEBSCH, H., Vorlesungen über Geometrie, herausgeg. von F. LINDEMANN. Leipzig, Teubner.
 SALMON, G., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
 SALMON, G., Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
 DURÈGE, H., Die ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig, Teubner.
 SALMON, G., Analytische Geometrie des Raumes. Deutsch von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner.
 HESSE, O., Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbes. über die Flächen zweiter Ordnung. Leipzig, Teubner.
 PLÜCKER, J., Neue Geometrie des Raumes. Leipzig, Teubner.
 FIEDLER, W., Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig, Teubner.
 MÖBIUS, A., Der barycentrische Calcul. Leipzig.
 STEINER, J., Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, Fincke.
 STEINER, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie, herausgeg. von H. SCHRÖTER. Leipzig, Teubner.
 REYE, TH., Geometrie der Lage. Hannover, Rümpler.
 FIEDLER, W., Die darstellende Geometrie. Leipzig, Teubner.

Algebraische Analysis.

- SCHLOEMILCH, O., Handbuch der algebraischen Analysis. Jena, Frommann.
 LIEBLEIN, J., Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Prag, Satow.

Höhere Analysis und deren Anwendungen.

- SCHLOEMILCH, O., Compendium der höheren Analysis. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
 SCHLOEMILCH, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Leipzig, Teubner.
 HATTENDORF, K., Höhere Analysis. Hannover, Rümpler.
 LIPSCHITZ, R., Lehrbuch der Analysis. Breslau, Cohen.
 WOPRITZKY, J., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin, Weidmann.

- MEYER, G. J., Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Leipzig, Teubner.
- JOACHIMSTHAL, F., Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Leipzig, Teubner.
- RIEMANN, B., Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendungen; herausgeg. von K. HATTENDORF. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
- NEUMANN, C., Untersuchungen über das logarithmische und NEWTON'sche Potential. Leipzig, Teubner.

Allgemeine Functionentheorie und specielle Transcendenten.

- DURÉGE, H., Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Leipzig, Teubner.
- THOMAE, J., Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Halle, Nebert.
- BRIOT u. BOUQUET, Theorie der doppelt-periodischen Functionen; übers. von H. FISCHER. Halle, Schmidt.
- HEINE, E., Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, G. Reimer.
- NEUMANN, C., Theorie der BESSEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.
- SOMMEL, E., Studien über die BESSEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.
- JACOBI, C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg, Bornträger.
- SCHELLBACH, K., Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Berlin, G. Reimer.
- DURÉGE, H., Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner.
- KÖNIGSBERGER, L., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner.
- KÖNIGSBERGER, L., Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. Leipzig, Teubner.
- PRYM, A., Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen. Bonn, Habicht.
- WEIERSTRASS, Theorie der ABEL'schen Functionen. Berlin, G. Reimer.
- RIEMANN, B., Theorie der ABEL'schen Functionen. Berlin, G. Reimer.
- NEUMANN, C., Vorlesungen über RIEMANN's Theorie der ABEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.
- CLERSCH u. GORDAN. Theorie der ABEL'schen Functionen. Leipzig, Teubner.

Werke verschiedenen Inhalts.

- GAUSS, C. F., Werke. Göttingen, herausgeg. von der K. Gesellschaft der Wissenschaften.
- JACOBI, C. G. J., Gesammelte Werke. Berlin, G. Reimer.
- RIEMANN, B., Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner.
- Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. von CRELLE. Berlin, G. Reimer.
- Archiv der Mathematik und Physik, begr. von GRUNERT. Leipzig, Koch.
- Zeitschrift für Mathematik und Physik, redig. von O. SCHLOEMILCH u. M. CANTOR. Leipzig, Teubner.

Geschichte der Mathematik.

- HANKEL, H., Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig, Teubner.
- CANTOR, M., Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Leipzig, Teubner.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).

FEB 10 1883 .

SEP 27 1888

SEP 30 1889

SEP 30 1891

